GEOMETRÍA

ARRAYAN M.R.

Acerca de las autoras

Ximena Carreño Campos

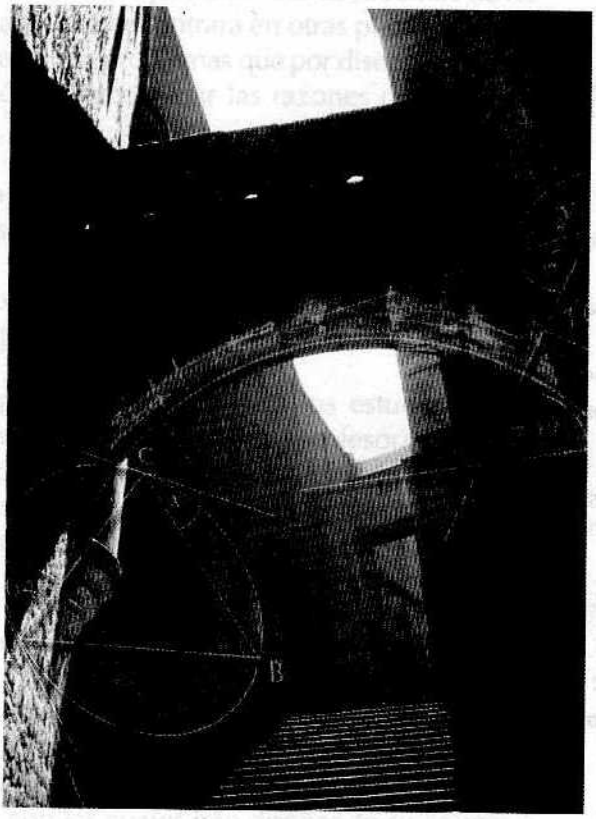
- Profesora de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Orientadora, Instituto Chileno de Cultura Hispánica. Consejo Mundial de Educación.
- Ex-profesora de la facultad de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Ex-profesora del Colegio Saint George's College, Santiago.
- Coordinadora sector Matemática del Proyecto: "FONDEF: Reformulación de las pruebas de ingreso a la educación superior". Facultad de Economía, Universidad de Chile; Escuela de Sicología, Pontificia Universidad Católica de Chile y Ministerio de Educación.
- Coordinadora sector Matemática del Programa: "Acreditación de Excelencia Pedagógica". Facultad de Economía, Universidad de Chile; Escuela de Sicología, Pontificia Universidad Católica de Chile y Ministerio de Educación.

Ximena Cruz Schmidt

- Profesora de Estado en Matemática y Física, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Magíster en Educación, Mención Currículum, Universidad de Tarapacá.
- Ex-profesora de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Matemática.
- Ex-profesora de la Universidad Católica del Norte, Sede Arica.
- Profesora de la Universidad de Tarapacá, Facultad de Ciencias, Facultad de Humanidades.
- Directora del Colegio San Marcos de Arica.
- Estudios de Doctorado en Educación, Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Graduada del Diplomado en Emprendimiento y Liderazgo dirigido por el filósofo, empresario y Senador chileno Fernando Flores Labra. Actual Instructora del mismo Programa.

ARRAYÁN EDITORES S.A. Bernarda Morín 435, Providencia
Teléfono: (56-2) 431 42 00 • Fax: (56-2) 431 42 82
Santiago de Chile.
http://www.arrayan.cl • e-mail: arrayan@arrayan.cl

G OMETRÍA



Ximena Carreño Campos
Ximena Cruz Schmidt

ARRAYAN
EDITORES M.R.

EDICIÓN Y PRODUCCIÓN:

Departamento Pedagógico Arrayán Editores S.A.

Actualmente compuesto por:

Dirección General
Leonardo Vilches Robert

Coordinación Editorial
Margarita de Pujadas Hermosilla

Edición Pedagógica
Patricia Calderón Urzúa
César Cerda Bascuñán
Ximena Fuster Domínguez
Claudio Troncoso Pino

Edición
Claudio Silva Castro
Mireya Seguel Burgos
Ignacio Rodríguez Aguirrezábal

Corrección de Estilo
Alejandro Cisternas Ulloa

Coordinación Gráfica
Francisco Martínez Muñoz

Diseño y Diagramación
Vinka Guzmán Tacla
Jose Luis Jorquera Dölz
Roberto Peñailillo Farías
Francisco Condon Manríquez

Ilustraciones
Andrés Lizama Yévenes

Participación Externa:

Revisión de contenidos
Emilio Cisternas Ulloa
Julio Orellana Silva

Revisión de ejercicios
Mauricio Fernández Castillo

Autor anexo Cabri Géomètre
Alfredo Orchard Martínez

Bernarda Morín 435. Providencia. Santiago de Chile. Teléfono: 4314200. Fax: 2741041.
email: arrayan@arrayan.cl. Consultas: editorial@arrayan.cl

Obra: Geometría Arrayán.
Inscripción: 142.360. I.S.B.N: 956-240-427-7.

Primera edición, octubre de 2004.

Impreso en Chile por Morgan Impresores S.A.

Introducción

Usted tiene en sus manos el texto "Geometría Arrayán". Se trata de un libro principalmente de ejercicios, donde, además de los ejercicios tradicionales que encontrará en otras publicaciones, se ofrece una propuesta con problemas que por diseño no tienen solución. La solución es determinar las razones que generan esta situación.

Al mismo tiempo, aparecerán ejercicios con datos que no utilizará. La vida es así. Trabajar sistemáticamente los ejercicios propuestos pone a su disposición la posibilidad de entrenamiento para desarrollar sus habilidades de resolver problemas en el ámbito de la geometría.

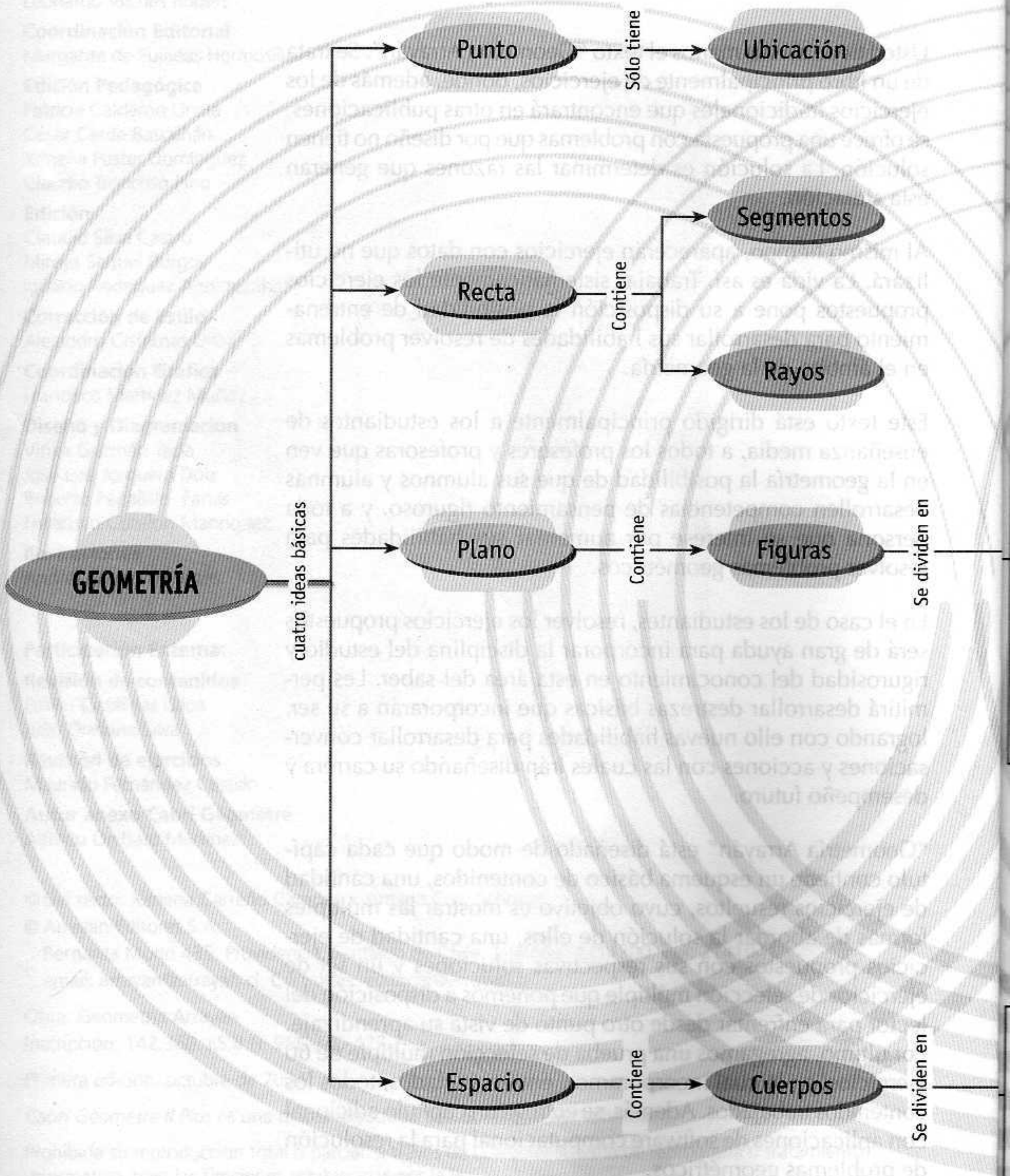
Este texto está dirigido principalmente a los estudiantes de enseñanza media, a todos los profesores y profesoras que ven en la geometría la posibilidad de que sus alumnos y alumnas desarrollen competencias de pensamiento riguroso, y a toda persona que se interese por aumentar sus habilidades para resolver problemas geométricos.

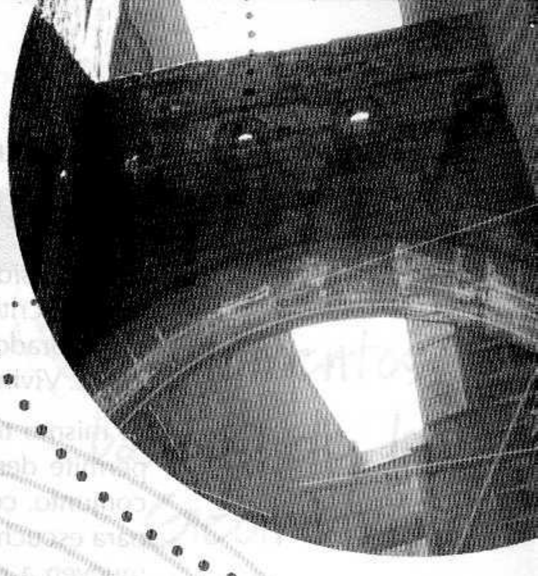
En el caso de los estudiantes, resolver los ejercicios propuestos será de gran ayuda para incorporar la disciplina del estudio y rigurosidad del conocimiento en esta área del saber. Les permitirá desarrollar destrezas básicas que incorporarán a su ser, logrando con ello nuevas habilidades para desarrollar conversaciones y acciones con las cuales irán diseñando su carrera y desempeño futuro.

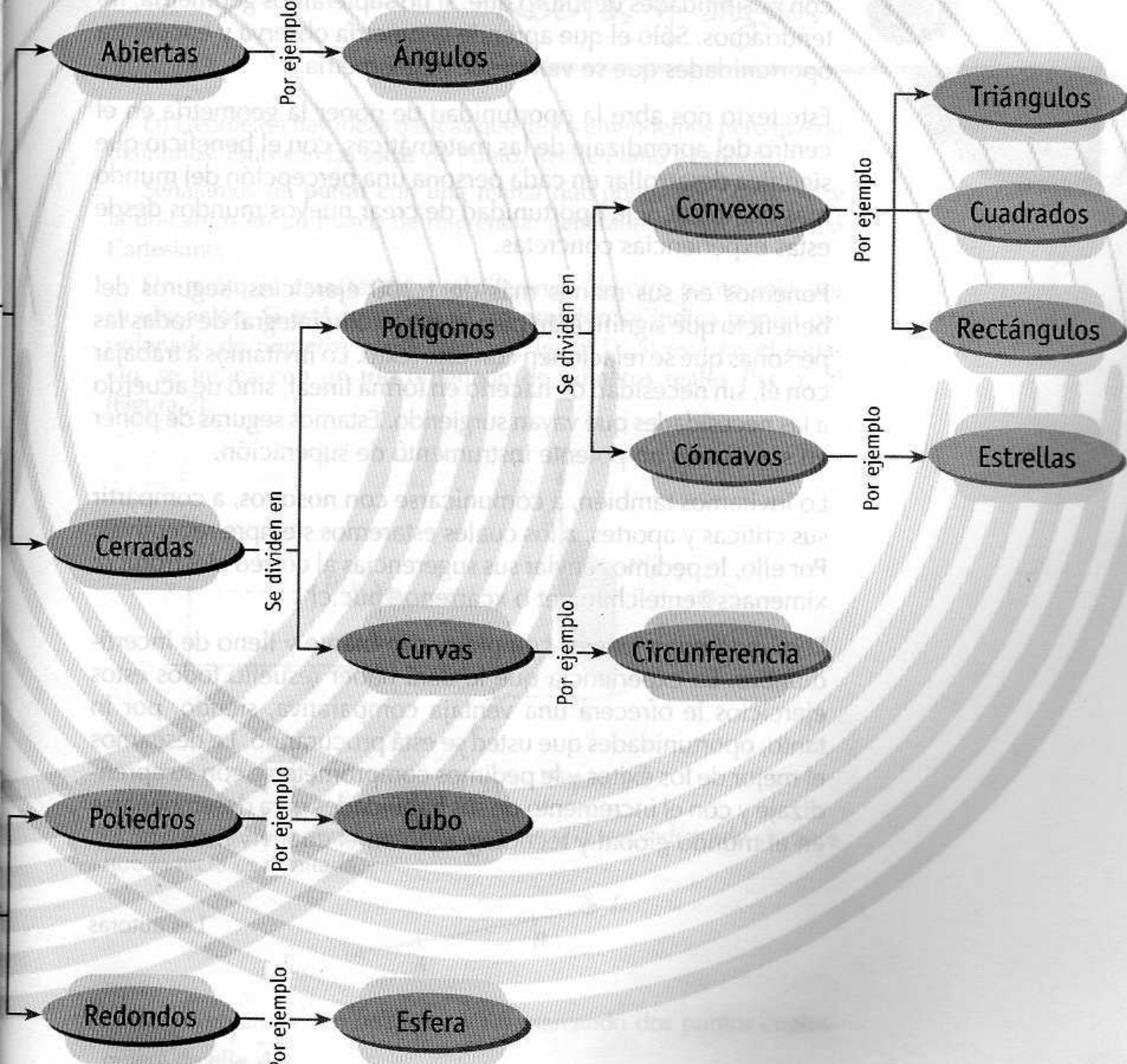
"Geometría Arrayán" está diseñado de modo que cada capítulo contiene un esquema básico de contenidos, una cantidad de ejercicios resueltos, cuyo objetivo es mostrar las múltiples formas de abordar la solución de ellos, una cantidad de ejercicios propuestos con sus respectivas soluciones y un set de ejercicios de selección múltiple que ponemos a disposición del lector para enfrentar desde otro punto de vista su aprendizaje. Por último, agregamos una prueba de selección múltiple de 60 ejercicios, en la cual incorporamos, entremezclados, todos los contenidos trabajados. Además, se entrega un capítulo adicional con aplicaciones de software computacional para la resolución de problemas geométricos.

Mapa de contenidos

A continuación, le entregamos un esquema visual de los contenidos de este texto. Le ayudará a tener una visión global del desarrollo de esta rama de las matemáticas y de la manera cómo se relaciona un contenido con otro.







Abiertas
Por ejemplo
Ángulos
Cerradas
Se dividen en
Polígonos
Se dividen en
Convexos
Por ejemplo
Triángulos
Cuadrados
Rectángulos
Cóncavos
Por ejemplo
Estrellas
Curvas
Por ejemplo
Circunferencia
Poliedros
Por ejemplo
Cubo
Redondos
Por ejemplo
Esfera

La geometría en la vida diaria

Aprender a resolver problemas de geometría es aprender a vivir. La solución de estos ejercicios nos obliga a desarrollar hábitos de rigurosidad en el pensamiento, deducción lógica, limpieza de los escritos, minuciosidad en los dibujos y otros, que una vez incorporados, pasan a formar parte de nuestro actuar en la vida diaria. Vivimos así.

Al mismo tiempo, saber resolver problemas de geometría nos permite desarrollar un estar en el mundo con una visión de conjunto, con una imaginación y apertura que nos sensibilizan para escuchar desde las figuras y formas de la naturaleza, y nos mueven a mirar el arte, el lenguaje, la industria y las distintas manifestaciones del ser humano desde una perspectiva más creativa. También, vamos incorporando experiencias que nos enriquecen y nos hacen construir una historia personal más potente y con posibilidades de futuro que, si no supiéramos geometría, no tendríamos. Sólo el que aprende geometría observa y encuentra oportunidades que se ven desde la geometría.

Este texto nos abre la oportunidad de poner la geometría en el centro del aprendizaje de las matemáticas, con el beneficio que significa desarrollar en cada persona una percepción del mundo más completa, y la oportunidad de crear nuevos mundos desde estas experiencias concretas.

Ponemos en sus manos más de 1.200 ejercicios, seguros del beneficio que significarán para el desarrollo integral de todas las personas que se relacionen con este texto. Lo invitamos a trabajar con él, sin necesidad de hacerlo en forma lineal, sino de acuerdo a las necesidades que vayan surgiendo. Estamos seguras de poner en sus manos un potente instrumento de superación.

Lo invitamos también, a comunicarse con nosotros, a compartir sus críticas y aportes, a los cuales estaremos siempre receptivas. Por ello, le pedimos enviar sus sugerencias al correo electrónico: ximenacs@entelchile.net o xcarreno@puc.cl

El mundo que viene es complejo, cambiante y lleno de incertidumbre. La experiencia que le dará haber resuelto todos estos ejercicios le ofrecerá una ventaja comparativa, siendo, por lo tanto, oportunidades que usted se está procurando. Le deseamos el mejor de los éxitos y le pedimos comprometerse con su aprendizaje y con el incremento de sus habilidades para desempeñarse en el mundo global y tecnologizado en el cual vivimos.

Las autoras

CAPÍTULO 1

Elementos básicos de la Geometría

Rectas y ángulos 1.1

En Geometría hay ideas básicas que todos entendemos pero que no definimos. Éstas son las ideas de Punto, Recta, Plano y Espacio.

Señalamos un **punto** con una marca que puede ser "·" o "×" y la ubicamos en un marco de referencia, generalmente en el Sistema Cartesiano.

Un punto se caracteriza y se diferencia de otro punto sólo por su ubicación. Si está en un plano, su posición se indica por un par ordenado de números reales $P(x, y)$ (Figura 1). Si está en el espacio, se indica con un trío ordenado de números reales $P(x, y, z)$ (Figura 2).

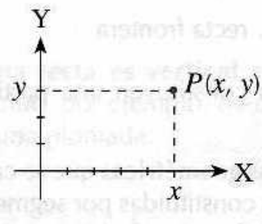


Figura 1

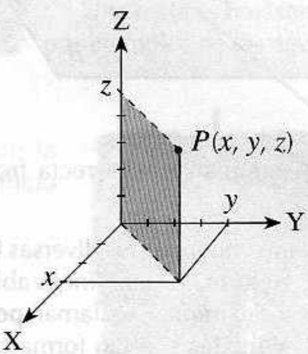
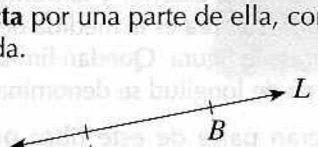


Figura 2

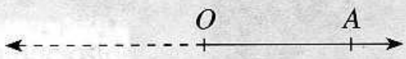
Señalamos una **recta** por una parte de ella, considerando siempre que la recta es ilimitada.



La nombramos con una letra (L) o marcando dos puntos cualesquiera de ella $\overleftrightarrow{AB}$.

Cada punto de una recta divide a ésta en dos **semirrectas**. El punto es la **frontera** entre ambas y no pertenece a ninguna de ellas.

Se llama **rayo** a una semirrecta unida con su frontera $\overrightarrow{OA}$.

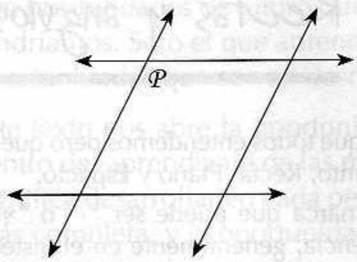


Se llama **segmento** o **trazo** a una porción continua de recta limitada por ambos lados.

$\overline{AB}$ segmento o trazo

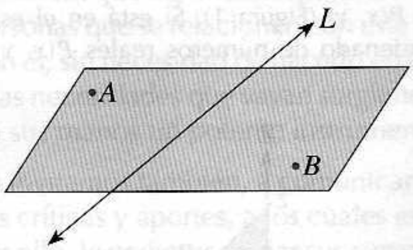
La medida o longitud de $\overline{AB}$ se designa por $m(\overline{AB})$ o simplemente AB.

Señalamos un **plano** por una porción de él y generalmente le damos la forma de paralelogramo. No debemos olvidar que el plano es ilimitado. Normalmente lo designamos por una letra $\mathcal{P}$.



$\mathcal{P}$: plano

Una recta en un plano divide a éste en dos **semiplanos**, siendo la recta la **frontera** entre los dos semiplanos.



Semiplano A

Semiplano B

L recta frontera

Ambos semiplanos y la recta frontera constituyen una partición del plano.

En el plano encontramos diversas **figuras geométricas** que se caracterizan por su forma. Si son líneas abiertas constituidas por segmentos unidos por sus extremos, se llaman **poligonales; curvas** si no contienen segmentos, y **mixtas** si están formadas por segmentos y porciones de curvas. Si las líneas son cerradas, dividen al plano que las contiene en tres partes: su interior, su exterior y la frontera. Las líneas cerradas encierran una región, y su **área** es la medida de la parte del plano que constituye el interior de la figura. Quedan limitadas por su contorno o frontera, cuya medida de longitud se denomina **perímetro**.

A lo largo de gran parte de este libro proponemos ejercicios que tienen que ver con distintas figuras geométricas, sus elementos constitutivos, sus elementos secundarios, su perímetro y su área, así como la relación entre las medidas de sus elementos y la forma de construirlas.

Espacio es el ambiente tridimensional en que nos movemos. Propondremos, estudiaremos y resolveremos problemas relativos a cuerpos geométricos. Entendemos por **cuerpo geométrico** una porción continua del espacio limitada por superficies curvas y/o planas. Si sólo está limitado por planos, se llama **poliedro**. Si su límite tiene alguna parte que es una superficie curva, se llama **cuerpo redondo**.

La medida de esa porción limitada de espacio que constituye un cuerpo es lo que llamamos **volumen** del cuerpo.

Las porciones de planos que limitan el cuerpo se llaman **caras** y si son porciones de superficies curvas, se denominan **manto** o **superficie de revolución**. La suma de las áreas de las caras y/o de las superficies de revolución constituye el área del cuerpo geométrico.

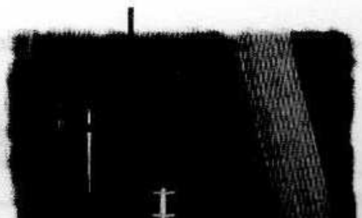
Un plano divide al espacio en dos semiespacios, siendo el plano la frontera entre ambos; no pertenece a ninguno de ellos. Ambos semiespacios y el plano divisorio constituyen una partición del espacio.

En esta primera parte del texto nos remitiremos solamente a trabajar con figuras geométricas en el plano. En el capítulo 9 veremos algunos problemas de geometría del espacio que tienen que ver con cuerpos geométricos.

Puntos y rectas en el plano 1.2

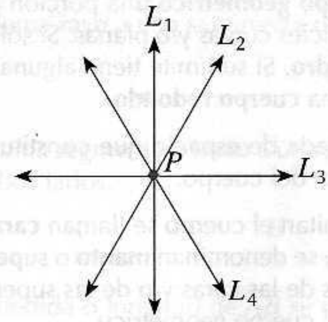
Una recta es **horizontal** si sigue la dirección, por ejemplo, de las aguas en reposo.

Una recta es **vertical** si sigue la dirección, por ejemplo, de un edificio o de una plomada.



Cualquier recta que no sea horizontal o vertical se llama recta **oblicua**.

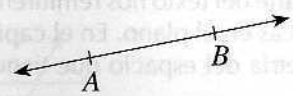
- Por un punto se pueden trazar infinitas rectas coplanares (que están en el mismo plano).



$\{P\} = L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4$

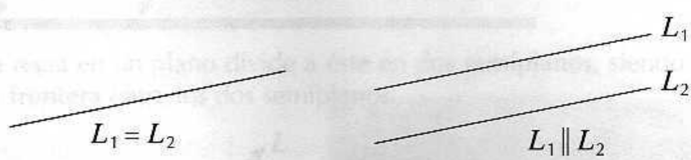
P se llama punto de concurrencia de las rectas L_1 , L_2, L_3 y L_4.

- Dos puntos definen una única recta.



$\overleftrightarrow{AB}$: recta que contiene a los puntos A y B.

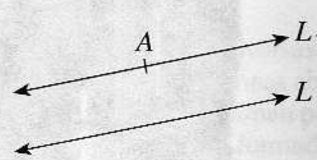
Dos rectas de un plano se llaman paralelas si coinciden en todos sus puntos o si su intersección es vacía.



El símbolo que usamos para paralelismo es " $\parallel$ ".

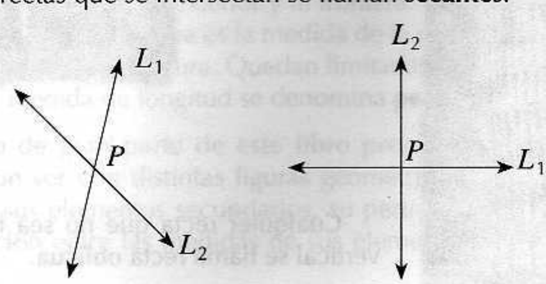
$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \varnothing \\ L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2 \end{cases}$$

- Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola recta paralela a ella.



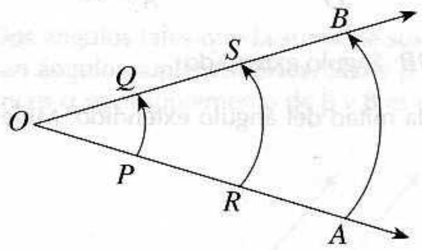
$L_1 \parallel L$, L_1 contiene a A

Dos rectas que se intersectan se llaman **secantes**.



Ángulos 1.3

Se llama **ángulo** a la unión de dos rayos que tienen origen común. El origen recibe el nombre de **vértice** y la abertura que se produce entre los rayos es lo que llamamos **medida del ángulo**. Los rayos se llaman **lados** del ángulo.



$\sphericalangle AOB$: ángulo AOB

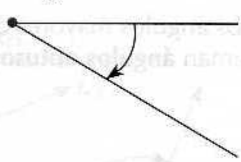
También podemos entender la medida del ángulo como la parte del plano que recorre el rayo $\overrightarrow{OA}$ para llegar a la posición $\overrightarrow{OB}$, manteniendo fijo el punto O. Considerando que el punto A puede ser elegido en cualquier parte del rayo $\overrightarrow{OA}$ (lado del ángulo), $\sphericalangle ROS$, $\sphericalangle POQ$ y cualquier otra elección representan el mismo ángulo.

Convengamos en que, en la figura anterior, $OA = OB$; $OR = OS$; $OP = OQ$. Diremos entonces que $\widehat{AB}$ es un **arco** con **radio** OA, $\widehat{RS}$ es un **arco** con **radio** OR y $\widehat{PQ}$ es un **arco** con **radio** OP.

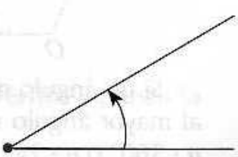
Medida de ángulos:

La medida de un ángulo se considera positiva si la abertura se recorre en sentido inverso al movimiento que realizan las manecillas del reloj, y se considera negativa si la abertura se recorre en el mismo sentido en que se mueven las manecillas del reloj.

ángulo de medida negativa

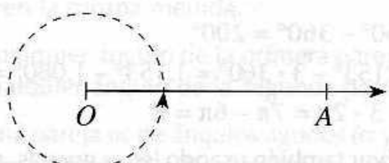


Dos ángulos son iguales si el valor absoluto de sus medidas es igual.



ángulo de medida positiva

Si el rayo $\overrightarrow{OA}$ da una vuelta completa en torno a su vértice O, decimos que se ha descrito un **ángulo completo**.



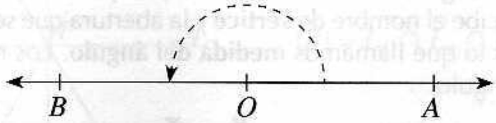
Consideraremos aquí dos sistemas de medida de ángulos:

Sistema sexagesimal: la unidad de medida es 1 grado (1°) y éste se define como un 360^{avo} del ángulo completo. Un grado contiene 60 minutos y un minuto contiene 60 segundos.

Sistema de radianes: la unidad de medida es 1 radián (1 rad) y se define como la parte del ángulo completo cuyo arco es igual al radio.

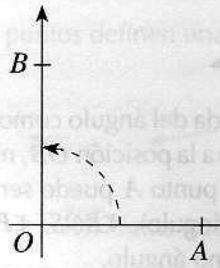
El ángulo completo mide entonces 360° o 2π rad.

Se llama **ángulo extendido** a la mitad del ángulo completo. Mide 180° o π rad.



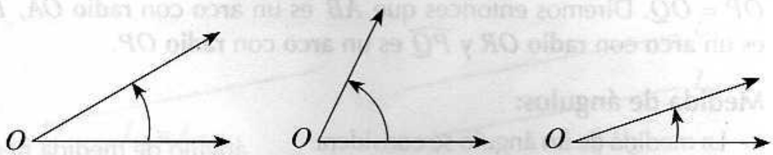
$\sphericalangle AOB$: ángulo extendido

Se llama **ángulo recto** a la mitad del ángulo extendido. Mide 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad.

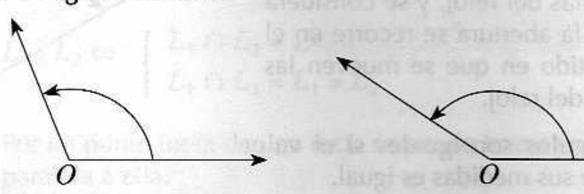


$\sphericalangle AOB$: ángulo recto

Los ángulos menores que 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad se llaman **ángulos agudos**.



Los ángulos mayores que 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad y menores que 180° o π rad se llaman **ángulos obtusos**.



Si un ángulo mide más de 360° o 2π rad se considera equivalente al mayor ángulo menor que 360° o 2π rad luego de haberle restado $n \cdot 360°$ o $n \cdot 2\pi$, con $n \in \mathbb{N}$.

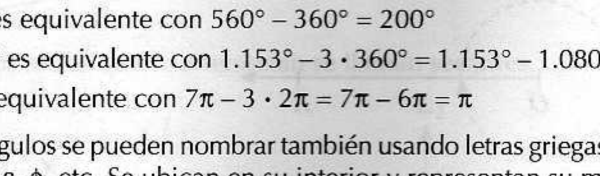
Por ejemplo:

560° es equivalente con $560° - 360° = 200°$

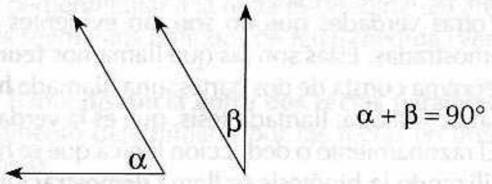
1.153° es equivalente con $1.153° - 3 \cdot 360° = 1.153° - 1.080° = 73°$

7π es equivalente con $7\pi - 3 \cdot 2\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$

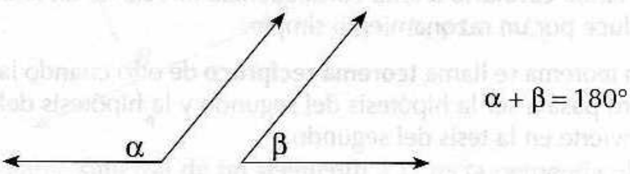
Los ángulos se pueden nombrar también usando letras griegas, como α, β, γ, δ, ε, ϕ, etc. Se ubican en su interior y representan su medida.



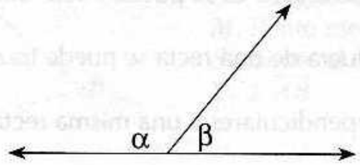
Dos ángulos tales que la suma de sus medidas es 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad se llaman **ángulos complementarios**. Si α y β son ángulos complementarios, entonces α es el complemento de β y β es el complemento de α.



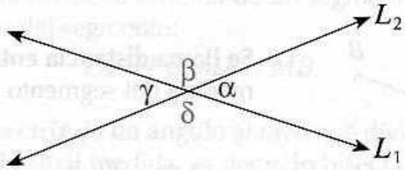
Dos ángulos tales que la suma de sus medidas es 180° o π rad se llaman **ángulos suplementarios.** Si α y β son ángulos suplementarios, entonces α es el suplemento de β y β es el suplemento de α.



Si α y β son dos ángulos tales que un lado de α coincide con un lado de β y la suma de sus medidas es 180° o π rad, entonces α y β se llaman ángulos **adyacentes suplementarios** y se dice que forman un **par lineal** de ángulos.



Dos rectas secantes forman cuatro ángulos.

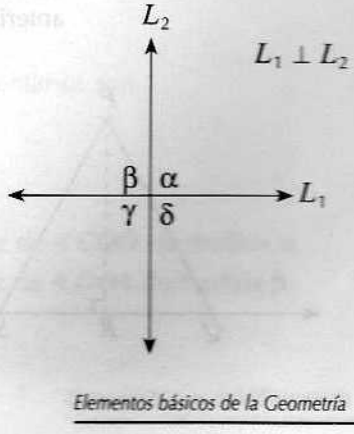


El par α y γ se llaman ángulos **opuestos por el vértice** y tienen la misma medida.

El par, β y δ se llaman ángulos **opuestos por el vértice** y tienen la misma medida.

Cualquier ángulo de la primera pareja es suplemento de cualquier ángulo de la segunda pareja.

Una pareja es de ángulos agudos (α y γ) y la otra es de ángulos obtusos (β y δ); a menos que los cuatro ángulos que se forman sean iguales, en cuyo caso cada uno mide 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad y las rectas se llaman **perpendiculares**. Se usa el símbolo "$\perp$".



En geometría se llaman **postulados** o **axiomas** a aquellas verdades que por ser evidentes se aceptan como tales. No necesitan ser demostradas.

Sobre la base de los postulados y utilizando las definiciones que se han dado, hay otras verdades que no son tan evidentes y por lo tanto deben ser demostradas. Éstas son las que llamamos **teoremas.** El enunciado de un teorema consta de dos partes: una, llamada **hipótesis**, que contiene los datos, y la otra, llamada **tesis**, que es la verdad que se quiere demostrar. El razonamiento o deducción lógica que se hace para concluir la tesis utilizando la hipótesis se llama **demostración**.

Existen también los **lemas**, que son teoremas de menor importancia, cuyo único objeto es facilitar la demostración de otro teorema más importante.

Se llama **corolario** a toda consecuencia directa de un teorema que se deduce por un razonamiento simple.

Un teorema se llama **teorema recíproco** de otro cuando la tesis del primero pasa a ser la hipótesis del segundo y la hipótesis del primero se convierte en la tesis del segundo.

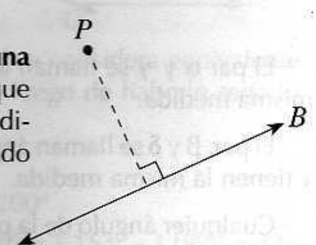
Postulados o axiomas:

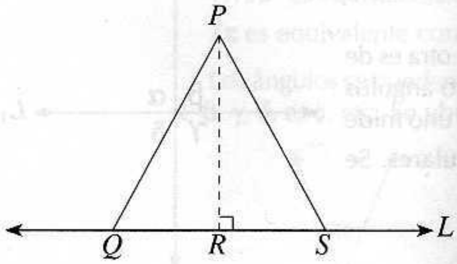
1. Por dos puntos se puede trazar una única recta.
2. Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola perpendicular a ella.
3. Por un punto de una recta se puede trazar una sola perpendicular a ella.
4. Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola paralela a ella.
5. Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí.
6. Dos rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.

Definiciones:

1. Se llama **distancia entre dos puntos** a la medida del segmento que los une.

2. Se llama **distancia de un punto a una recta** a la medida del segmento que se inicia en el punto y llega perpendicularmente a la recta (por postulado anterior hay uno solo).

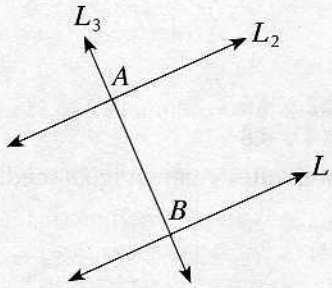




3. Todo segmento trazado desde un punto P a una recta L que no es perpendicular a la recta se llama **segmento oblicuo.** $\overline{PQ}$ y $\overline{PS}$ son segmentos oblicuos.
Los puntos Q, R y S se denominan **pie** de los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$, respectivamente.

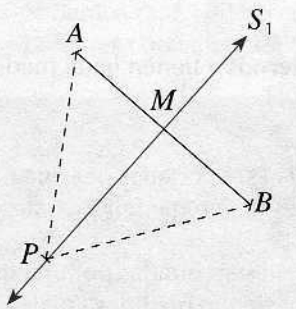
Dos segmentos oblicuos cuyos respectivos pies están a igual distancia del pie de la perpendicular tienen longitudes iguales.
Si el pie de un segmento oblicuo está a mayor distancia del pie de la perpendicular que otro, es más largo que ese otro.
La perpendicular a la recta es bisectriz del ángulo formado por dos segmentos oblicuos de igual medida (Ver definición 6).

4. Se llama **distancia entre dos rectas paralelas** a la medida del segmento determinado por las rectas en una perpendicular a ambas.



$L_1 \parallel L_2$
AB = distancia entre L_1 y L_2
$L_3 \perp L_1$ y $L_3 \perp L_2$

5. Se llama **simetral de un segmento** a la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

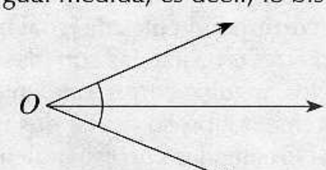


$\overline{AB}$: Segmento
M: Punto medio de $\overline{AB}$
S_1: Simetral de $\overline{AB}$
$S_1 \perp \overline{AB}$

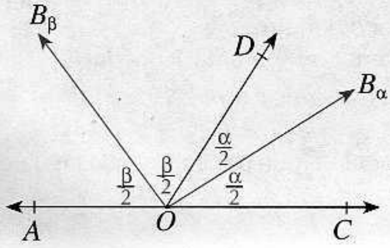
Todos los puntos de la simetral de un segmento equidistan de los extremos del segmento:

$$PA = PB;\ MA = MB.$$

6. Se llama **bisectriz de un ángulo** al rayo que divide al ángulo en dos partes de igual medida, es decir, lo bisecta.

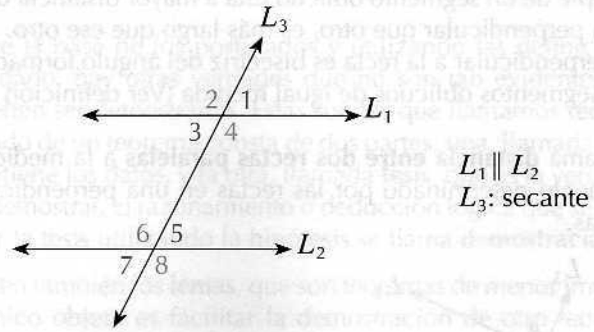


Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares.



B_α: bisectriz de $\sphericalangle COD$ de medida α
B_β: bisectriz de $\sphericalangle DOA$ de medida β
$B_\alpha \perp B_\beta$

7. Dos rectas paralelas cortadas por una secante (o transversal) generan dos grupos de ángulos.



Las parejas $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 5$, $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 6$,
$\measuredangle 3$ y $\measuredangle 7$, $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 8$

se llaman **ángulos correspondientes** y tienen igual medida.

Las parejas $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 6$
$\measuredangle 3$ y $\measuredangle 5$

se llaman **ángulos alternos internos** y tienen igual medida.

Las parejas $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 7$
$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 8$

se llaman **ángulos alternos externos** y tienen igual medida.

Teoremas:

1. Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser cortadas por una transversal, los ángulos correspondientes tienen medidas iguales.

2. Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos tienen medidas iguales.

3. Dos rectas son paralelas si y sólo si al ser cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos tienen medidas iguales.

Nota: en cada uno de los tres teoremas anteriores están enunciados un teorema y su recíproco. Por ejemplo, en el Teorema 1 podemos decir: **rectas paralelas cortadas por una transversal generan ángulos correspondientes de igual medida** (la hipótesis es que se tienen dos rectas paralelas cortadas por una transversal y la tesis es que los ángulos correspondientes tienen medidas iguales). Y el teorema recíproco es: **En dos rectas cortadas por una transversal, si los ángulos correspondientes tienen medidas iguales, entonces las rectas son paralelas** (la hipótesis es que los ángulos correspondientes tienen medidas iguales y la tesis es que las rectas son paralelas). Cada vez que un enunciado contiene un **si y sólo si**, cuya simbología es "$\Leftrightarrow$", hay dos teoremas involucrados y uno es recíproco del otro.
Observando la figura anterior, el Teorema 1 queda:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m\measuredangle 1 = m\measuredangle 5$$

4. Dos ángulos opuestos por el vértice tienen medidas iguales.

Ejercicios resueltos

1. Si $\alpha = 20° 3' 52''$, hallar su complemento.

El complemento de un ángulo es lo que le falta a éste para completar 90°; por lo tanto, el complemento de α es: $(90° - \alpha)$.

$$\begin{array}{r} 90° \\ \underline{-\,20°\ 3'\ 52''} \end{array}$$

Para realizar la resta tomamos 1° de los 90° y lo expresamos como 59′ 60″, así nos queda:

$$\begin{array}{rrr} 89° & 59' & 60'' \\ -\,20° & 3' & 52'' \\ \hline 69° & 56' & 8'' \end{array}$$

El complemento de α es el ángulo que mide 69° 56′ 8″.

2. Hallar el suplemento del complemento de α, si $\alpha = 32°$.

El complemento de α es $(90° - \alpha) = 90° - 32° = 58°$
El suplemento de 58° es $(180° - 58°) = 122°$
Luego el suplemento del complemento de α es 122°

3. Expresar la medida de un ángulo de 35° en radianes.

Sabemos que 180° corresponden a π rad. La pregunta es: ¿a cuántos radianes equivalen 35°? Se establece una proporción directa:

$$\frac{180°}{35°} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{35° \cdot \pi}{180°} = \frac{7\pi}{36} \approx 0{,}61 \text{ rad}$$

El ángulo de 35° expresado en radianes es de aproximadamente 0,61 rad.

4. Expresar la medida de un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad en grados.

Sabemos que el ángulo de π rad equivale a 180°. La pregunta es: ¿a cuántos grados corresponden los $\frac{2\pi}{3}$ rad? Se forma la proporción directa correspondiente:

$$\frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{180°}{x°} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 180°}{3\pi} = 120°$$

El ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ rad expresado en grados es 120°.

5. Sea $\alpha = 102° 20' 32''$ y $\beta = 53° 14' 7''$.
Hallar el valor de $4\beta - 2\alpha$

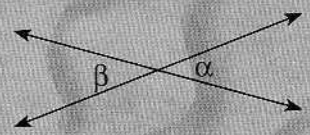
$4\beta = 4 \cdot (53° 14' 7'') = 212° 56' 28''$
$2\alpha = 2 \cdot (102° 20' 32'') = 204° 40' 64'' = 204° 41' 4''$
$4\beta - 2\alpha = 212° 56' 28'' - 204° 41' 4'' = 8° 15' 24''$
Luego, el valor de $4\beta - 2\alpha$ es 8° 15′ 24″.

6. Indicar cuál es la hipótesis y cuál es la tesis en el siguiente teorema: "Dos ángulos opuestos por el vértice tienen medidas iguales".

Hipótesis:
Dos ángulos son opuestos por el vértice.

Tesis:
Esos dos ángulos tienen medidas iguales.

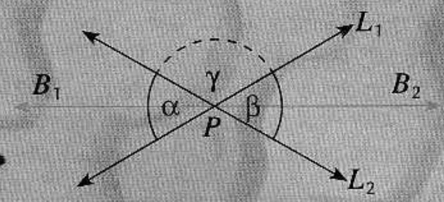
Para realizar una demostración en geometría, frecuentemente se dibuja una figura; luego, la hipótesis y la tesis se escriben en símbolos de acuerdo con la figura:



Hipótesis:
α y β son las medidas de dos ángulos opuestos por el vértice.

Tesis: $\alpha = \beta$

7. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son semirrectas opuestas, es decir, son partes de una misma recta.



Hipótesis:
$\alpha = \beta$ son ángulos opuestos por el vértice, formados por las rectas L_1 y L_2.

$\overrightarrow{PB_1}$ bisectriz de α

$\overrightarrow{PB_2}$ bisectriz de β

Tesis:

$\overrightarrow{PB_1}$ y $\overrightarrow{PB_2}$ son semirrectas opuestas.

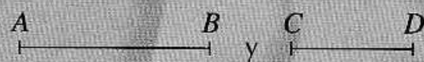
Demostración:

1. El ángulo γ es el suplemento de α y de β (forman pares lineales)
2. Luego: $\alpha + \gamma = 180°$
   $\beta + \gamma = 180°$
3. Sumando: $\alpha + \beta + 2\gamma = 360°$
4. Las rectas L_1 y $\overrightarrow{PB_1}$ se intersectan en P, formando el ángulo de medida $\frac{\alpha}{2}$.
5. Las rectas L_2 y $\overrightarrow{PB_2}$ se intersectan en P, formando el ángulo de medida $\frac{\beta}{2}$.
6. Dividiendo por 2 en el paso 3:
   $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 180°$
7. Por lo tanto, $\overrightarrow{PB_1}$ y $\overrightarrow{PB_2}$ forman un ángulo extendido.
8. Luego, $\overrightarrow{PB_1}$ y $\overrightarrow{PB_2}$ son semirrectas opuestas.

8. Dados dos segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, construir segmentos que midan:

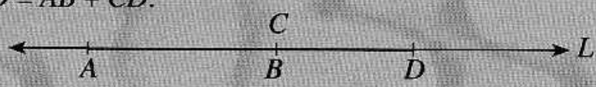
a) $AB + DC$ b) $AB - CD$ c) $2AB$ d) $\frac{AB}{2}$

Sean los segmentos:



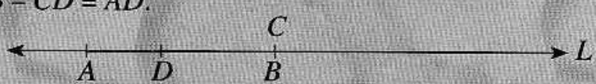
a) Construcción del segmento de medida $AB + DC$ (suma de segmentos).

1. Se dibuja la recta L.
2. Se fija en L un punto A.
3. $\odot(A, AB)$ se copia $\overline{AB}$ sobre L.
4. $\odot(B, CD)$ se copia $\overline{CD}$ sobre L a continuación de $\overline{AB}$.
5. $AD = AB + CD$.



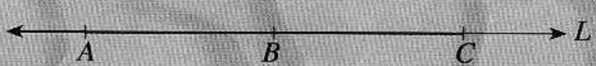
b) Construcción del segmento de medida $AB - CD$, con $AB > CD$

1. Se dibuja la recta L.
2. Se fija en L un punto A.
3. $\odot(A, AB)$ determina B sobre L ($\overline{AB}$ copiado).
4. $\odot(B, CD)$ determina D sobre L, pero en sentido contrario al usado para copiar $\overline{AB}$.
5. $AB - CD = AD$.



c) Construcción del segmento de medida $2AB$.

1. Se dibuja una recta L.
2. Se fija en L un punto A.
3. Se copia $\overline{AB}$ dos veces, una a continuación de la otra, determinando C.
4. $AC = 2AB$.

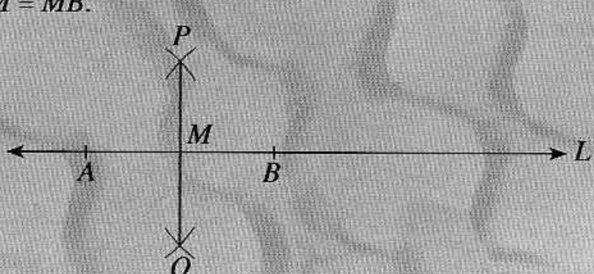


d) Construcción del segmento de medida $\frac{AB}{2}$ (bisectar un segmento)

1. Se dibuja una recta L.
2. Se copia el segmento $\overline{AB}$ en L.
3. $\odot(A, r) \cap \odot(B, r) = \{P, Q\}$.

   $\left(r = \text{cualquier radio mayor que } \frac{AB}{2}\right)$.

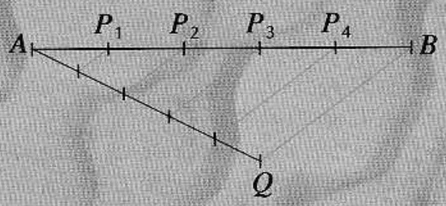
4. $\overleftrightarrow{PQ} \cap AB = \{M\}$ (M es punto medio)
5. $AM = MB$.



9. Dividir un segmento dado $\overline{AB}$ en n partes de igual medida.

Consideraremos $n = 5$. Sea $\overline{AB}$ el segmento que se desea dividir.

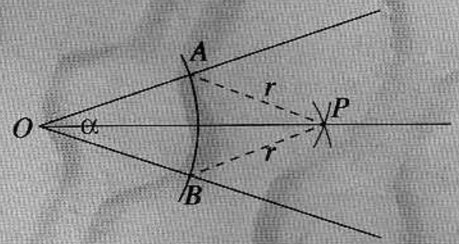
1. Se copia $\overline{AB}$.
2. Desde el extremo A, con cualquier ángulo, se traza un segmento $\overline{AQ}$ señalando en él 5 unidades cualesquiera.
3. Se une el extremo Q de $\overline{AQ}$ con el punto B (extremo libre del segmento $\overline{AB}$).
4. Se trazan paralelas a $\overline{BQ}$ por cada uno de los puntos que indican las unidades señaladas en $\overline{AQ}$.
5. P_1, P_2, P_3, P_4 son las intersecciones de cada paralela con $\overline{AB}$ y marcan los puntos de división del segmento $\overline{AB}$ en cinco partes de igual medida.



10. Construir la bisectriz de un ángulo dado.

Sea O el vértice del ángulo dado α.

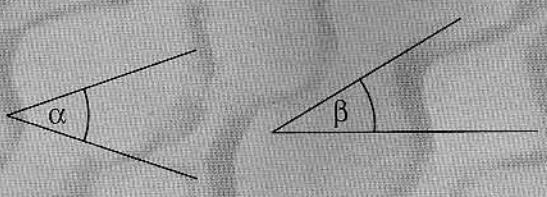
1. Desde el punto O, con radio r (cualquiera) se describe un arco de circunferencia, determinando los puntos A y B sobre los lados del ángulo.
2. Desde el punto A, con radio r, se describe un arco de circunferencia.
3. Desde el punto B, con el mismo radio r, se describe un arco de circunferencia que intersecte al anterior.
4. $\odot(A, r) \cap \odot(B, r) = \{P\}$.
5. $\overrightarrow{OP}$ es la bisectriz pedida.



11. Sean α y β dos ángulos dados con $\alpha > \beta$. Construir ángulos de medida:

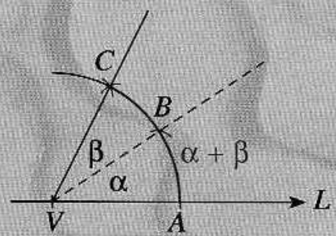
a) $\alpha + \beta$ b) 2α c) $\alpha - \beta$ d) $\frac{\alpha}{2}$ (bisectriz de un ángulo)

Sean los ángulos:



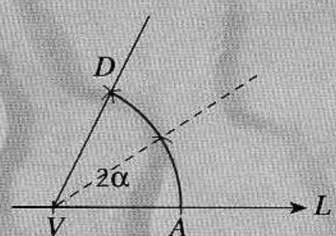
a) Construcción de $\alpha + \beta$ (Suma de ángulos).

1. Se marcan arcos en ambos ángulos con el mismo radio r.
2. Se dibuja una recta L.
3. Se fija un punto V sobre L, que será el vértice.
4. $\odot(V, r) \cap L = \{A\}$.
5. Desde A se copia α, determinando B.
6. Desde B y a continuación se copia β, determinando C.
7. $\measuredangle CVA = \alpha + \beta$.



b) Construcción de 2α (Duplicación de un ángulo).

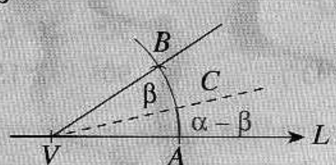
1. Se dibuja una recta L.
2. Se fija un punto V sobre L, que será el vértice.
3. $\odot(V, r) \cap L = \{A\}$.
4. Desde A se copia 2 veces α sobre la circunferencia, determinando D.
5. $\measuredangle AVD = 2\alpha$.



(en la misma forma se continúa para obtener 3α, 4α, 5α, etc.)

c) Construcción de $\alpha - \beta$ (Diferencia de ángulos).

1. Se marcan arcos en α y en β con el mismo radio r.
2. Se dibuja una recta L.
3. Se fija un punto V sobre L, que será el vértice.
4. $\odot(V, r) \cap L = \{A\}$
5. Desde A se copia α, determinando B.
6. Desde B y en sentido contrario se copia β, determinando C.
7. $\measuredangle CVA = \alpha - \beta$



d) Construcción de $\frac{\alpha}{2}$ (bisectriz de un ángulo). Ver ejercicio 10.

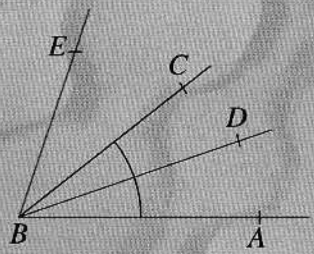
12. Sean ABC un ángulo y $\overrightarrow{BD}$ su bisectriz. Sea $\overrightarrow{BE}$ una semirrecta en el exterior del $\sphericalangle ABC$. Probar que: $2\sphericalangle DBE = \sphericalangle EBC + \sphericalangle EBA$.

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle EBD + \sphericalangle DBA$$
$$\sphericalangle EBC = \sphericalangle EBD - \sphericalangle CBD$$

Sumando: $\sphericalangle EBA + \sphericalangle EBC = 2\sphericalangle DBE + \sphericalangle DBA - \sphericalangle CBD$

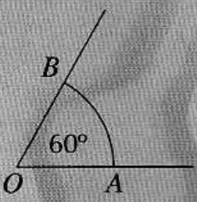
como $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBD$ (BD bisectriz)

se tiene: $\sphericalangle EBA + \sphericalangle EBC = 2\sphericalangle DBE$



13. Construir un ángulo de 60°.

1. Se traza una semirrecta $\overrightarrow{OA}$.
2. Se describe $\odot(O, OA)$.
3. $\odot(O, OA) \cap \odot(A, OA) = \{B\}$.
4. $\sphericalangle AOB = 60°$



$\triangle AOB$ es equilátero: $OA = OB = r$ y $AB = r$, por construcción.

Ejercicios

1. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $23° 12' 53'' + 17° 39' 12''$
b) $120° 3'' - 32° 16' 15''$
c) $12° 9' 45'' + 35° 55' 17''$
d) $55° 26' 15'' - 17° 17''$
e) $118° 16' 54'' + 2(6° 12' 43'')$
f) $180° - 145° 12' 15''$
g) $90° - 45° 23' 44''$
h) $180° - 15' 12''$
i) $90° - 26° 6''$
j) $90° - 32°15'$

2. Si $\alpha = 20° 30' 16''$ y $\beta = 53° 53' 15''$, hallar:

a) $\alpha + 2\beta$
b) $\beta - \alpha$
c) 2α
d) $3\alpha - \beta$
e) $5\beta - 3\alpha$

3. Hallar el complemento y el suplemento de los siguientes ángulos:

a) 85° 12′ 6″ g) $\frac{\pi}{3}$ m) 2π

b) 32° 25′ 14″ h) $\frac{\pi}{6}$ n) $\frac{9\pi}{10}$

c) 125° i) $\frac{\pi}{4}$ o) 3,5 rad

d) 48° 14′ j) $\frac{\pi}{18}$ p) 2 rad

e) 12° 6″ k) $\frac{2\pi}{3}$ q) 0,3 rad

f) 73° 2′ 53″ l) $\frac{5\pi}{6}$ r) $\frac{3}{4}$ rad

4. Hallar el doble, el triple y la mitad de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 16° 25′ 12″ d) π

b) 3° 5′ 3″ e) $\frac{2\pi}{3}$

c) 144° 12′ 5″ f) $\frac{\pi}{4}$

5. Expresar los siguientes ángulos como grados y fracción de grados:

a) 25° 12′ d) 17° 32′ 15″

b) 132° 53′ e) 24° 12′ 12″

c) 15° 30′ f) 5° 1′ 1″

6. Expresar los siguientes ángulos en términos de grados, minutos y segundos:

a) 25,5° d) 15,9°

b) 143,36° e) 95,3°

c) 14,124° f) 27,03°

7. Expresar los siguientes ángulos en radianes:

a) 30° f) 40° 25′ 15″

b) 120° g) 15° 3′ 6″

c) 270° h) 44,6°

d) 45° i) 120,5°

e) 60° j) 135°

8. Expresar los siguientes ángulos en grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{8}$ i) $\frac{7\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{3\pi}{4}$ j) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{6}$ g) $\frac{5\pi}{3}$ k) 3,2 rad

d) $\frac{\pi}{4}$ h) 2π l) 2,5 rad

9. En las siguientes proposiciones, indicar cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

a) Si un número termina en cero, entonces es divisible por 10.

b) Si un número es divisible por 10, entonces termina en cero.

c) Dos ángulos de la misma naturaleza (ambos agudos o ambos obtusos) con sus lados respectivamente perpendiculares tienen medidas iguales.

d) Los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo.

e) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.

f) Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos tienen medidas iguales.

g) Si dos rectas al ser intersectadas por una transversal producen ángulos alternos internos de igual medida, las rectas son paralelas.

h) Dados dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso, si tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios.

i) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

j) Dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal, las bisectrices de dos ángulos internos del mismo lado de la transversal se intersectan formando un ángulo recto.

k) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares.

l) Si desde un punto fuera de una recta se trazan oblicuas a la recta cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular trazada desde el mismo punto, las oblicuas forman ángulos de igual medida con la perpendicular.

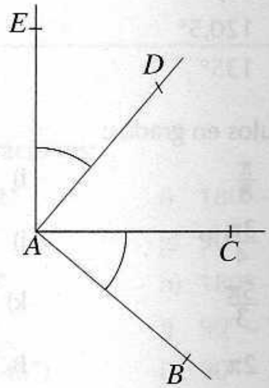
10. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios forman un ángulo recto.

11. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes complementarios forman un ángulo de 45°.

12. Sean α y β las medidas de dos ángulos adyacentes. Demostrar que el ángulo formado por sus bisectrices mide $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

13. En la figura $\overline{EA} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DA} \perp \overline{AB}$.

Demostrar que $m(\measuredangle EAD) = m(\measuredangle CAB)$.



14. Sean $\overline{AB}$ un segmento y M su punto medio; si P está en la prolongación de $\overline{AB}$, probar que $MP = \frac{PA + PB}{2}$.

15. Si M es punto medio del segmento $\overline{AB}$ y P es un punto del interior de $\overline{AB}$, probar que:
$MP = \dfrac{|PA - PB|}{2}$

16. Sean $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ y $\overline{PB}$ segmentos consecutivos de una misma recta tales que $AM = x$, $MN = 2x$, $NP = PB = x + 1$ y $AB = 17$. Hallar la medida de cada uno.

17. Dado un segmento $AB = 50$ cm. Desde sus extremos se marcan P y Q en $\overline{AB}$ tales que $AP = BQ = 2QR$. Siendo R un punto entre P y Q tal que $PR = AP + 1$, hallar la medida de todos los segmentos.

18. Sean $\overline{PQ}$ un segmento y R un punto interior tal que $PQ = 5PR$ y $RQ = 20$ cm. Hallar la medida de $\overline{PQ}$.

19. Sean $\overline{AB}$ un segmento y P un punto fuera de él, en la misma recta, tal que $AB = 3BP + 1$. Si $AP = a$, ¿cuánto mide AB?

20. Sean α y β ángulos adyacentes suplementarios tales que $\beta = 3\alpha$. Hallar la medida de cada uno.

21. Sean α, β y γ ángulos adyacentes tales que forman un ángulo extendido. Si $\beta = 3\alpha$ y $\gamma = 2\beta$, hallar la medida de cada uno.

22. Sean α, β, γ y δ ángulos adyacentes tales que su suma es $\frac{3\pi}{2}$. Si $\alpha = 3\beta$ y $\gamma + \delta = 3\alpha$, ¿qué se puede decir de la medida de cada uno de los ángulos?

23. Sean ABC un ángulo, $\overrightarrow{BD}$ su bisectriz y $\overrightarrow{BE}$ una semirrecta interior del $\sphericalangle ABC$. Probar que $2m(\sphericalangle DBE) = m(\sphericalangle EBC) - m(\sphericalangle EBA)$.

24. Sean ABC un ángulo y $\overline{BD}$ su bisectriz. Si $\overline{PQ} \perp \overline{BD}$ en B, quedando B entre P y Q, probar que:
$m(\sphericalangle PBC) = m(\sphericalangle QBA)$

25. Construir una perpendicular a una recta en un punto dado de la recta.

26. Construir una perpendicular a una recta dada desde un punto fuera de ella.

27. Construir una paralela a una recta por un punto dado fuera de ella.

28. Construir un ángulo de 45°.

29. Construir un ángulo de 135°.

30. Construir un ángulo de 30°.

31. Trisectar el ángulo de 90°.

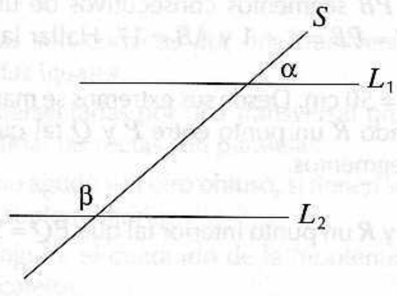
32. Construir un ángulo de 120°.

33. Construir un ángulo de 15°.

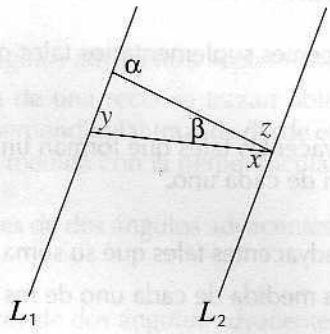
34. Construir un ángulo de 75°.

35. Construir un ángulo de 127,5°.

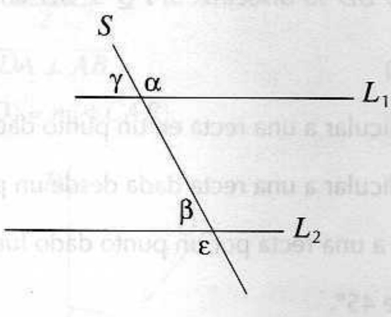
36. En la figura siguiente, $L_1 \parallel L_2$, S secante. Hallar el valor de x y la medida de los ángulos α y β, sabiendo que $\alpha = 2x + 5$ y $\beta = 3x$.



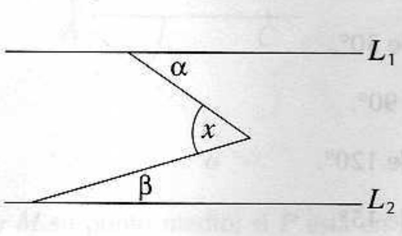
37. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, $\alpha = 96°$ y $\beta = 20°$. Hallar la medida de los ángulos x, y y z.



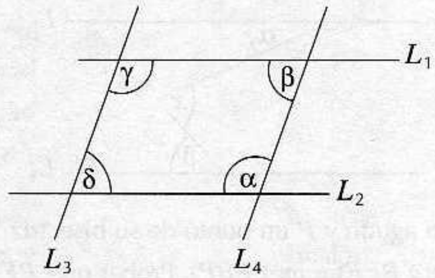
38. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, S secante. Si $\alpha = 2x + 35°$ y $\beta = x + 25°$, hallar la medida de α, β, γ y ε.



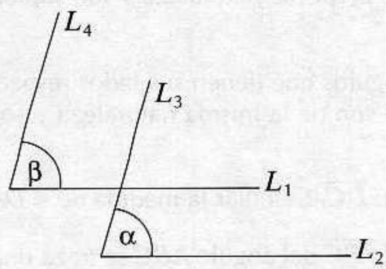
39. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, $\alpha = 35°$ y $\beta = 16°$. Hallar la medida del ángulo x.



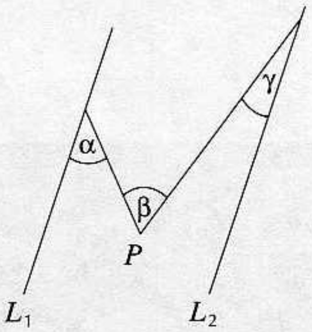
40. En la figura, $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$. Si $\alpha = 110°$, hallar las medidas de β, γ, y δ.



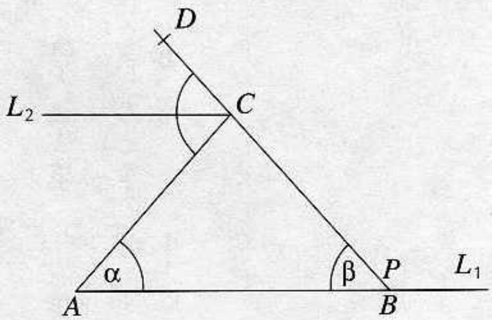
41. En la figura, $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$. Probar que $\alpha = \beta$.



42. En la figura, $\alpha = 42°$, $\beta = 60°$ y $\gamma = 18°$. Probar que $L_1 \parallel L_2$.
(Sugerencia: Trazar por P una recta paralela a L_1).

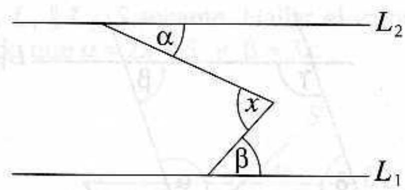


43. En la figura, $\alpha = \beta$ y $L_1 \parallel L_2$. Probar que L_2 es bisectriz del $\measuredangle DCA$.



44. En la misma figura anterior, con $\alpha = \beta$ y $\measuredangle DCA = \alpha + \beta$. Si L_2 es bisectriz del $\measuredangle DCA$, probar que $L_1 \parallel L_2$.

45. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Probar que x es igual a la suma de $\alpha + \beta$.



46. Sean ABC un ángulo agudo y P un punto de su bisectriz. Trazar la recta $\overleftrightarrow{PF}$, con $F \in \overrightarrow{BA}$ y tal que $m(\measuredangle BPF) = m(\measuredangle FBP)$. Probar que $\overleftrightarrow{PF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

47. Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos tienen igual medida si son de la misma naturaleza y son suplementarios si son de distinta naturaleza.

48. Demostrar que dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares tienen igual medida si son de la misma naturaleza y son suplementarios si son de distinta naturaleza.

49. Sean $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DA} \perp \overline{DC}$. Calcular la medida de $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD$.

50. Por un punto D del lado $\overline{BC}$ del ángulo ABC se traza una perpendicular $\overline{DE} \perp \overline{BC}$; E es el punto de intersección con el lado $\overline{BA}$. En E se traza $\overline{EF} \perp \overline{BA}$; $F \in \overline{BC}$. ¿Qué se puede decir del $\measuredangle ABC$, del $\measuredangle DEF$ y del $\measuredangle DFE$? ¿Por qué?

Soluciones

1. a) 40° 52′ 5″
b) 87° 43′ 48″
c) 48° 5′ 2″
d) 38° 25′ 58″
e) 130° 42′ 20″
f) 34° 47′ 45″
g) 44° 36′ 16″
h) 179° 44′ 48″
i) 63° 59′ 54″
j) 57° 45′

2. a) 128° 16′ 46″
b) 33° 22′ 59″
c) 41° 32″
d) 7° 37′ 33″
e) 207° 55′ 27″

3. a) 4° 47′ 54″ ; 94° 47′ 54″
b) 57° 34′ 46″ ; 147° 34′ 46″
c) No tiene ; 55°
d) 41° 46′ ; 131° 46′
e) 77° 59′ 54″ ; 167° 59′ 54″
f) 16° 57′ 7″ ; 106° 57′ 7″
g) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$
h) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$
i) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$
j) $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{17\pi}{18}$
k) No tiene ; $\frac{\pi}{3}$
l) No tiene ; $\frac{\pi}{6}$
m) No tiene ; No tiene

n) No tiene ; $\frac{\pi}{10}$

o) No tiene ; No tiene

p) No tiene ; 1,14 rad

q) 1,27 rad ; 2,84 rad

r) 0,82 rad ; 2,39 rad

4. a) 32° 50′ 24″ ; 49° 15′ 36″ ; 8° 12′ 36″

b) 6° 10′ 6″ ; 9° 15′ 9″ ; 1° 32′ 31,5″

c) 288° 24′ 10″ ; 432° 36′ 15″ ; 72° 6′ 2,5″

d) 2π ; 3π ; $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{4\pi}{3}$; 2π ; $\frac{\pi}{3}$

f) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8}$

5. a) 25,2°

b) $132{,}88\overline{3}°$

c) 15,5°

d) 17,5375°

e) $24{,}20\overline{3}°$

f) $5{,}0169\overline{4}°$

6. a) 25° 30′

b) 143° 21′ 36″

c) 14° 7′ 26,4″

d) 15° 54′

e) 95° 18′

f) 27° 1′ 48″

7. a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{3}$

f) 0,7

g) 0,263

h) 0,78

i) 2,1

j) $\frac{3\pi}{4}$

8. a) 60°

b) 90°

c) 30°

d) 45°

e) 22,5°

f) 135°

g) 300°

h) 360°

i) 420°

j) 150°

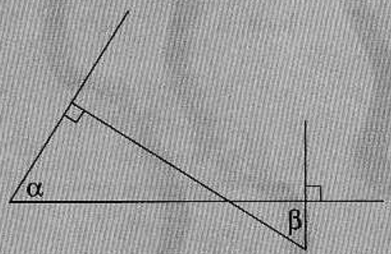
k) 183,35°

l) 143,24°

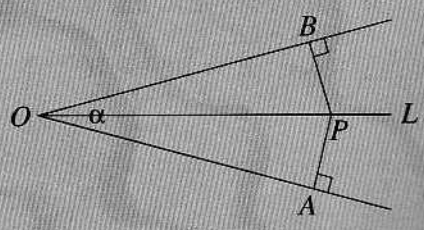
9. a) Sea n un número. Hipótesis: n termina en 0. Tesis: n es divisible por 10.

b) Sea n un número. Hipótesis: n es divisible por 10. Tesis: n termina en 0.

c) Hipótesis: α y β son ángulos de la misma naturaleza que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.
Tesis: $\alpha = \beta$

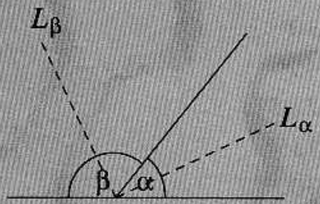


d) Hipótesis: $P \in L$ bisectriz de α.
Tesis: $PA = PB$ (A y B son el pie de la perpendicular trazada desde P a ambos lados del ángulo).



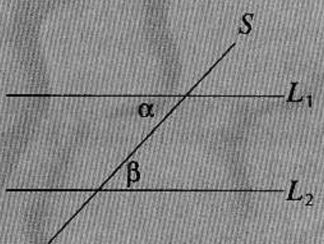
e) Hipótesis: $\alpha + \beta$ son dos ángulos adyacentes y suplementarios; L_α y L_β son sus respectivas bisectrices.

Tesis: $L_\alpha \perp L_\beta$.

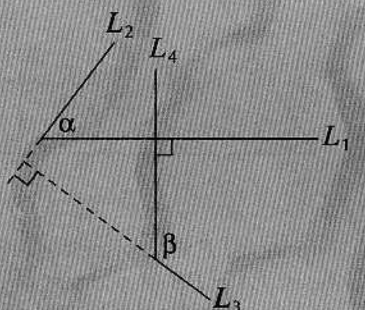


f) Hipótesis: $L_1 \parallel L_2$; S secante; α y β ángulos alternos internos.
Tesis: $\alpha = \beta$.

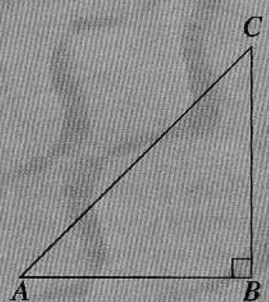
g) Hipótesis: α y β ángulos alternos internos; $\alpha = \beta$.
Tesis: $L_1 \parallel L_2$.



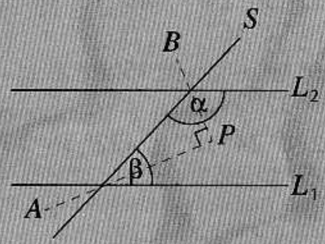
h) Hipótesis: α ángulo agudo de lados L_1 y L_2; β ángulo obtuso de lados L_3 y L_4; $L_2 \perp L_3$; $L_4 \perp L_1$.
Tesis: $\alpha + \beta = 180°$.



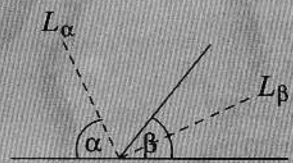
i) Hipótesis: ABC triángulo rectángulo en B.
Tesis: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.



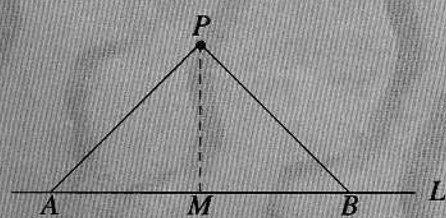
j) Hipótesis: $L_1 \parallel L_2$; S transversal; α y β ángulos internos del mismo lado de la transversal; $\overrightarrow{AP}$ bisectriz de α, $\overrightarrow{BP}$ bisectriz de β.
Tesis: $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$.



k) Hipótesis: α y β ángulos adyacentes sumplementarios; L_α bisectriz de α; L_β bisectriz de β.
Tesis: $L_\alpha \perp L_\beta$.



l) Hipótesis: L recta; $P \notin L$; $\overline{PM} \perp L$ en M; $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ oblicuas con A y B en L; $AM = BM$.
Tesis: $\measuredangle APM = \measuredangle BPM$.



16. $AM = 3$; $MN = 6$; $NP = PB = 4$.

17. $AP = BQ = 14$ cm; $QR = 7$ cm; $PR = 15$ cm

18. $PQ = 25$ cm

19. $AB = \dfrac{3a+1}{4}$

20. $\alpha = 45°$; $\beta = 135°$

21. $\alpha = 18°$; $\beta = 54°$; $\gamma = 108°$

22. $\alpha = 62{,}31°$; $\beta = 20{,}77°$; $\gamma + \delta = 186{,}92°$

36. $x = 35°$; $\alpha = 75°$; $\beta = 105°$
37. $x = 76°$; $y = 76°$; $z = 84°$
38. $\alpha = \varepsilon = 115°$; $\beta = \gamma = 65°$
39. $x = 51°$
40. $\gamma = 110°$; $\delta = \beta = 70°$
49. $180°$
50. $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DEF)$ tiene lados respectivamente perpendiculares si $\sphericalangle ABC$ es agudo;
$m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle DEF) = 180°$ si $\sphericalangle ABC$ es obtuso.
$m(\sphericalangle DFE) + m(\sphericalangle ABC) = 90°$

EUCLIDES

(?, h. 330 a.C.-?, h. 275 a.C.)

Matemático griego. Poco se conoce a ciencia cierta de la vida de quien fuera el matemático más famoso de la Antigüedad. Se educó probablemente en Atenas, lo que explicaría con su buen conocimiento de la geometría elaborada en la escuela de Platón, aunque no parece que estuviera familiarizado con las obras de Aristóteles. La tradición ha conservado una imagen de Euclides como hombre de notable amabilidad y modestia, y ha transmitido así mismo una anécdota relativa a su enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje; Euclides, tras explicarle que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma, ordenó a su esclavo que diera unas monedas al muchacho, dado que éste tenía la pretensión de obtener algún provecho de sus estudios. Fue autor de diversos tratados, pero su nombre se asocia principalmente a uno de ellos, los "Elementos". Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores, que las superó de inmediato por su plan general y la magnitud de su propósito. De los trece libros que la componen, los seis primeros corresponden a lo que se entiende todavía como geometría elemental; recogen las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se consideran ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas, e incluyen también la teoría general de la proporción. Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas y los tres restantes se ocupan de geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas. Euclides estableció lo que, a partir de su contribución, había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados. En el caso de los Elementos, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas o nociones comunes. La naturaleza y el alcance de dichos principios han sido objeto de frecuente discusión a lo largo de la historia, en especial por lo que se refiere a los postulados y, en particular, al quinto (postulado de las paralelas). Su condición distinta respecto de los restantes postulados fue ya percibida desde la misma Antigüedad, y hubo diversas tentativas de demostrarlo como teorema; los esfuerzos por hallarle una demostración prosiguieron hasta el siglo XIX, cuando se puso de manifiesto que era posible definir geometrías consistentes, llamadas «no euclidianas», en las que no se cumpliera la existencia de una única paralela trazada a una recta por un punto exterior a ella.

Prueba de selección múltiple

1. De las siguientes afirmaciones son falsas:

I. La suma de los ángulos adyacentes alrededor de un punto vale siempre cuatro ángulos rectos.
II. Los ángulos adyacentes formados a un lado de una recta suman siempre 180º.
III. Dos rectas de un plano, perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Ninguna

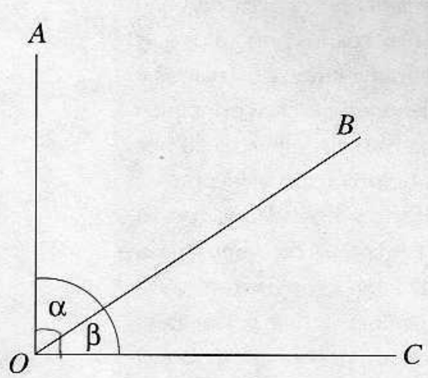
2. De estas afirmaciones son verdaderas:

I. La suma de los ángulos adyacentes suplementarios equivale a un ángulo extendido.
II. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
III. Dos ángulos son suplementarios si la suma de ellos es igual a 180º.

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

3. Si $\overline{AO} \perp \overline{OC}$, se afirma que:

I. α y β son complementarios
II. $\alpha + \beta = 90º$
III. α es el suplemento de β



De estas afirmaciones son verdaderas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo II y III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

4. Se afirma que:

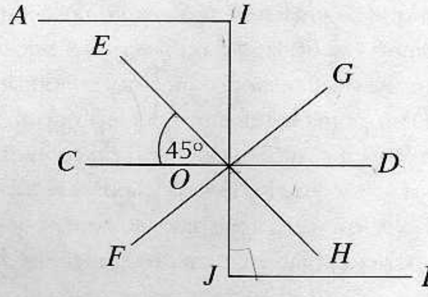
I. $0º <$ ángulo agudo $< 90º$
II. $0º <$ ángulo obtuso $< 180º$
III. $90º <$ ángulo extendido $< 180º$

De estas afirmaciones son falsas:

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo I y III
D. Sólo II y III
E. I, II y III

5. Si $\overline{AI} \parallel \overline{JB}$, $\overline{IJ} \perp \overline{JB}$, $m\measuredangle COE = 45º$, se afirma que en la figura:

I. $m\measuredangle OIA = 90º$
II. $m\measuredangle GOD = 45º$
III. $m\measuredangle DOH = m\measuredangle COE$

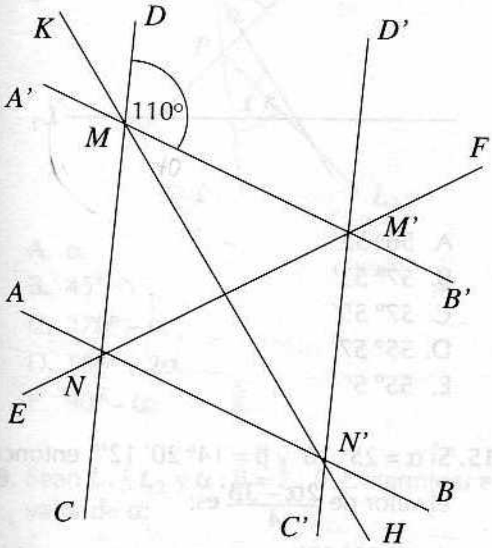


De estas afirmaciones es(son) verdadera(s).

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo I y III
D. I, II y III
E. Ninguna

6. Si $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \overline{CD} \parallel \overline{C'D'}, m\sphericalangle DMM' = 110°$, se afirma que en la figura:

I. $m\sphericalangle M'MN = 70°$
II. $m\sphericalangle KMD = 30°$
III. $m\sphericalangle ENA = 110°$



De estas afirmaciones es(son) falsa(s):

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo II y III
D. Sólo I y III
E. I, II y III X

7. Se afirma que:

I. Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a dicha recta.
II. Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
III. Dos ángulos internos de distinto lado de la transversal entre paralelas son complementarios.

De estas afirmaciones son verdaderas.

A. Sólo I y II
B. Sólo II y III
C. Sólo I y III
D. I, II y III
E. Ninguna

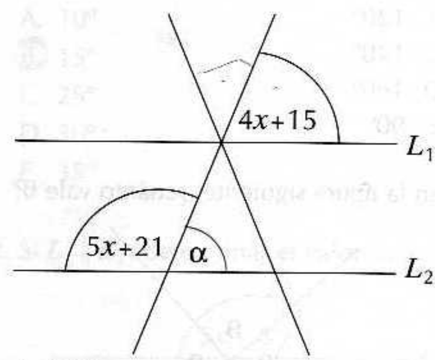
8. Se afirma que:

I. Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son complementarios.
II. Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales.
III. Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales.

¿Cuál(es) de las afirmaciones es(son) verdadera(s)?

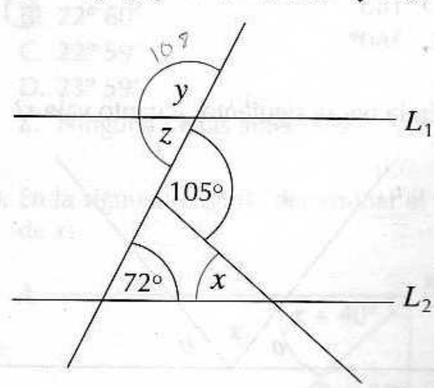
A. Sólo I y II
B. Sólo II y III
C. Sólo I y III
D. I, II y III
E. Ninguna

9. Si $L_1 \parallel L_2$, ¿cuánto vale α?



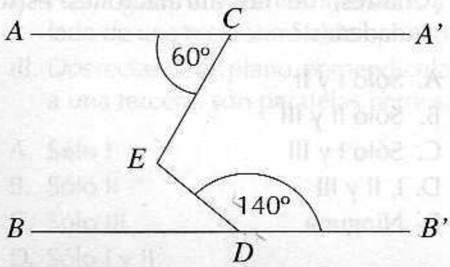
A. 35°
B. 45°
C. 16°
D. 59°
E. 79°

10. Sea $L_1 \parallel L_2$, ¿cuánto vale $2x - y + z$?



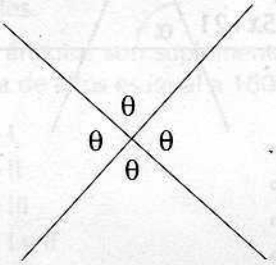
A. 180°
B. 30°
C. 40°
D. 50°
E. 230°

11. Se tienen dos rectas paralelas, $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$. Sobre $\overleftrightarrow{AA'}$ se elige un punto C y sobre $\overleftrightarrow{BB'}$ se elige un punto D, los cuales se unen con un punto E situado entre las paralelas. Hallar la medida del $\sphericalangle CED$ sabiendo que $\sphericalangle ACE = 60°$ y $\sphericalangle EDB' = 140°$.



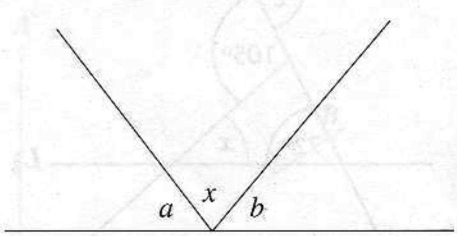
A. 100°
B. 120°
C. 140°
D. 160°
E. 90°

12. En la figura siguiente, ¿cuánto vale θ?



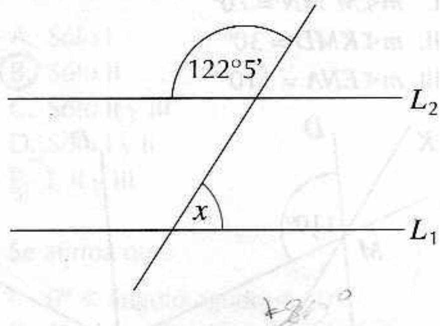
A. 45°
B. 60°
C. 90°
D. 180°
E. 360°

13. En la figura siguiente, ¿cuánto vale x?



A. $180° - (a + b)$
B. $180° - a + b$
C. $180° + a + b$
D. $180° + a - b$
E. $180° - (a - b)$

14. En la figura siguiente, si $L_1 \| L_2$, ¿cuánto vale x?



A. 56° 52′
B. 57° 53′
C. 57° 55′
D. 55° 57′
E. 55° 5′

179° 60'
- 122° 5
57° 55'

15. Si $\alpha = 25° 10'$ y $\beta = 14° 20' 12''$, entonces el valor de $\frac{2\alpha - 3\beta}{4}$ es:

A. 1° 51′ 49″
B. 1° 49′ 12″
C. 1° 49′ 51″
D. 1° 49′
E. 1° 51′

2(25°10') - 3(14°2
50° 42°
90° 19

16. Hallar la medida del ángulo que, disminuido en su suplemento, es igual al triple de su complemento:

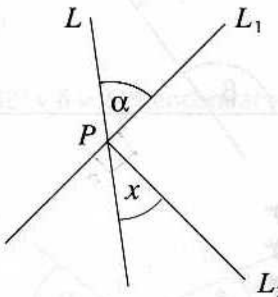
A. 22,5°
B. 45°
C. 60°
D. 90°
E. 180°

17. La diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es 6 veces la medida del ángulo. Determinar el suplemento del complemento del ángulo.

A. 15°
B. 75°
C. 90°
D. 105°
E. 165°

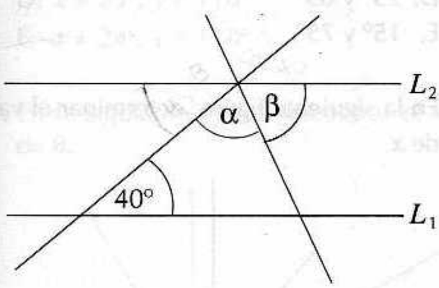
19

18. En la figura, $L_1 \perp L_2$ y P es su punto de intersección. La recta L pasa por P. Entonces x es igual:



A. α
B. $45°$
C. $270° - \alpha$
D. $180° - 2\alpha$
E. $90° - \alpha$

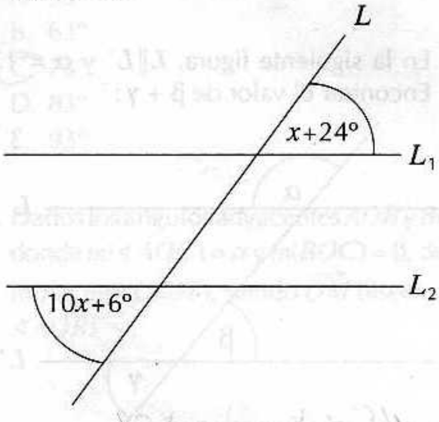
19. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $\alpha : \beta = 2 : 5$. Determinar el valor de α:



A. $20°$
B. $40°$
C. $50°$
D. $120°$
E. $100°$

$2\alpha + 3\alpha + 40 = 180$
$5\alpha = 140$
$\alpha = 28$

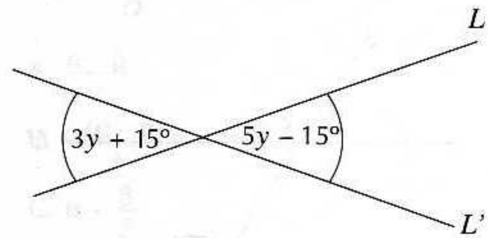
20. Si $L_1 \parallel L_2$ y L es secante, determinar el valor de x:



$10x + 6 = x + 24$
$10x - x = 24 - 6$
$9x = 18/9$
$x = 2$

A. $2°$
B. $3°$
C. $4°$
D. $27°$
E. $\left(\frac{150}{11}\right)°$

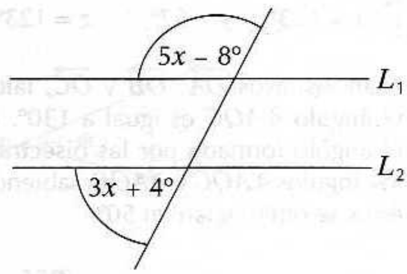
21. En la figura, determinar el valor de y:



A. $10°$
B. $15°$
C. $25°$
D. $30°$
E. $35°$

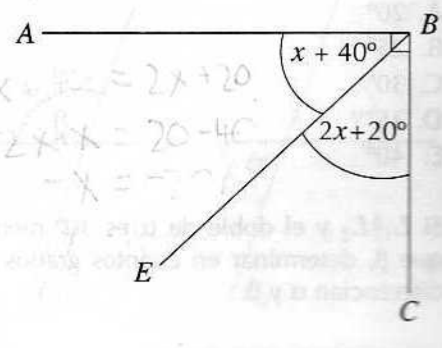
$3y - 5y = 15$

22. Si $L_1 \parallel L_2$, determinar el valor de x:



A. $23°\,60'$
B. $22°\,60'$
C. $22°\,59'$
D. $23°\,59'$
E. Ninguna de las anteriores

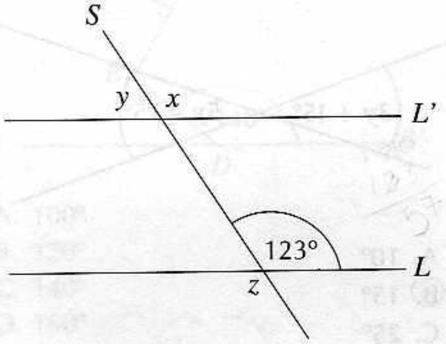
23. En la siguiente figura, determinar el valor de x:



$x + 40 = 2x + 20$
$-2x + x = 20 - 40$
$-x = -20$

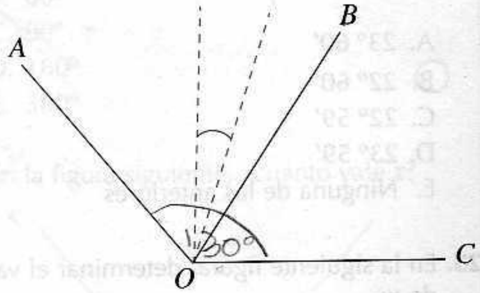
A. 50º
B. 40º
C. 30º
D. 20º
E. 10º

24. Si $L \| L'$, encontrar las medidas x, y y z de los ángulos que se indican en la figura:



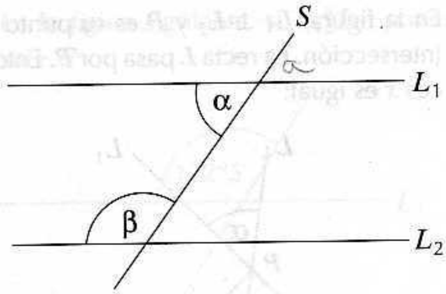
A. $x = 57°$; $y = 57°$; $z = 57°$
B. $x = 123°$; $y = 123°$; $z = 57°$
C. $x = 57°$; $y = 123°$; $z = 123°$
D. $x = 123°$; $y = 123°$; $z = 123°$
E. $x = 123°$; $y = 57°$; $z = 123°$

25. Sean los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, tales que el ángulo $\measuredangle AOC$ es igual a 130º. Hallar el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\measuredangle AOC$ y $\measuredangle AOB$, sabiendo que éstos se diferencian en 50º.



A. 20º
B. 25º
C. 30º
D. 35º
E. 40º

26. Si $L_1 \| L_2$ y el doble de α es 30º menor que β, determinar en cuántos grados se diferencian α y β.

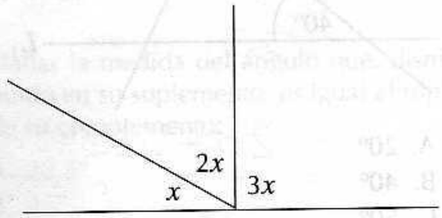


A. 50º
B. 60º
C. 80º
D. 130º
E. 180º

27. Encontrar la medida de dos ángulos complementarios cuya razón es 2 : 3.

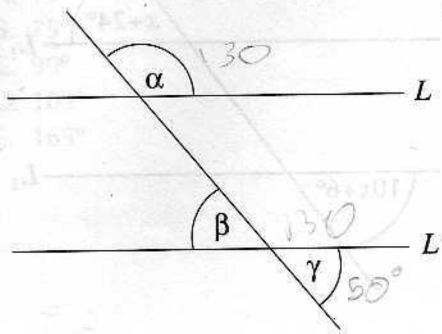
A. 43º y 47º
B. 36º y 54º
C. 36º y 45º
D. 25º y 65º
E. 15º y 75º

28. En la siguiente figura, determinar el valor de x.



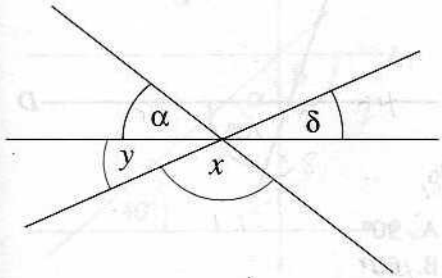
A. 30º
B. 45º
C. 60º
D. 65º
E. 90º

29. En la siguiente figura, $L \| L'$ y $\alpha = 130º$. Encontrar el valor de $\beta + \gamma$:



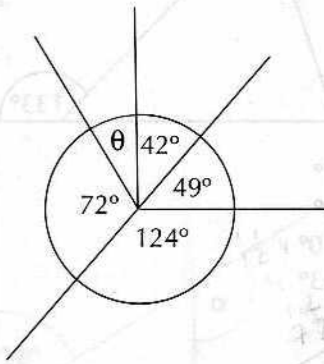
A. 50°
B. 75°
C. 100°
D. 130°
E. 140°

30. Si $\alpha = 38°$ y $\delta = 24°$, encontrar el valor de x e y.



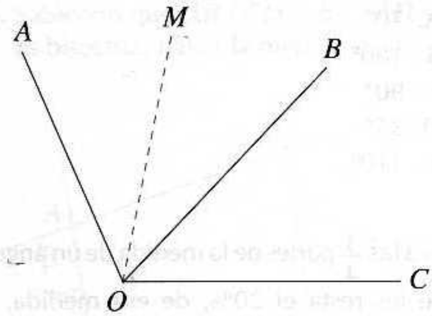
A. $x = 117°$, $y = 25°$
B. $x = 118°$, $y = 24°$
C. $x = 116°$, $y = 23°$
D. $x = 23°$, $y = 116°$
E. $x = 24°$, $y = 118°$

31. En la siguiente figura, encontrar el valor de θ.



A. 53°
B. 63°
C. 73°
D. 83°
E. 93°

32. Dados los ángulos adyacentes AOB y BOC, donde $m(\measuredangle AOC) = \alpha$ y $m(BOC) = \beta$, determinar $m(\measuredangle COM)$, siendo $\overrightarrow{OM}$ bisectriz de $\measuredangle AOB$.



A. $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

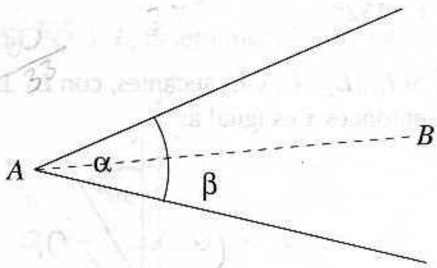
B. $\dfrac{-(\alpha - \beta)}{2}$

C. $\alpha + \dfrac{\beta}{2}$

D. $\dfrac{-(\alpha + \beta)}{2}$

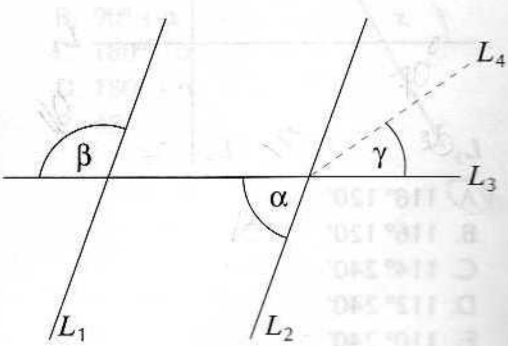
E. $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

33. Si $\alpha = 37°\ 90'\ 180''$ y $\overrightarrow{AB}$ es bisectriz de α, ¿cuánto mide el complemento de $(\alpha - 2\beta)$?



A. 270°
B. 0°
C. 180°
D. 90°
E. Ninguna de la anteriores

34. Si $L_1 \| L_2$, L_4 es bisectriz de α y $\gamma = 35°$, ¿cuánto mide el suplemento de β?



A. 70°
B. 180°
C. 90°
D. 35°
E. 110°

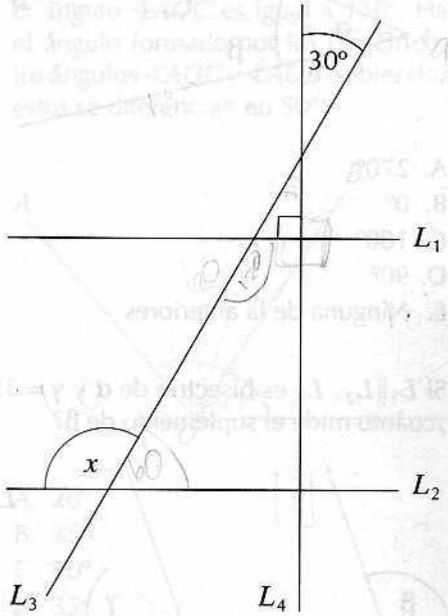
35. Si a las $\frac{3}{4}$ partes de la medida de un ángulo se les resta el 20%, de esa medida, se obtiene 110°. Determinar el complemento del 10% del ángulo.

A. 10°
B. 20°
C. 50°
D. 70°
E. 80°

36. Si el 25% de α es 5°30′ y el 40% de β es 52°, calcular $\alpha + \beta$.

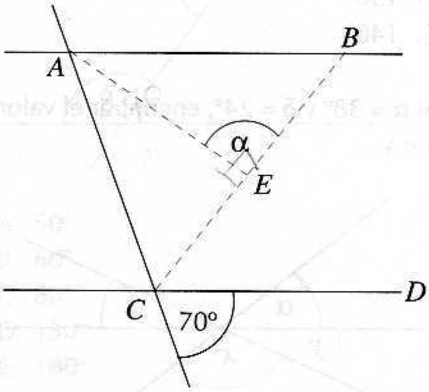
A. 22°
B. 40°
C. 92°
D. 130°
E. 152°

37. Si $L_1 \| L_2$, L_3 y L_4 secantes, con $L_4 \perp L_1$, entonces x es igual a:



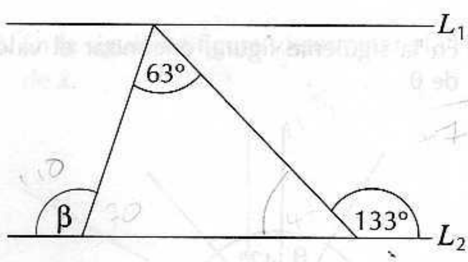
A. 118° 120′
B. 116° 120′
C. 114° 240′
D. 112° 240′
E. 110° 240′

38. Si $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AC}$ secante, $\overleftrightarrow{AE}$ bisectriz de $\measuredangle CAB$, $\overleftrightarrow{CE}$ bisectriz de $\measuredangle ACD$, determinar la medida de α.



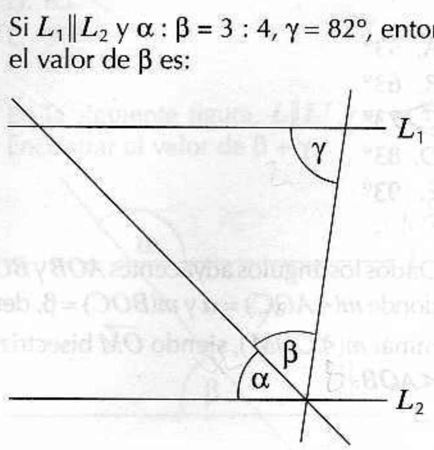
A. 90°
B. 60°
C. 45°
D. 30°
E. 15°

39. Si en la figura $L_1 \| L_2$, entonces el valor de β es:



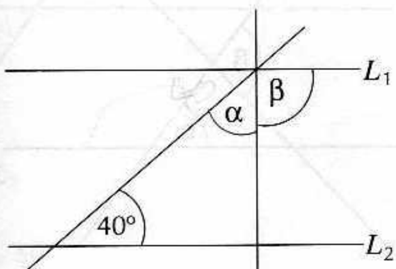
A. 47°
B. 70°
C. 110°
D. 133°
E. 147°

40. Si $L_1 \| L_2$ y $\alpha : \beta = 3 : 4$, $\gamma = 82°$, entonces el valor de β es:



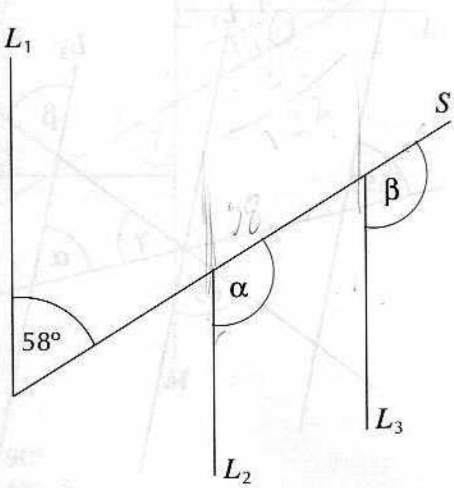
A. 66°
B. 56°
C. 36°
D. 26°
E. 42°

41. Si $L_1 \parallel L_2$ y $\alpha : \beta = 2 : 5$, determinar el valor de α.



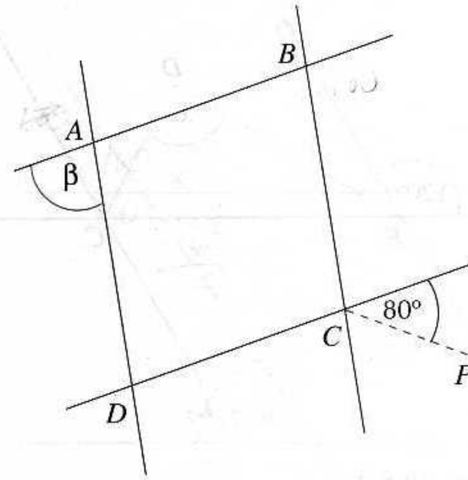
A. 30°
B. 70°
C. 50°
D. 90°
E. 40°

42. Si $L_1 \parallel L_2$, $L_2 \parallel L_3$ y S es secante a las rectas L_1, L_2 y L_3, determinar los valores de α y β.



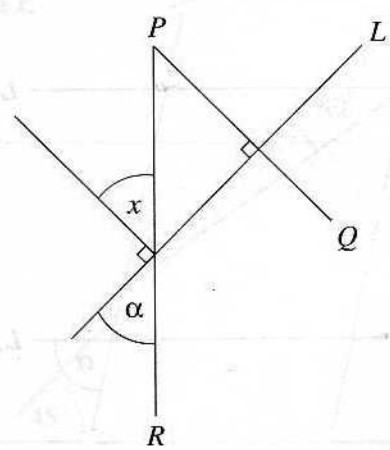
A. $\alpha = 122°$, $\beta = 132°$
B. $\alpha = 132°$, $\beta = 132°$
C. $\alpha = 132°$, $\beta = 122°$
D. $\alpha = 122°$, $\beta = 122°$
E. $\alpha = 58°$, $\beta = 58°$

43. Sabiendo que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CP}$ es bisectriz, hallar la medida de β.



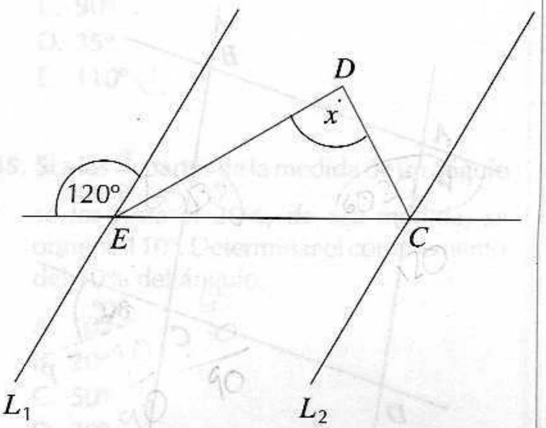
A. 60°
B. 80°
C. 20°
D. 35°
E. 40°

44. Si $\overleftrightarrow{PQ} \perp L$, determinar el valor de x.



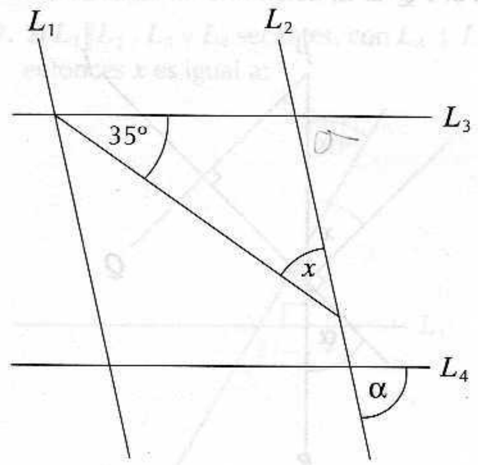
A. $90° - \alpha$
B. $90° + \alpha$
C. $180° - \alpha$
D. $180° + \alpha$
E. 45°

45. Sean $L_1 \parallel L_2$; $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{DE}$ bisectrices. Determinar el valor de x.



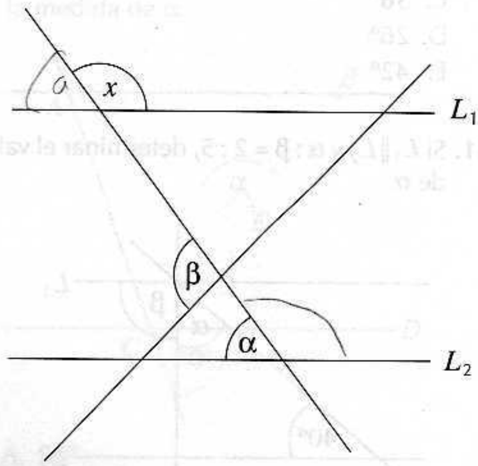
A. 100°
B. 92°
C. 88° 100′
D. 120° 90′
E. 88° 120′

46. Si $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$, ¿cuál es el valor de x en función de α?



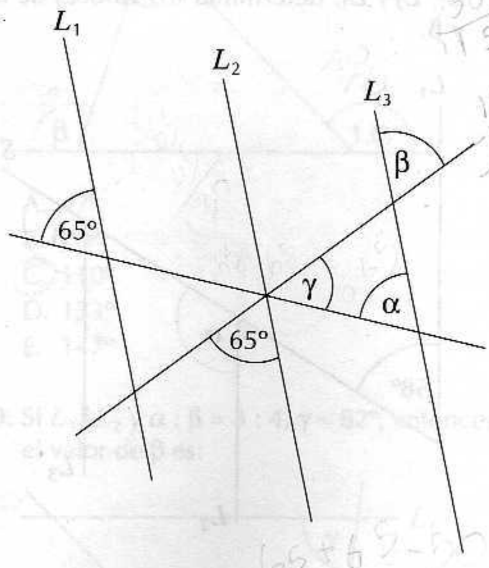
A. α + 35°
B. α + 180°
C. α − 35°
D. 180° − α
E. α − 180°

47. Si en la figura $L_1 \parallel L_2$, ¿cuál es el valor de x?



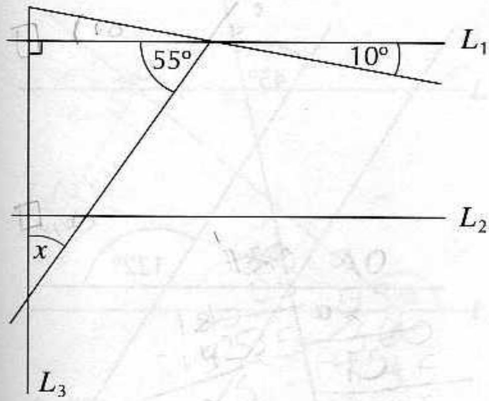
A. α + β
B. 180° − α + β
C. 180° − α
D. β − α
E. 180° − β

48. Sean $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determinar el valor de α + β − γ.



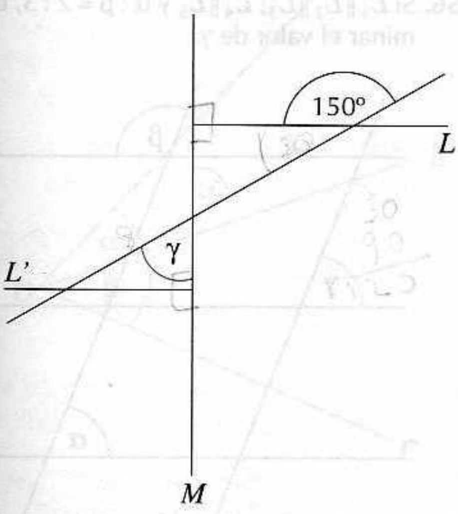
A. 80°
B. 90°
C. 150°
D. 65°
E. 85°

49. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \perp L_1$. Determinar el valor de x.



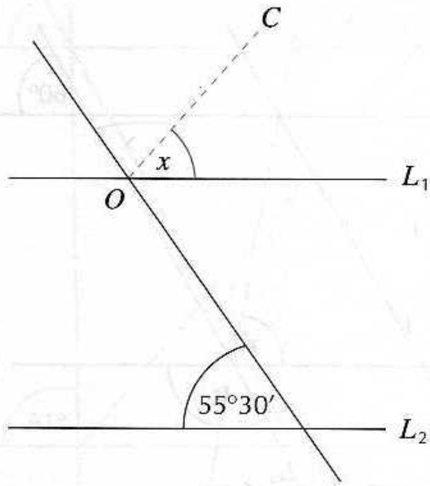
A. 50°
B. 45°
C. 40°
D. 10°
E. 35°

50. Sean $L \perp M$ y $L' \perp M$. Determinar el valor de γ.



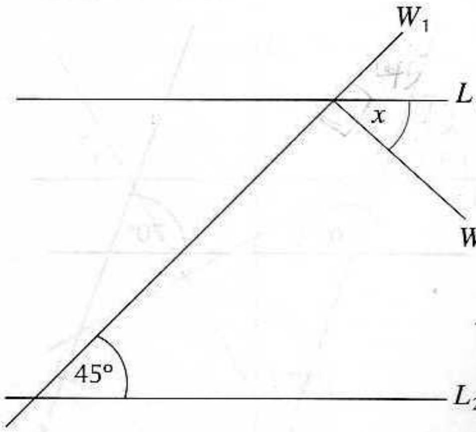
A. 90°
B. 60°
C. 30°
D. 40°
E. 45°

51. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $\overrightarrow{OC}$ bisectriz. Determinar el valor de x.



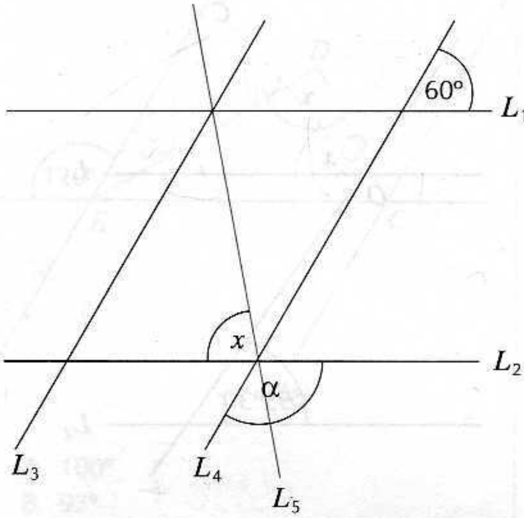
A. 62° 14′ 60″
B. 50° 30′ 20″
C. 62° 30′
D. 62° 17′
E. 62° 14′

52. Sean $L_1 \parallel L_2$ y $W_1 \perp W$. Determinar el valor de x.



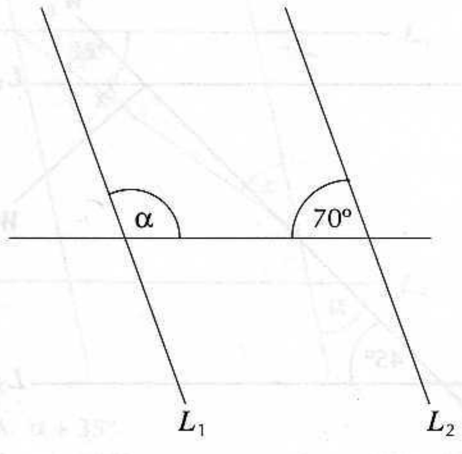
A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°
E. 135°

53. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, $L_3 \parallel L_4$ y L_5 bisectriz del ángulo α. Determinar el valor de x.



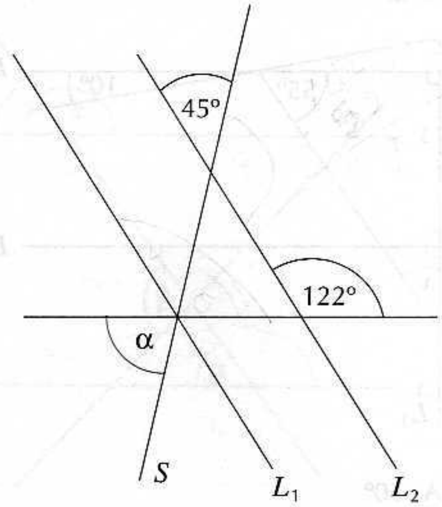
A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 100°
E. 120°

54. Si $L_1 \parallel L_2$, determinar la mitad de α.



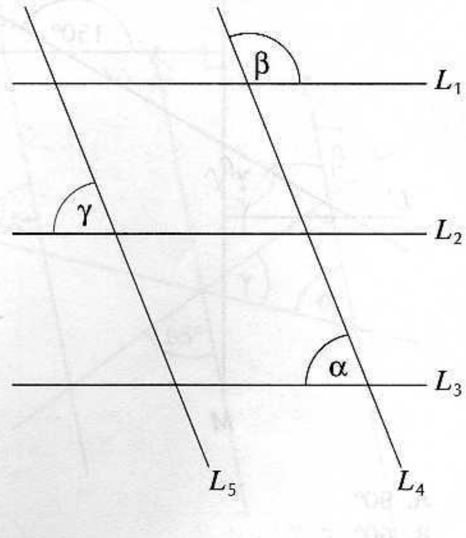
A. 35°
B. 50°
C. 55°
D. 70°
E. 110°

55. Si $L_1 \parallel L_2$, ¿cuál es el valor de α?



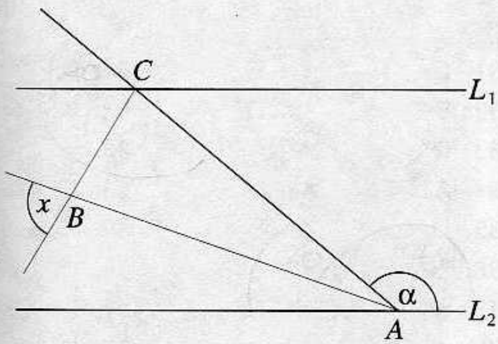
A. 30°
B. 68°
C. 77°
D. 122°
E. 158°

56. Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; $L_4 \parallel L_5$ y $\alpha : \beta = 2 : 3$, determinar el valor de γ.



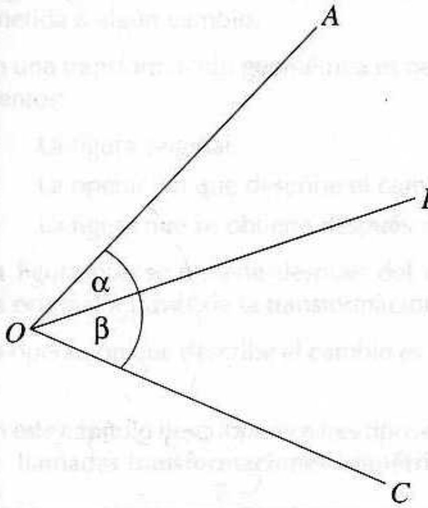
A. 36°
B. 60°
C. 70°
D. 72°
E. 108°

57. En la figura, $L_1 \| L_2$, $\alpha = 140°$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ bisectrices. Determinar el valor de x.



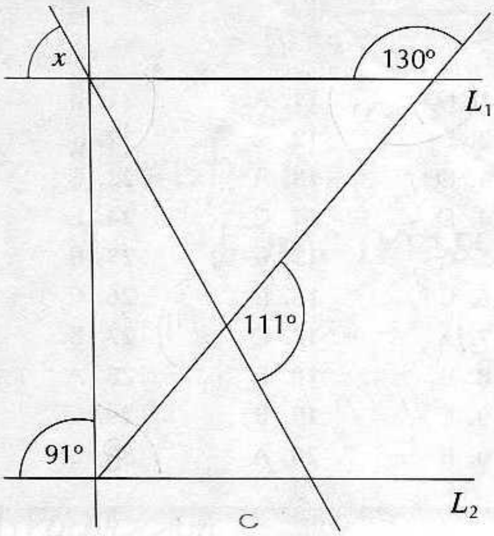
A. 30°
B. 40°
C. 60°
D. 75°
E. 90°

58. Si $m(\sphericalangle AOC) = 70°$ y $\alpha : \beta = 2 : 3$, determinar los valores de α y β.



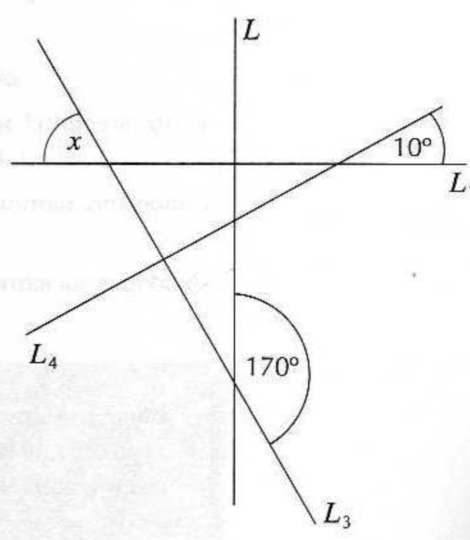
A. $\alpha = 38°$ y $\beta = 32°$
B. $\alpha = 28°$ y $\beta = 42°$
C. $\alpha = 24°$ y $\beta = 46°$
D. $\alpha = 10°$ y $\beta = 60°$
E. $\alpha = 40°$ y $\beta = 30°$

59. Determinar el valor de x si $L_1 \| L_2$.



A. 62°
B. 61°
C. 63°
D. 91°
E. 111°

60. Determinar el valor de x sabiendo que $L \perp L_1$ y $L_3 \perp L_4$.



A. 80
B. 75°
C. 60°
D. 20°
E. 10°

Soluciones

1. D	**11.** A	**21.** B	**31.** C	**41.** E	**51.** A
2. E	**12.** C	**22.** B	**32.** E	**42.** D	**52.** B
3. D	**13.** A	**23.** E	**33.** D	**43.** C	**53.** C
4. D	**14.** C	**24.** E	**34.** A	**44.** A	**54.** C
5. C	**15.** C	**25.** B	**35.** D	**45.** E	**55.** C
6. C	**16.** D	**26.** C	**36.** E	**46.** C	**56.** D
7. A	**17.** D	**27.** B	**37.** A	**47.** C	**57.** E
8. B	**18.** E	**28.** A	**38.** A	**48.** A	**58.** B
9. E	**19.** B	**29.** C	**39.** C	**49.** E	**59.** B
10. B	**20.** A	**30.** B	**40.** B	**50.** B	**60.** A

CAPÍTULO 2

Transformaciones isométricas

Introducción 2.1

Una "transformación" implica un cambio. Una transformación de una figura geométrica indica que, de alguna manera, ella es alterada o sometida a algún cambio.

En una transformación geométrica es necesario tener presentes tres elementos:

- La figura original.
- La operación que describe el cambio.
- La figura que se obtiene después del cambio.

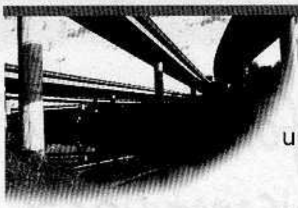
La figura que se obtiene después del cambio es la imagen de la figura original a través de la transformación descrita.

La operación que describe el cambio es una transformación geométrica.

En este capítulo describiremos tres tipos de transformaciones geométricas, llamadas **transformaciones isométricas**.

> **Definición**: Se llaman **transformaciones isométricas** de una figura a las transformaciones que no alteran la forma ni el tamaño de la figura sobre la que se aplica; sólo pueden cambiarla de posición (la orientación o el sentido de ésta).
> Entre las transformaciones isométricas están las **traslaciones**, las **rotaciones** (o giros) y las **reflexiones** (o simetrías).

2.2 Traslaciones



Una traslación es el movimiento que se hace al deslizar o mover una figura, en línea recta, manteniendo su forma y su tamaño.

Puede interpretarse como el movimiento que se hace al deslizar una figura de modo que todos sus puntos describan líneas rectas, paralelas entre sí.

En una traslación se distinguen tres elementos:

Dirección: que puede ser horizontal, vertical u oblicua.

Sentido: derecha, izquierda, arriba, abajo.

Magnitud del desplazamiento: que es la distancia que existe entre la posición inicial y la posición final de cualquier punto de la figura que se desplaza.

Ejemplo 1:

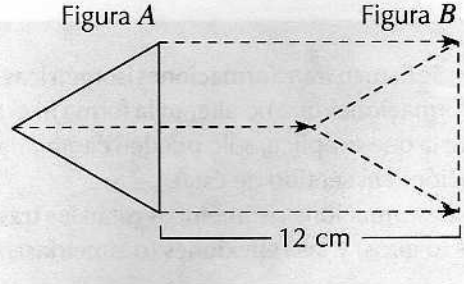
El punto P se ha trasladado hasta coincidir con el punto Q.

Esta traslación se hizo en dirección vertical, el sentido fue hacia abajo y la magnitud del desplazamiento, PQ, fue de 8 cm.

El punto Q es la imagen del punto P a través de la traslación descrita.

Ejemplo 2:

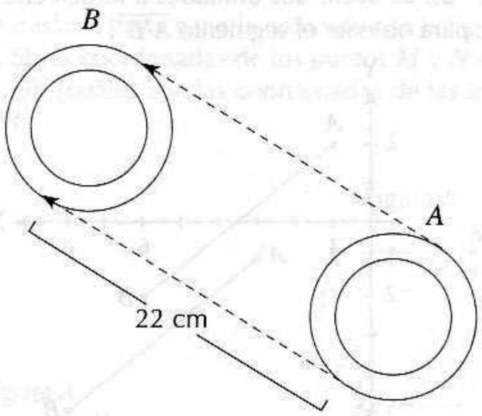
La Figura A se ha trasladado hasta coincidir con la Figura B.



Esta traslación se hizo en dirección horizontal, el sentido fue hacia la derecha y la magnitud del desplazamiento fue de 12 cm.

Ejemplo 3:

En el siguiente ejemplo, determine la dirección, el sentido y la magnitud del desplazamiento.



Esta traslación se hizo en dirección oblicua, el sentido fue hacia la izquierda y la magnitud del desplazamiento fue de 22 cm.

Traslaciones en un sistema de ejes coordenados

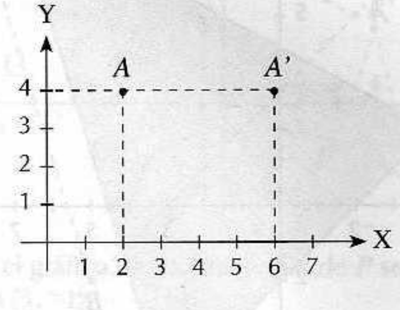
Al trasladar una figura en un sistema de ejes coordenados es necesario señalar el **vector de traslación**. Éste es un par ordenado de números (x, y), donde x representa el desplazamiento horizontal e y representa el desplazamiento vertical.

Respecto de la abscisa (primera coordenada), el signo positivo indica el movimiento hacia la derecha y el signo negativo, hacia la izquierda.

Respecto de la ordenada (segunda coordenada), el signo positivo indica el movimiento hacia arriba y el signo negativo, hacia abajo.

Ejemplo 1:

En un sistema de ejes coordenados, dibujemos el punto de coordenadas $A(2, 4)$ y traslademoslo 4 unidades hacia la derecha. ¿Cuáles son sus nuevas coordenadas?

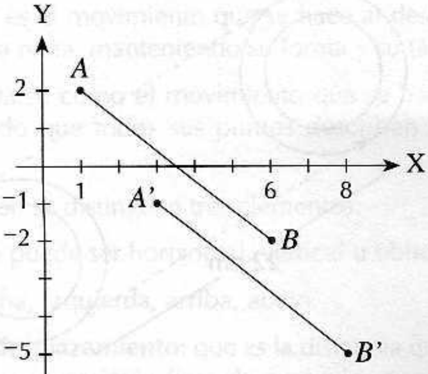


Para indicar esta traslación usaremos la notación "vectorial". Entonces diremos que la traslación se realizó según el vector (4, 0).

Por lo tanto, sus nuevas coordenadas son $A'(6, 4)$.

Ejemplo 2:

Dibujemos un sistema de ejes coordenados y en él, un segmento $\overline{AB}$ de coordenadas $A(1, 2)$ y $B(6, -2)$. Apliquemos la traslación según el vector $(2, -3)$, es decir, dos unidades a la derecha y tres unidades hacia abajo, para obtener el segmento $\overline{A'B'}$.



Las coordenadas de las imágenes de los puntos A y B son, respectivamente: $(3, -1)$ y $(8, -5)$.

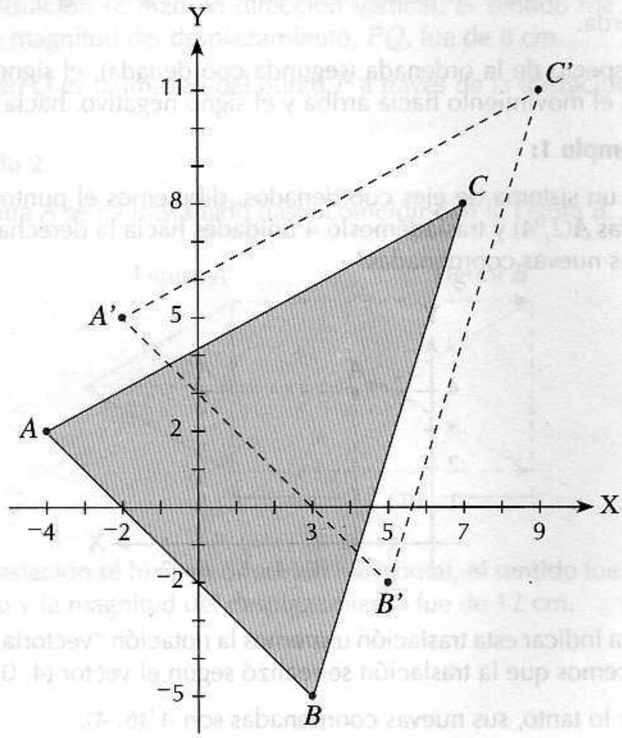
¿Qué relación tienen las coordenadas de las imágenes con las coordenadas de los puntos originales y con el vector de traslación?

Si al punto $P(x, y)$ se le aplica una traslación según el vector (a, b), las coordenadas del punto P', imagen de P según esta traslación, están dadas por $P'(x + a, y + b)$.

Ejemplo 3:

Consideremos el triángulo de vértices $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$ y $C(7, 8)$.

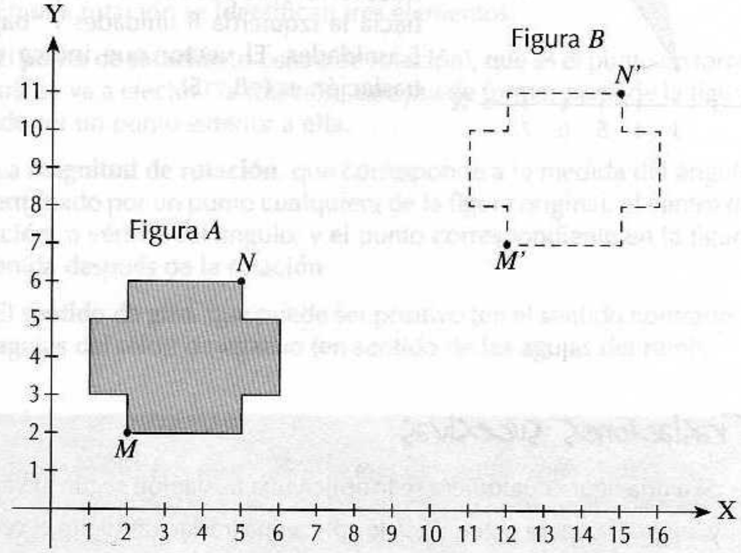
Traslademos este triángulo dos unidades hacia la derecha y tres unidades hacia arriba. Este movimiento está determinado por el vector $(2, 3)$.



La imagen del triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$ y sus coordenadas son $A'(-2, 5)$, $B'(5, -2)$ y $C'(9, 11)$.

Ejemplo 4:

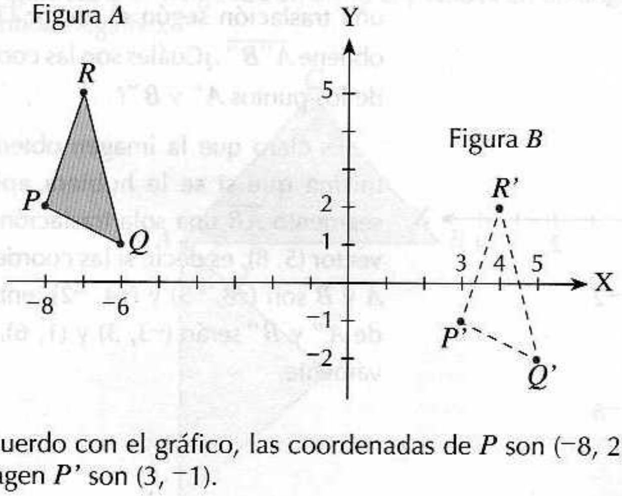
La Figura A se trasladó hasta hacerla coincidir con la Figura B según el vector (10, 5). Si las coordenadas de los puntos M y N de la Figura A son (2, 2) y (5, 6), ¿cuáles son las coordenadas de las imágenes de los puntos M y N?



Si M' y N' son las imágenes de los puntos M y N según la traslación anterior, las coordenadas son $M'(12, 7)$ y $N'(15, 11)$. Basta con sumar las coordenadas de cada punto con las coordenadas del vector de traslación.

Ejemplo 5:

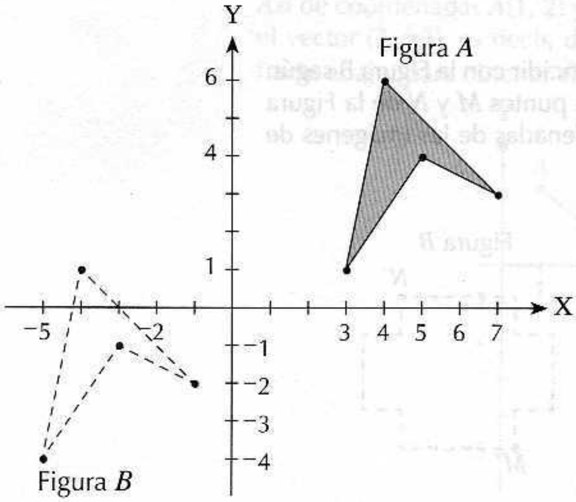
A la Figura A se le aplicó una traslación y se obtuvo la Figura B según muestra el gráfico. ¿Cuál es el vector de traslación?



De acuerdo con el gráfico, las coordenadas de P son $(-8, 2)$ y las de su imagen P' son $(3, -1)$.

Para determinar el vector de traslación (x, y) se debe cumplir: $-8 + x = 3$ y $2 + y = -1$, de donde obtenemos que el vector de traslación tiene por coordenadas $(11, -3)$.

Ejemplo 6:



Determinemos el vector de traslación que transformó la Figura A en la Figura B.

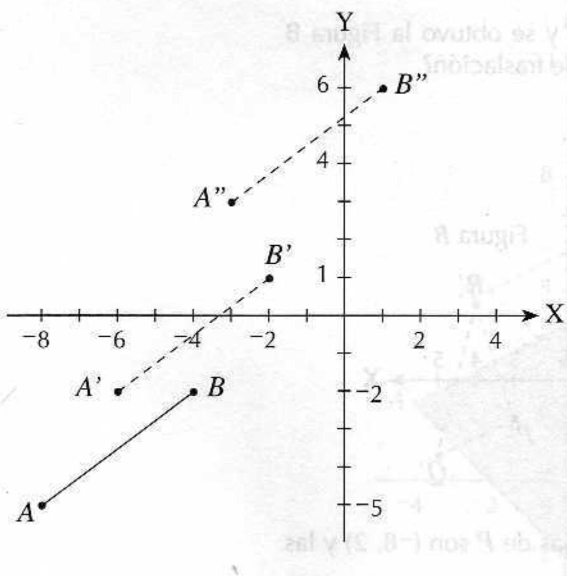
Si observamos un punto cualquiera de la Figura A y su imagen respectiva en la Figura B, podemos afirmar que fue necesario "retroceder" o desplazarse hacia la izquierda 8 unidades y "bajar" 5 unidades. El vector que indica esta traslación es (−8, −5).

Traslaciones sucesivas

Si a una figura cualquiera se le aplica una traslación según el vector $\vec{v}$, y luego a la figura obtenida se le aplica una traslación según el vector $\vec{w}$, ¿qué resultado se obtiene?

El resultado que se obtiene es la imagen de la figura original, trasladada según el vector ($\vec{v} + \vec{w}$).

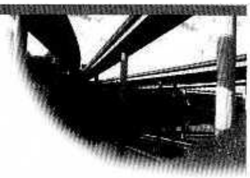
Ejemplo 7:



Al segmento $\overline{AB}$ se le aplica una traslación según el vector (2, 3) y se obtiene el segmento $\overline{A'B'}$. Luego, a $\overline{A'B'}$ se le aplica una traslación según el vector (3, 5) y se obtiene $\overline{A''B''}$.¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A'' y B''?

Es claro que la imagen obtenida es la misma que si se le hubiera aplicado al segmento $\overline{AB}$ una sola traslación según el vector (5, 8), es decir, si las coordenadas de A y B son (−8, −5) y (−4, −2), entonces las de A'' y B'' serán (−3, 3) y (1, 6), respectivamente.

Rotaciones o giros 2.3



Una rotación es el movimiento que se efectúa al girar una figura en torno a un punto. Este movimiento mantiene la forma y el tamaño de la figura.

En una rotación se identifican tres elementos:

El **punto de rotación** (o centro de rotación), que es el punto en torno al cual se va a efectuar la rotación; éste puede formar parte de la figura puede ser un punto exterior a ella.

La **magnitud de rotación**, que corresponde a la medida del ángulo determinado por un punto cualquiera de la figura original, el centro de rotación, o vértice del ángulo, y el punto correspondiente en la figura obtenida después de la rotación.

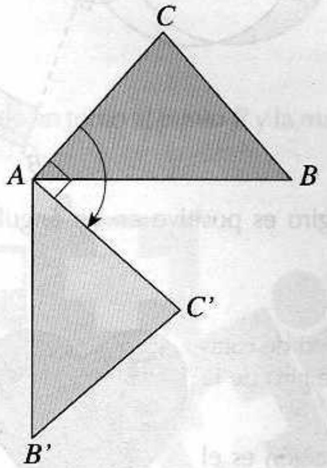
El **sentido de giro**, que puede ser positivo (en el sentido contrario a las agujas del reloj) o negativo (en sentido de las agujas del reloj).

Observación: En una rotación se cumple siempre que la distancia entre un punto cualquiera de la figura girada y el centro de rotación es la misma que la distancia entre el punto correspondiente de la figura original y el centro de rotación.

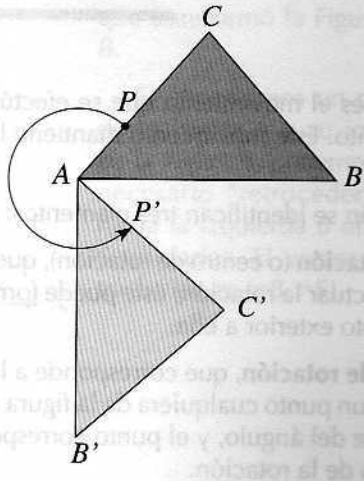
Rotaciones en torno a un punto de la figura

Ejemplo 1:

El triángulo ABC se ha girado en torno al punto A en un ángulo de 90º en sentido negativo.

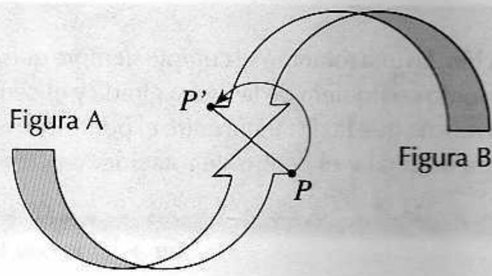


También se puede considerar la rotación anterior como un giro de 270° en sentido positivo.

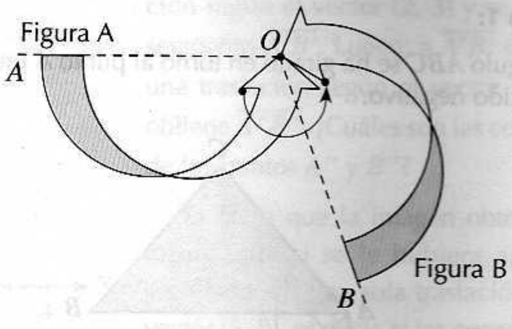


Ejemplo 2:

La flecha (Figura A) se ha girado en torno a la punta de ella en un ángulo de 180°, obteniéndose la Figura B.



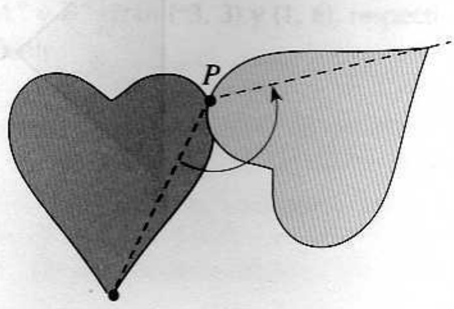
¿Cómo es el sentido del giro y cuál es la magnitud de rotación de la flecha en torno a la punta de ella en la figura siguiente?



El sentido del giro es positivo en un ángulo de 108°. Compruébenlo.

Ejemplo 3:

¿Cuál es el punto de rotación y el ángulo de giro de la siguiente figura?

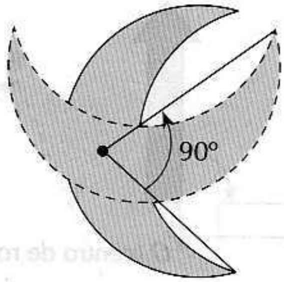


El punto de rotación es el punto P y el ángulo de giro es de 130°. Compruébenlo.

Rotaciones en torno a un punto interior de la figura

Ejemplo 1:

Observemos la siguiente figura:

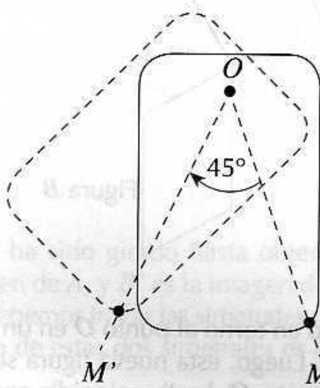


La figura punteada es una rotación de la figura sin puntear.

En este caso, el giro se ha efectuado en torno a un punto interior de la figura. El giro fue de 90°, en el sentido positivo.

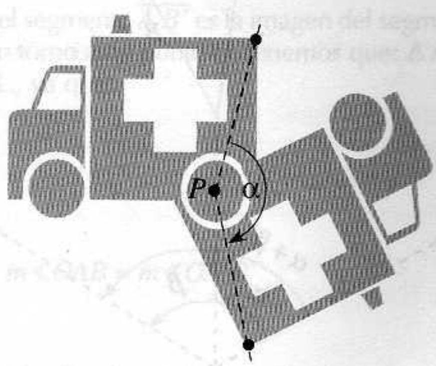
Ejemplo 2:

La figura se ha girado en torno al punto O en un ángulo de 45°, en sentido negativo.



Ejemplo 3:

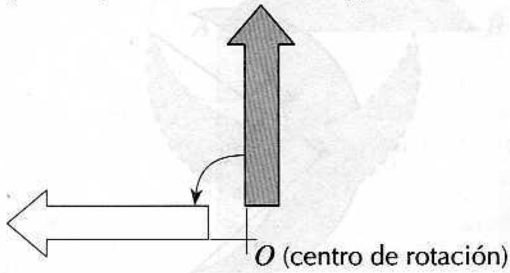
La figura se ha girado en torno al punto P y la magnitud de rotación está dada por el ángulo α.



Rotaciones en torno a un punto exterior de la figura

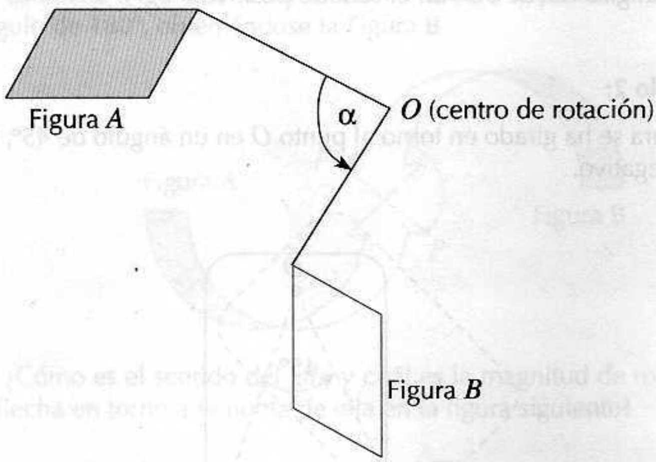
Ejemplo 1:

La flecha se giró en 90° en torno al punto *O*, que es el centro de rotación y es un punto exterior de la figura.



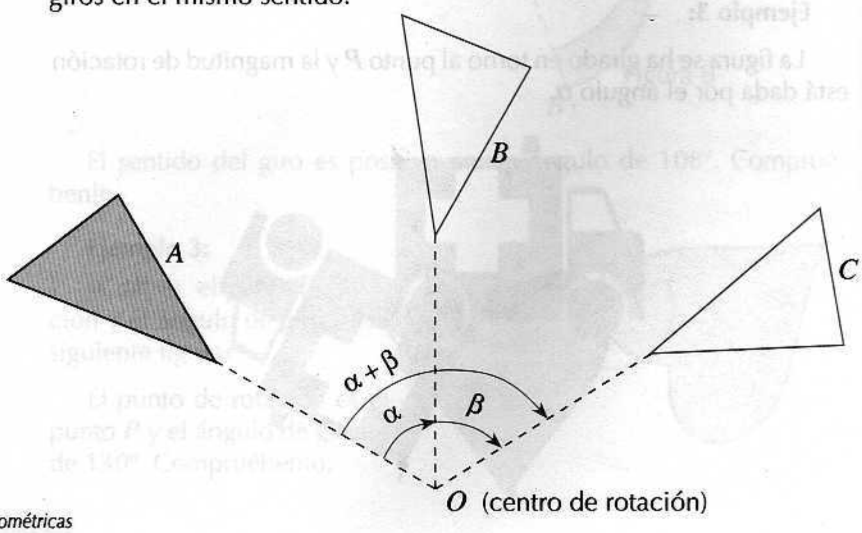
Ejemplo 2:

La Figura A se ha girado en un ángulo α en torno al centro de rotación *O*, en sentido positivo.



Ejemplo 3:

La Figura A se giró en torno al punto *O* en un ángulo α hasta coincidir con la Figura B. Luego, esta nueva figura se giró en un ángulo β en torno al mismo punto *O*, hasta coincidir con la Figura C, ambos giros en el mismo sentido.

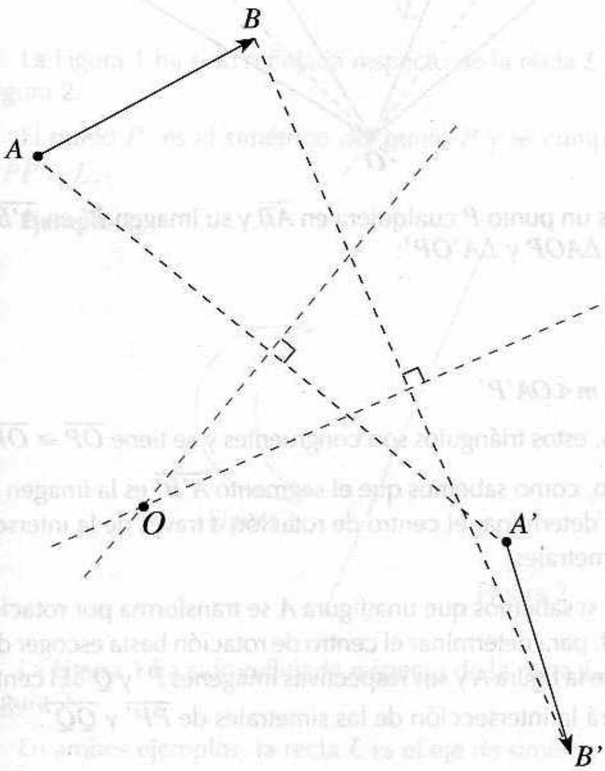


¿Qué relación tiene la Figura A con la Figura C?

La Figura C es la imagen de la Figura A después de una rotación de magnitud $(\alpha + \beta)$ en torno al punto O.

Centro de una rotación

Ejemplo:



El segmento $\overline{AB}$ ha sido girado hasta obtener el segmento $\overline{A'B'}$, donde A' es la imagen de A, y B' es la imagen de B. Para determinar el centro de rotación debemos trazar las simetrales de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. La intersección de estas dos simetrales es el centro de rotación.

También podemos afirmar, aplicando congruencia de triángulos, que la simetral de un trazo equidista de los extremos de éste. Por esta razón, podemos señalar que la distancia entre un punto cualquiera del segmento $\overline{AB}$ y el centro de rotación es la misma que la distancia entre la imagen de ese punto y el centro de rotación.

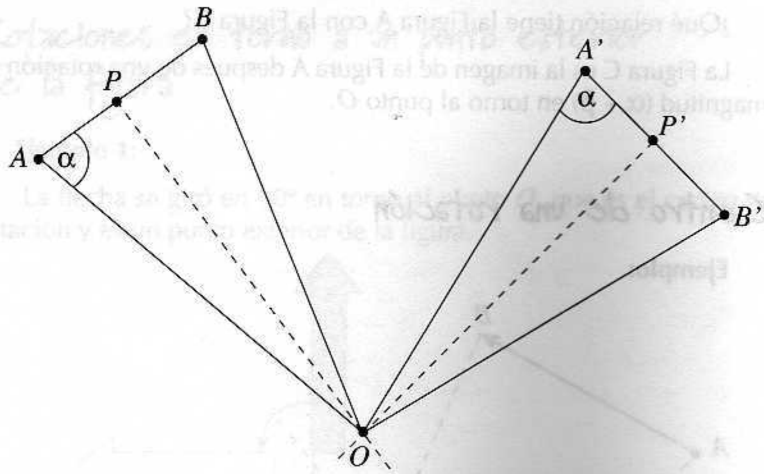
En efecto, si el segmento $\overline{A'B'}$ es la imagen del segmento $\overline{AB}$ a través de la rotación en torno a un punto O, tenemos que: $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$ por criterio L.L.L., ya que:

$AO = A'O$

$BO = B'O$

$AB = A'B'$

Por lo tanto, $m\measuredangle OAB = m\measuredangle OA'B'$



Si tomamos un punto P cualquiera en $\overline{AB}$ y su imagen P' en $\overline{A'B'}$, consideramos $\triangle AOP$ y $\triangle A'OP'$:

$AO = A'O$

$AP = A'P'$

$m\measuredangle OAP = m\measuredangle OA'P'$

Por lo tanto, estos triángulos son congruentes y se tiene $\overline{OP} \cong \overline{OP'}$.

En este caso, como sabemos que el segmento $\overline{A'B'}$ es la imagen de $\overline{AB}$, es posible determinar el centro de rotación a través de la intersección de dos simetrales.

En general, si sabemos que una figura A se transforma por rotación en una figura B, para determinar el centro de rotación basta escoger dos puntos P y Q de la figura A y sus respectivas imágenes P' y Q'. El centro de rotación será la intersección de las simetrales de $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$.

2.4 Reflexiones o simetrías

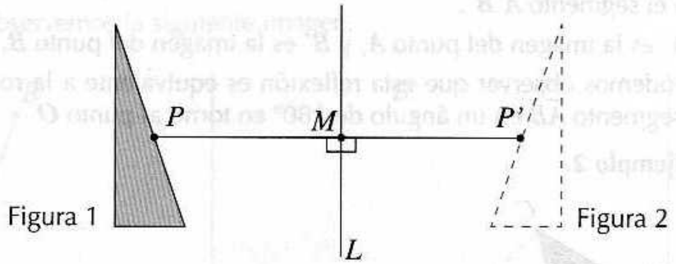
Podemos considerar una reflexión como aquel movimiento que, aplicado a una figura geométrica, produce el efecto de un espejo.

Reflexión respecto de un eje (o simetría axial)

Una reflexión de una figura geométrica respecto de un eje llamado **eje de simetría** es el movimiento que transforma la figura, de manera que cada punto P y su imagen o simétrico P' equidisten del eje de simetría y el segmento $\overline{PP'}$ sea perpendicular al eje de simetría.

En otras palabras, el eje de simetría actúa como un "espejo" en el cual se refleja la figura original para obtener la figura reflejada.

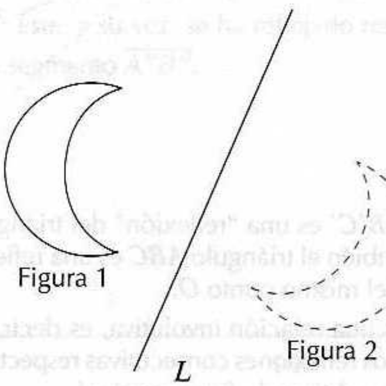
Ejemplo 1:



La Figura 1 ha sido reflejada respecto de la recta L para obtener la Figura 2.

El punto P' es el simétrico del punto P y se cumple: $\overline{PM} \cong \overline{P'M}$ y $\overline{PP'} \perp L$.

Ejemplo 2:



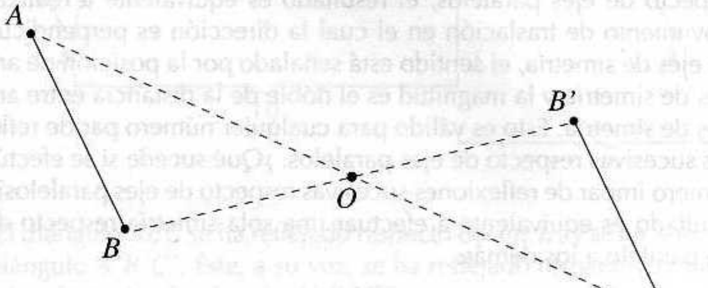
La Figura 1 ha sido reflejada respecto de la recta L para obtener la Figura 2.

En ambos ejemplos, la recta L es el eje de simetría de la reflexión.

Reflexión respecto de un punto (o simetría central)

Una reflexión de una figura respecto de un punto O es el movimiento que transforma cada punto P de la figura original en el punto P', de modo que O es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Ejemplo 1:

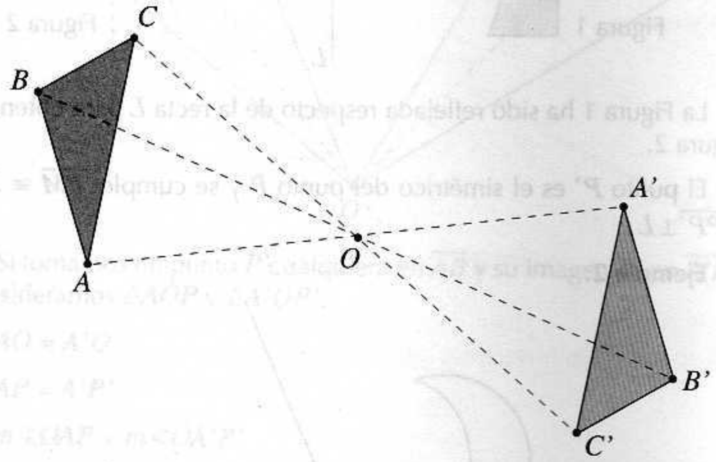


El segmento $\overline{AB}$ se ha reflejado respecto del punto O y se ha obtenido el segmento $\overline{A'B'}$.

A' es la imagen del punto A, y B' es la imagen del punto B.

Podemos observar que esta reflexión es equivalente a la rotación del segmento $\overline{AB}$ en un ángulo de 180° en torno al punto O.

Ejemplo 2.



El triángulo $A'B'C'$ es una "reflexión" del triángulo ABC respecto del punto O, y también el triángulo ABC es una reflexión del triángulo $A'B'C'$ respecto del mismo punto O.

La reflexión es una relación involutiva, es decir, si a partir de una figura se aplican dos reflexiones consecutivas respecto del mismo punto o del mismo eje, se obtiene la figura original.

¿Qué sucede con la traslación y con la rotación?

También podemos observar que el triángulo $A'B'C'$ es una rotación del triángulo ABC en 180° (y viceversa).

En general, la simetría central (o reflexión respecto de un punto) es equivalente a una rotación en torno al centro de simetría en un ángulo de 180°.

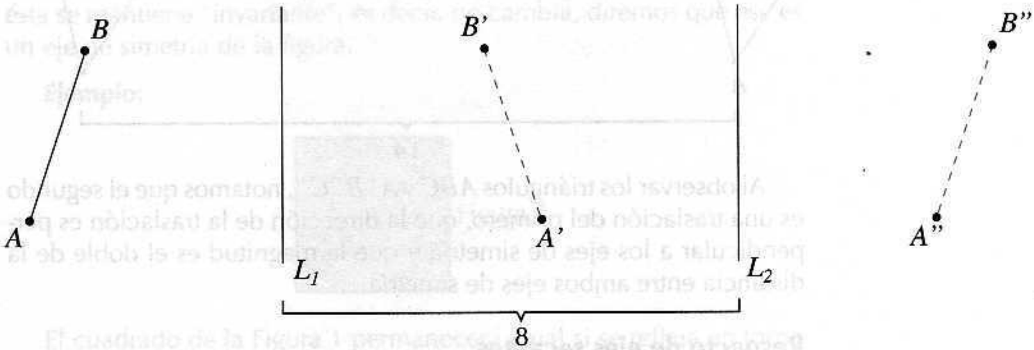
Reflexiones sucesivas

Respecto de ejes paralelos

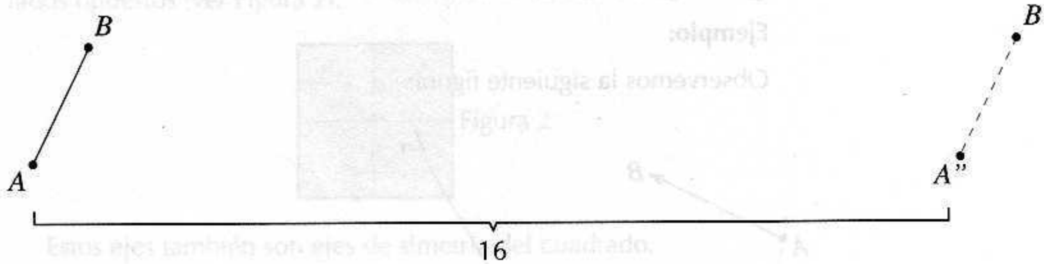
Si a partir de una figura efectuamos dos reflexiones sucesivas respecto de ejes paralelos, el resultado es equivalente a realizar un movimiento de traslación en el cual la dirección es perpendicular a los ejes de simetría, el sentido está señalado por la posición de ambos ejes de simetría y la magnitud es el doble de la distancia entre ambos ejes de simetría. Esto es válido para cualquier número par de reflexiones sucesivas respecto de ejes paralelos. ¿Qué sucede si se efectúa un número impar de reflexiones sucesivas respecto de ejes paralelos? Este resultado es equivalente a efectuar una sola simetría respecto de un eje paralelo a los demás.

Ejemplo 1:

Observemos la siguiente imagen:



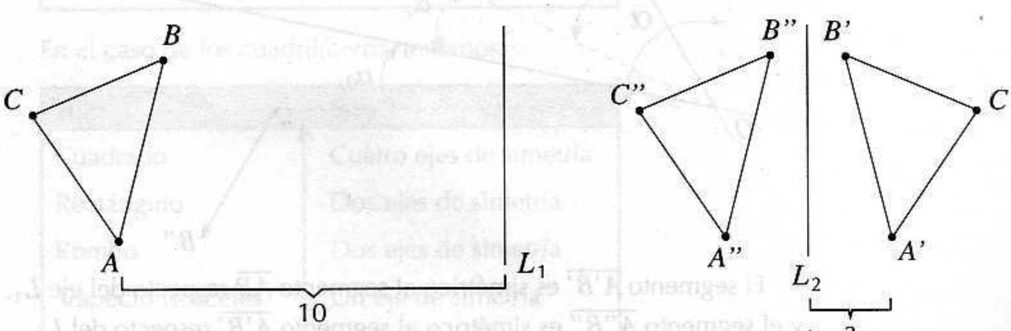
El segmento $\overline{AB}$ se ha reflejado respecto del eje L_1 y se ha obtenido el segmento $\overline{A'B'}$. Éste, a su vez, se ha reflejado respecto del eje L_2 y se ha obtenido el segmento $\overline{A''B''}$.



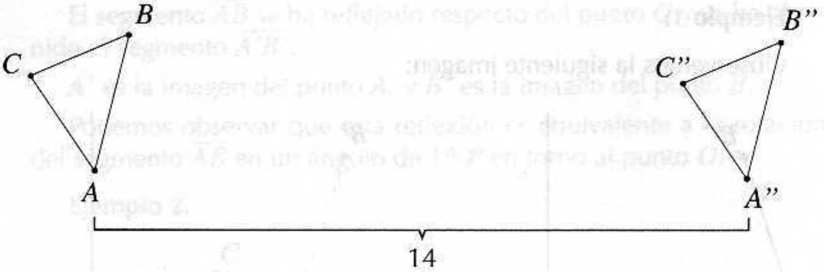
Si observamos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A''B''}$, podemos afirmar que el segundo de ellos es una traslación del primero en dirección perpendicular a los ejes de simetría y que su magnitud es el doble de la distancia entre los dos ejes de simetría.

Ejemplo 2:

Observemos la siguiente figura:



El triángulo ABC se ha reflejado respecto del eje L_1 y se ha obtenido el triángulo $A'B'C'$. Éste, a su vez, se ha reflejado respecto del eje L_2 y se ha obtenido el triángulo $A''B''C''$.



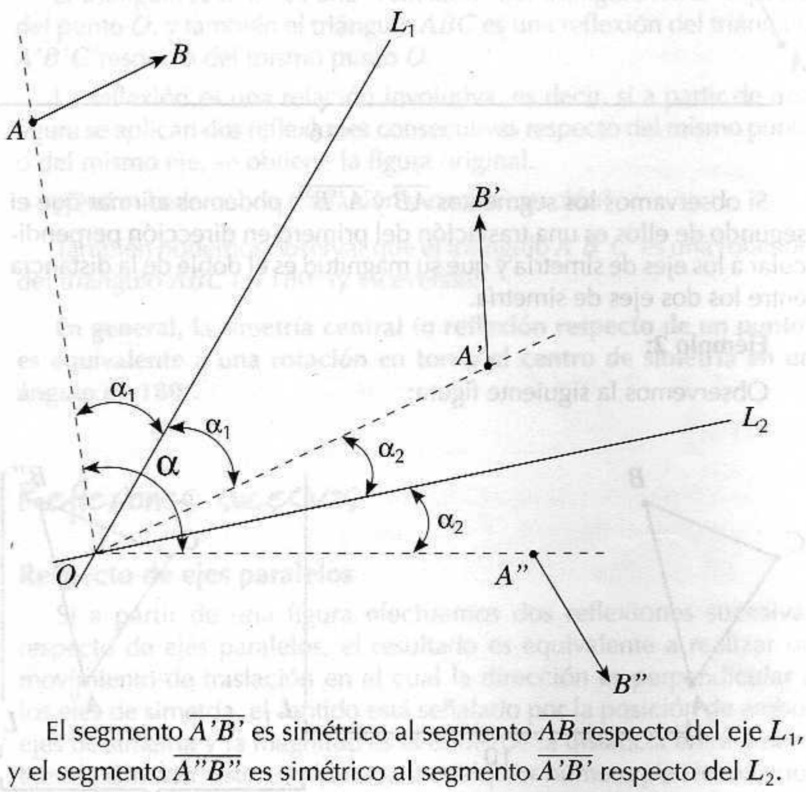
Al observar los triángulos ABC y $A"B"C"$, notamos que el segundo es una traslación del primero, que la dirección de la traslación es perpendicular a los ejes de simetría y que la magnitud es el doble de la distancia entre ambos ejes de simetría.

Respecto de ejes secantes

Si efectuamos dos reflexiones sucesivas respecto de ejes secantes que se intersectan en el punto O, el resultado es equivalente a efectuar una rotación en torno al punto O, cuya magnitud de giro está dada por el ángulo $POP"$, donde P es un punto de la figura original y $P"$ es su imagen luego de las dos reflexiones.

Ejemplo:

Observemos la siguiente figura:



El segmento $\overline{A'B'}$ es simétrico al segmento $\overline{AB}$ respecto del eje L_1, y el segmento $\overline{A"B"}$ es simétrico al segmento $\overline{A'B'}$ respecto del L_2.

Además, podemos observar que el segmento $\overline{A"B"}$ se obtiene de $\overline{AB}$ mediante una rotación cuyo centro es el punto de intersección de los dos ejes de simetría, y la magnitud de rotación es el doble del ángulo formado por estos dos ejes.

$$\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Ejes de simetría de una figura geométrica

Si al aplicar una reflexión a una figura geométrica en torno a un eje ésta se mantiene "invariante", es decir, no cambia, diremos que ése es un eje de simetría de la figura.

Ejemplo:

Figura 1

El cuadrado de la Figura 1 permanecerá igual si se refleja en torno a sus diagonales.

Ambas diagonales son ejes de simetría del cuadrado.

También permanecerá igual (o se superpondrá sobre sí mismo) si se refleja en torno a los ejes determinados por los puntos medios de lados opuestos (ver Figura 2).

Figura 2

Estos ejes también son ejes de simetría del cuadrado.

El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría.

En el caso de los triángulos, tenemos:

Tipo	Ejes
Triángulo equilátero	Tres ejes de simetría
Triángulo isósceles	Un eje de simetría
Triángulo escaleno	Ningún eje se simetría

En el caso de los cuadriláteros, tenemos:

Tipo	Ejes
Cuadrado	Cuatro ejes de simetría
Rectángulo	Dos ejes de simetría
Rombo	Dos ejes de simetría
Trapecio isósceles	Un eje de simetría
Trapezoide	Ningún eje de simetría

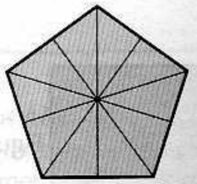
El círculo tiene infinitos ejes de simetría. Cada recta que pasa por el centro es un eje de simetría del círculo.

En el caso de los polígonos regulares, estos tienen tantos ejes de simetría como número de lados.

Ejemplo 1:

En el caso del pentágono regular, cada recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto es un eje de simetría.

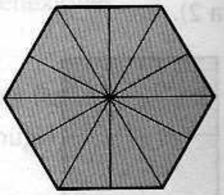
El pentágono regular tiene 5 ejes de simetría.



Ejemplo 2:

En el caso del hexágono regular, cada recta que pasa por dos vértices opuestos es un eje de simetría y cada recta que pasa por los puntos medios de dos lados opuestos es también un eje de simetría.

El hexágono regular tiene 6 ejes de simetría.



Centro de simetría de una figura geométrica

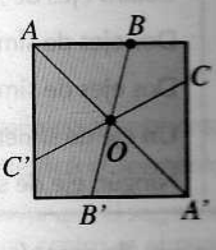
Una figura geométrica tiene un centro de simetría si existe un punto, que es el centro de simetría, tal que el simétrico de cada punto de la figura respecto de este centro es otro punto de la figura.

Ejemplo 1:

Consideremos el cuadrado de la figura y sea O el punto medio de la diagonal AA'.

Si tomamos los puntos B y C del cuadrado, observamos que sus simétricos B' y C', respecto de O, también son puntos del cuadrado.

Es claro que esto ocurre con cualquier punto del cuadrado.

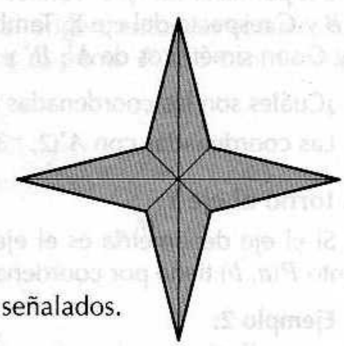


El cuadrado tiene un centro de simetría.

El centro de simetría es el punto medio del segmento que une cada punto con su simétrico.

Ejemplo 2:

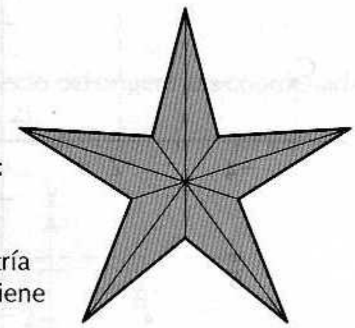
Observemos la siguiente estrella:



El centro de simetría es el punto de intersección de los segmentos señalados.

Ejemplo 3:

Observemos la siguiente estrella:



Esta estrella tiene 5 ejes de simetría (uno por cada vértice), pero no tiene centro de simetría.

Reflexiones en ejes coordenados

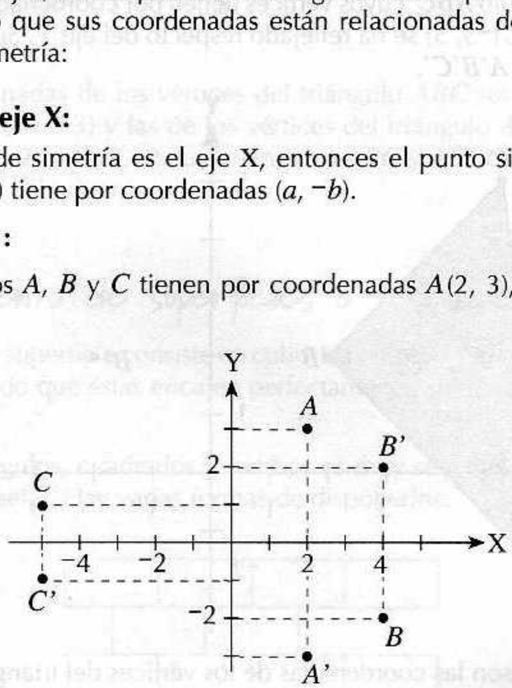
En un sistema de ejes coordenados, al reflejar una figura en torno a uno de estos ejes, a cada punto P de la figura le corresponde un punto P', de modo que sus coordenadas están relacionadas dependiendo del eje de simetría:

En torno al eje X:

Si el eje de simetría es el eje X, entonces el punto simétrico del punto $P(a, b)$ tiene por coordenadas $(a, {}^{-}b)$.

Ejemplo 1:

Los puntos A, B y C tienen por coordenadas $A(2, 3)$, $B(4, {}^{-}2)$ y $C({}^{-}5, 1)$.



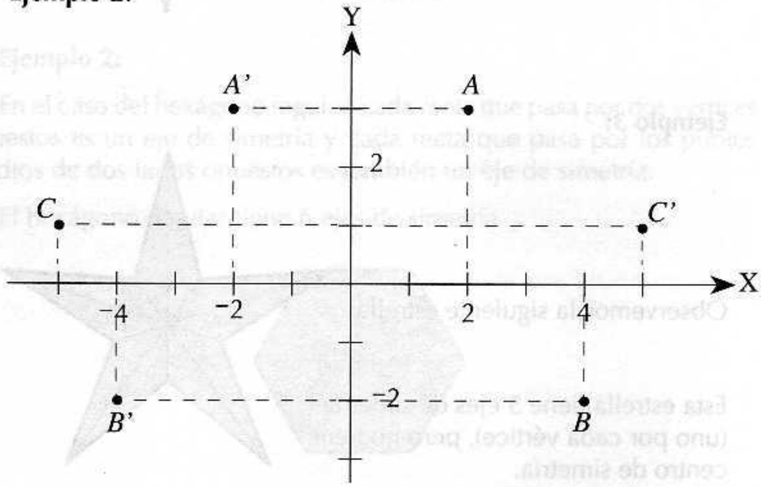
Los puntos A', B' y C' son los respectivos "simétricos" de los puntos A, B y C respecto del eje X. También podemos decir que los puntos A, B y C son simétricos de A', B' y C' respecto del eje X.

¿Cuáles son las coordenadas de A', B' y C'?
Las coordenadas con $A'(2, -3)$; $B'(4, 2)$ y $C'(-5, -1)$.

En torno al eje Y:

Si el eje de simetría es el eje Y, entonces el punto simétrico del punto $P(a, b)$ tiene por coordenadas $(-a, b)$.

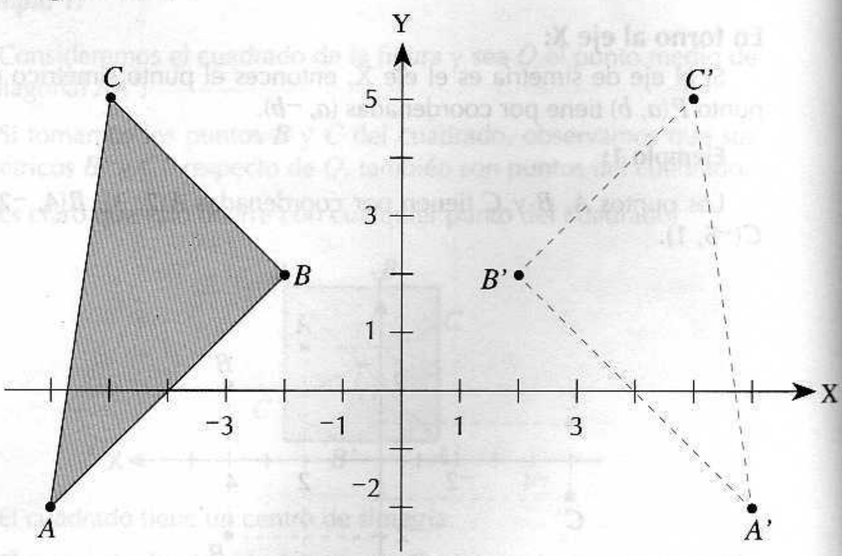
Ejemplo 2:



Los puntos A y A'; B y B' ; C y C' son simétricos respecto del eje Y. Sus coordenadas son $A(2, 3)$ y $A'(-2, 3)$; $B(4, -2)$ y $B'(-4, -2)$; $C(-5, 1)$ y $C'(5, 1)$.

Ejemplo 3:

El triángulo ABC cuyos vértices tienen por coordenadas $A(-6, -2)$, $B(-2, 2)$ y $C(-5, 5)$ se ha reflejado respecto del eje Y. Su simétrico es el triángulo $A'B'C'$.

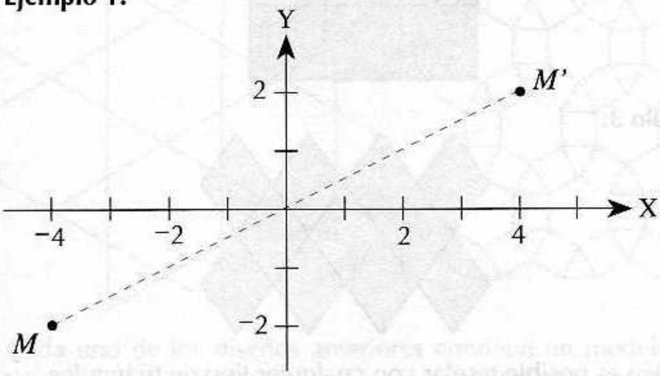


¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$?
Las coordenadas son $A'(6, -2)$, $B'(2, 2)$ y $C'(5, 5)$.

En torno al origen

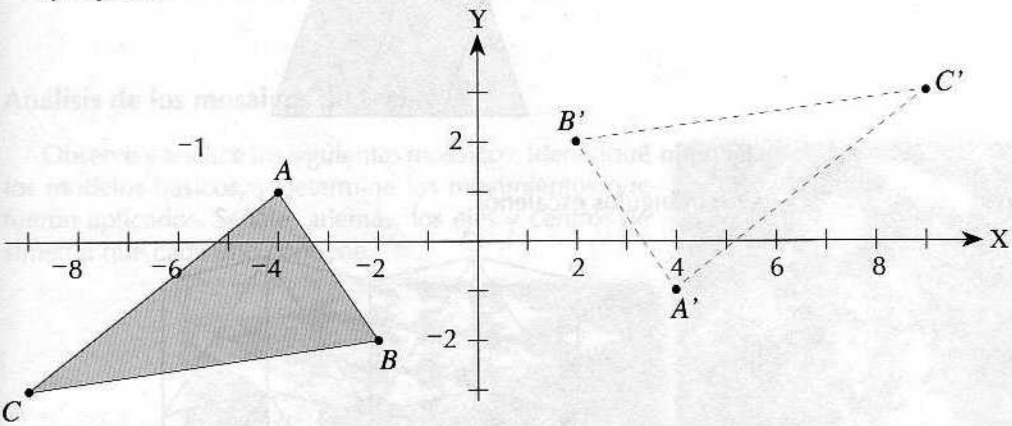
Si la reflexión se efectúa en torno al origen, entonces el simétrico del punto P de coordenadas (a, b) es el punto P' de coordenadas $(-a, -b)$.

Ejemplo 1:



M y M' son puntos simétricos respecto del origen. Las coordenadas de M son $(-4, -2)$ y las de M' son $(4, 2)$.

Ejemplo 2:



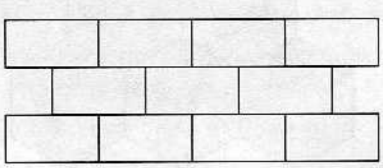
Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son $A(-4, 1)$, $B(-2, -2)$ y $C(-9, -3)$ y las de los vértices del triángulo $A'B'C'$ son $A'(4, -1)$, $B'(2, 2)$ y $C'(9, 3)$. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son simétricos respecto del origen.

Recubrimiento de superficies o teselaciones

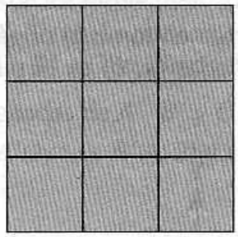
Teselar una superficie consiste en cubrirla completamente con "baldosas", de modo que éstas encajen perfectamente, sin dejar espacios por cubrir.

Con rectángulos, cuadrados y rombos es muy sencillo cubrir una superficie o teselar. Hay varias formas de disponerlos.

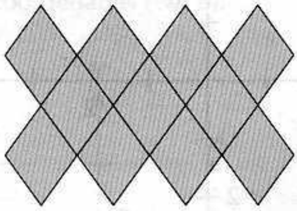
Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



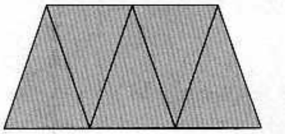
Ejemplo 3:



También es posible teselar con cualquier tipo de triángulos.

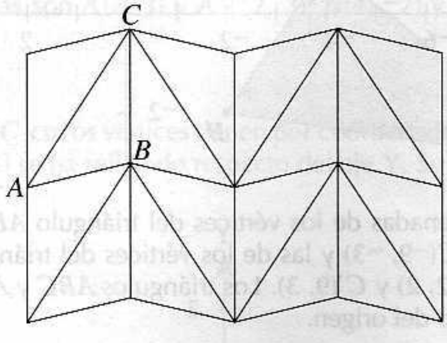
Ejemplo 4:

Con triángulos isósceles:



Ejemplo 5:

Con triángulos escalenos:

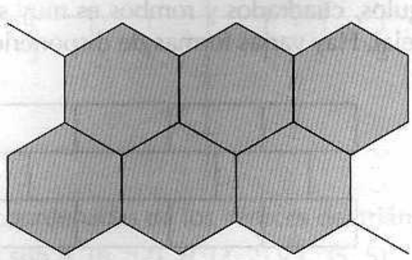


Con polígonos regulares

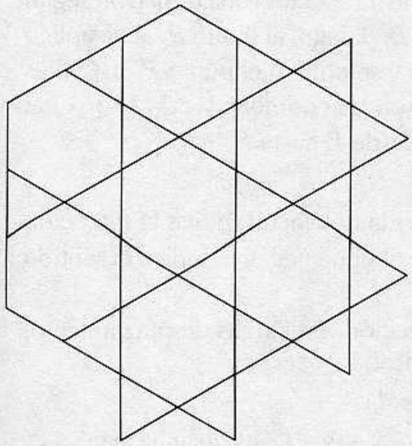
La condición que debe cumplirse para recubrir una superficie es que los ángulos que convergen en cada vértice sumen 360°.

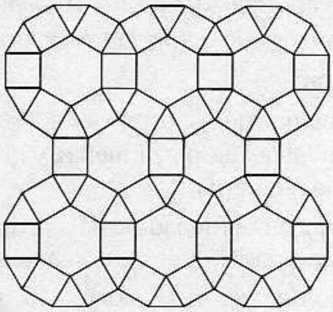
Los únicos polígonos regulares que permiten teselar son los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos regulares.

Ejemplo 6:



Combinando figuras geométricas



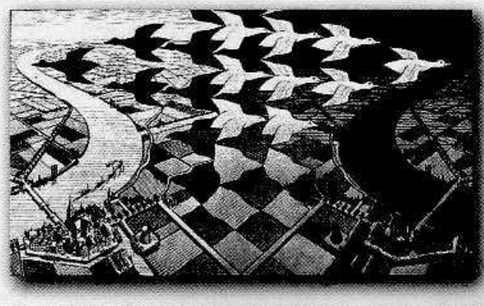


Cada uno de los diseños anteriores contiene un modelo base, a partir del cual, mediante traslaciones y/o reflexiones y/o rotaciones, es posible cubrir toda la superficie (o teselar).

En ellos es posible determinar el modelo, los movimientos que fueron aplicados y los ejes y centros de simetría.

Análisis de los mosaicos de Escher

Observe y analice los siguientes mosaicos; identifique los modelos básicos, y determine los movimientos que fueron aplicados. Señale, además, los ejes y centros de simetría que cada uno contiene.



MAURITS CORNELIUS ESCHER

(Leeuwarden, Holanda, 1898-Hilversum, Holanda, 1972)

Recibió su primera formación artística en la escuela secundaria de Arnhem, donde su profesor le animó a desarrollar sus aptitudes y a que aprendiera a grabar en linóleo.

Entre 1919 y 1922 estudió en la Escuela de Arquitectura y Diseño Ornamental de Haarlem con S. Jessurun de Mesquita.

Durante 1924 se trasladó a Roma, desde donde realizó muchos viajes de estudios.

En 1934 deja Italia y viaja por Suiza y Bélgica, hasta que en el año 1941 se instala definitivamente en Hilversum, Holanda, donde residirá hasta su muerte en el año 1972.

Quizá, su exposición más importante se organizó en 1954 en la Whyte Gallery de Washington.

Ejercicios resueltos

1. A un punto P de coordenadas (x, y) se le ha aplicado una traslación según el vector $(^-a, 1)$ y se obtuvo el punto P'. Luego, al punto P' se le aplicó una traslación según el vector $(a, ^-1)$ y se obtuvo el punto P''. ¿Cuáles son las coordenadas de P'? ¿Cuáles son las coordenadas de P''? ¿Cuál es el vector que define la traslación desde P hasta P''?

Solución:

Recordemos que la primera coordenada del vector indica la dirección horizontal del desplazamiento, y que el signo negativo indica el sentido hacia la izquierda.

La segunda coordenada señala la dirección vertical del desplazamiento, y el signo positivo, el sentido hacia arriba.

Las coordenadas de P' son $(x - a, y + 1)$.

Las coordenadas de P'' son $(x - a + a, y + 1 - 1)$, es decir, (x, y).

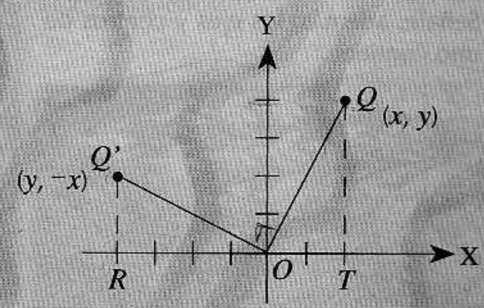
El vector que define la traslación desde P hasta P'' es $(0, 0)$.

2. A un punto Q de coordenadas (x, y) se le aplica una rotación de 90° en sentido positivo y en torno al origen, obteniéndose el punto Q'. ¿Cuáles son las coordenadas de Q'?

Solución:

El punto Q' debe cumplir dos condiciones:

- Si O es el origen del sistema cartesiano, entonces la distancia OQ debe ser igual a la distancia OQ'.
- El ángulo QOQ' debe ser recto.



- El punto que cumple dichas condiciones tiene por coordenadas $(^-y, x)$.
- En efecto, aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos OTQ y ORQ', se obtiene en ambos casos:

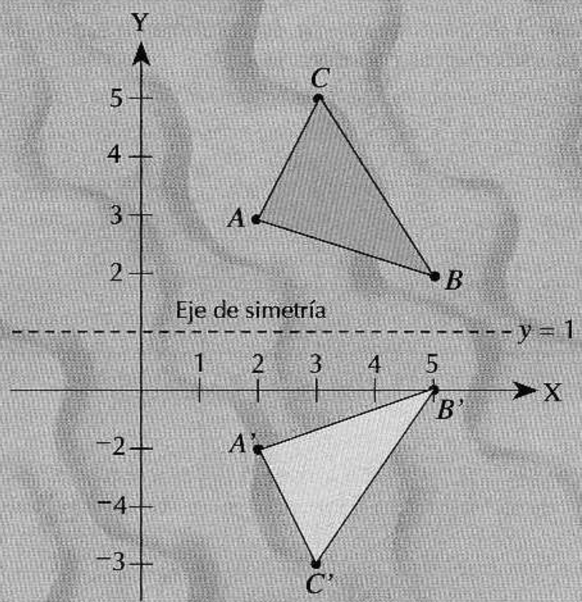
$$OQ = OQ' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- La pendiente m_1 de OQ está dada por $m_1 = \dfrac{y}{x}$
- La pendiente m_2 de OQ' está dada por $m_2 = \dfrac{^-x}{y}$
- Se cumple $m_1 \cdot m_2 = ^-1$, que es la condición de perpendicularidad.
- Observemos que el punto de coordenadas $(y, ^-x)$ también cumple las condiciones indicadas en cuanto a distancia y perpendicularidad, pero corresponde a una rotación de 90° en torno al eje y en sentido contrario.

3. El triángulo de coordenadas $A(2, 3)$, $B(5, 2)$ y $C(3, 5)$ se refleja en torno a la recta $y = 1$. ¿Cuáles son las coordenadas del nuevo triángulo?

Solución:

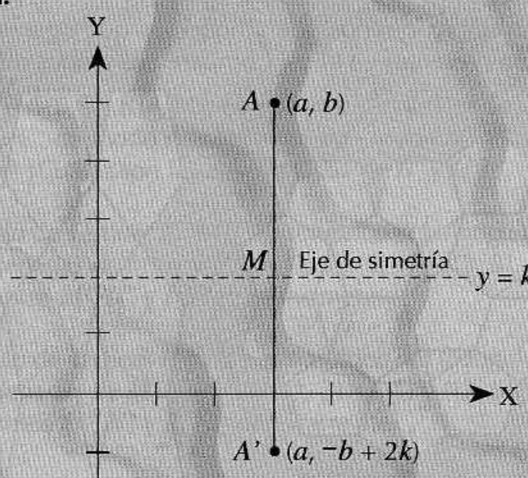
En este caso, la recta $y = 1$ es el eje de simetría.



Los vértices del nuevo triángulo son A' $(2, -1)$, B' $(5, 0)$ y C' $(3, -3)$

4. Si un punto A de coordenadas (a, b) se refleja en torno a la recta $y = k$, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

Solución:



Como la reflexión se hace en torno a una recta horizontal, entonces la abscisa (primera coordenada) se mantiene y la ordenada (segunda coordenada) se obtiene mediante la expresión $2k - b$.

En efecto, sea M el punto de intersección de AA' con el eje de simetría $y = k$.

Las coordenadas de M son (a, k).

Sean (a, y) las coordenadas de A'. M es punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

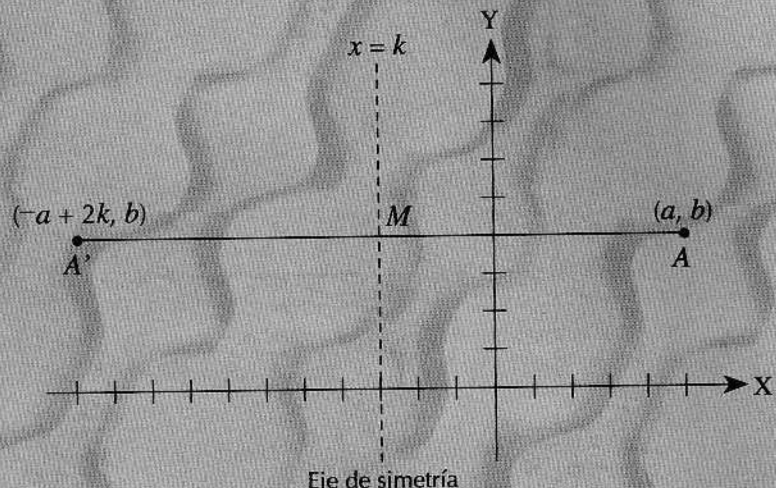
$MA = b - k$ y $A'M = k - y$; como $MA = A'M$, luego:

$b - k = k - y$, de donde $y = 2k - b$

Por lo tanto, $A'(a, 2k - b)$

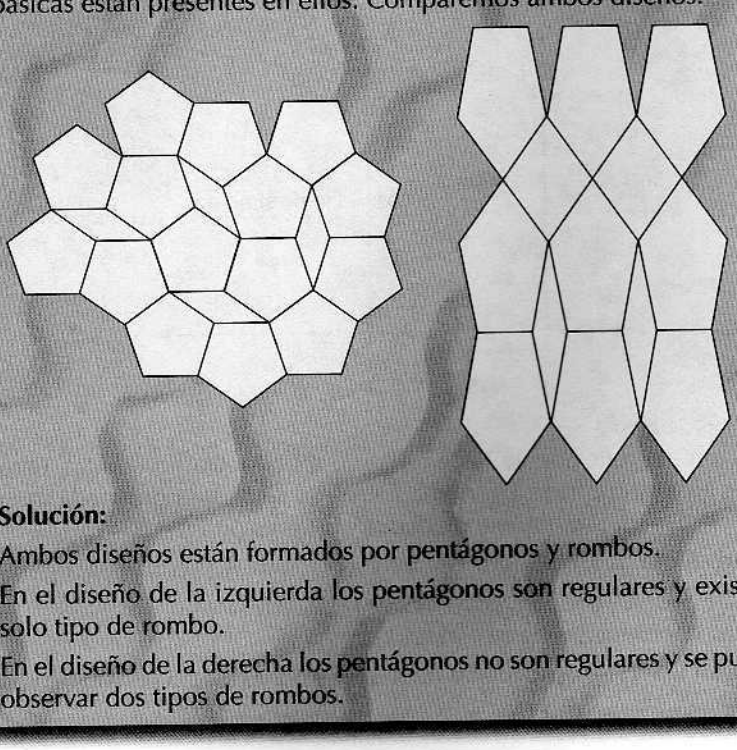
5. Si un punto A de coordenadas (a, b) se refleja en torno a la recta $x = k$, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

Solución:



Como la reflexión se hace en torno a una recta vertical, entonces la ordenada (segunda coordenada) se mantiene y la abscisa (primera coordenada) se obtiene mediante la expresión $2k - a$ (ver ejercicio anterior).

6. Al observar ambos diseños, identifiquemos qué figuras geométricas básicas están presentes en ellos. Comparemos ambos diseños.



Solución:

Ambos diseños están formados por pentágonos y rombos.

En el diseño de la izquierda los pentágonos son regulares y existe un solo tipo de rombo.

En el diseño de la derecha los pentágonos no son regulares y se pueden observar dos tipos de rombos.

Ejercicios

1. Si P y P' son puntos simétricos respecto del eje X y las coordenadas de P son $P(1, -2)$, ¿cuáles son las coordenadas de P'?

2. Si P y P' son puntos simétricos respecto del eje Y y las coordenadas de P son $P(1, -2)$, ¿cuáles son las coordenadas de P'?

3. Si P y P' son puntos simétricos respecto de la recta $y = x$ y las coordenadas de P son $P(1, -2)$, ¿cuáles son las coordenadas de P'?

4. Las coordenadas de los puntos A y B son $(3, 4)$ y $(5, -3)$. Si el segmento $\overline{AB}$ se traslada según el vector $(2, -2)$, ¿cuáles son sus nuevas coordenadas?

5. El triángulo de vértices $A(1, 6)$, $B(3, -1)$ y $C(4, 2)$ se traslada según el vector $(-3, -4)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los nuevos vértices?

6. El punto M' es simétrico del punto $M(4, 6)$ respecto de la recta $y = 2$. ¿Cuáles son sus coordenadas?

7. El punto de coordenadas $(4, 2)$ se gira en 90° en sentido positivo y en torno al origen. ¿Cuáles son sus nuevas coordenadas?

8. Los puntos $A(2, 1)$, $B(5, -1)$ y $C(7, 1)$ son vértices de un paralelogramo. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?

9. Si el punto $D(4, -7)$ "se trasladó" hasta el punto D', de coordenadas $(-2, 3)$, ¿cuál fue el vector de traslación?

10. Las coordenadas de los puntos A y B son $(1, -4)$ y $(-5, 6)$. El segmento $\overline{AB}$ "se traslada" hasta el segmento $\overline{A'B'}$ de modo que las coordenadas de A' sean $(3, -1)$. ¿Cuál es el vector de traslación? ¿Cuáles son las coordenadas de B'?

11. Los puntos $A(0, 6)$, $B(8, 2)$ y $C(5, 4)$ son los vértices de un triángulo que "se traslada" hasta $A'B'C'$ de modo que las coordenadas de A' sean $(9, 2)$. ¿Cuál es el vector de traslación? ¿Cuáles son las coordenadas de B' y C'?

12. El triángulo de vértices $M'N'P'$ es simétrico del triángulo MNP respecto del eje X. Si las coordenadas de M, N y P son $(3, 3)$, $(5, 1)$ y $(12, 8)$, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos M', N' y P', respectivamente?

13. El triángulo de vértices $M'N'P'$ es simétrico del triángulo MNP respecto del eje Y. Si las coordenadas de M, N y P son $(3, 3)$, $(5, 1)$ y $(12, 8)$, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos M', N' y P', respectivamente?

14. Se traslada el segmento $\overline{AB}$ de extremos $A(1, 5)$ y $B(5, 1)$ según el vector $(2, 3)$ y se obtiene $\overline{A'B'}$; luego se traslada el segmento $\overline{A'B'}$ según el vector $(4, -3)$ y se obtiene $\overline{A''B''}$. ¿Cuál es el vector que permite trasladar el segmento $\overline{AB}$ hasta el segmento $\overline{A''B''}$?

15. El punto P' es simétrico del punto P de coordenadas $(3, 2)$ respecto de la recta $y = x$; el punto P'' es simétrico del punto P' respecto del eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de P' y P''?

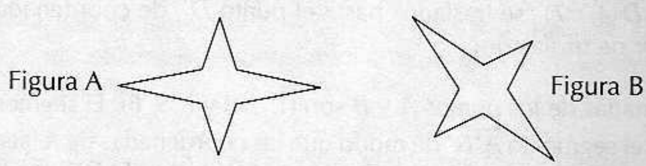
16. ¿Qué sucede si se efectúan las simetrías indicadas en el problema anterior, pero en orden inverso? ¿Qué coordenadas coinciden?

17. ¿Qué transformación se le ha hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?

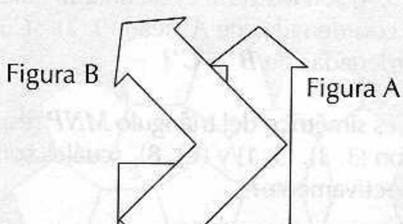
18. ¿Qué transformación se le ha hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?

19. ¿Qué transformaciones se le han hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?

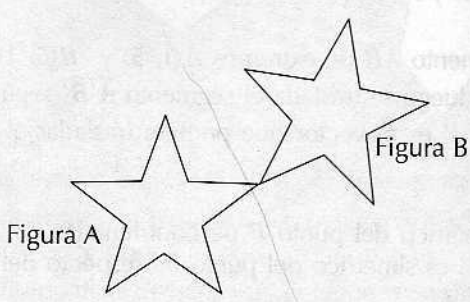
20. ¿Qué transformaciones se le han hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?



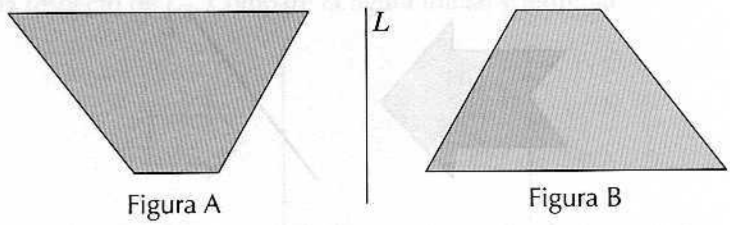
21. ¿Qué transformación se le ha hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?



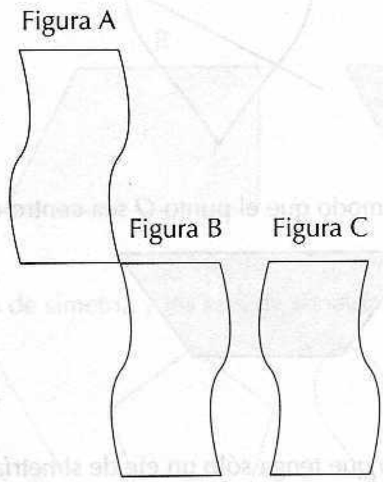
22. ¿Qué transformaciones se le han hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?



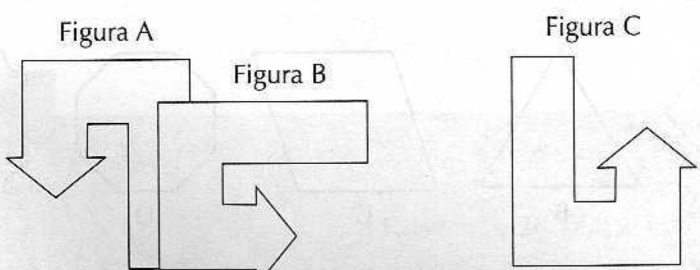
23. ¿Qué transformaciones se le han hecho a la Figura A para llegar a la Figura B?



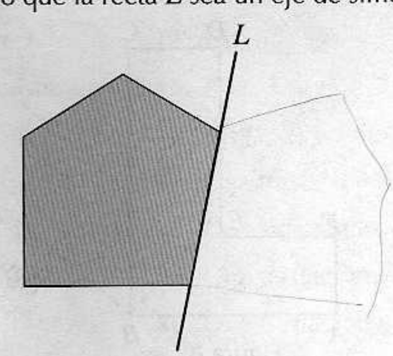
24. ¿Qué transformaciones se le han hecho a la Figura A para llegar a la Figura B y posteriormente a la Figura C?



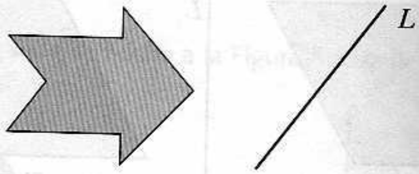
25. ¿Qué transformaciones se le han hecho a la Figura A para llegar a la Figura B y posteriormente a la Figura C?



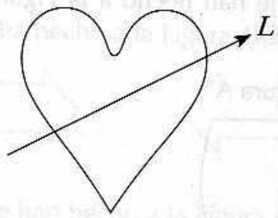
26. Complete la figura de modo que la recta L sea un eje de simetría.



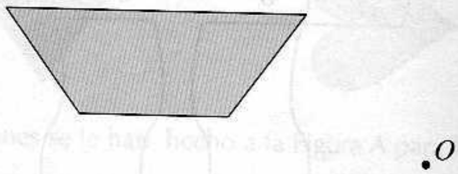
27. Complete la figura de modo que la recta L sea un eje de simetría.



28. Complete la figura de modo que la recta L sea un eje de simetría.



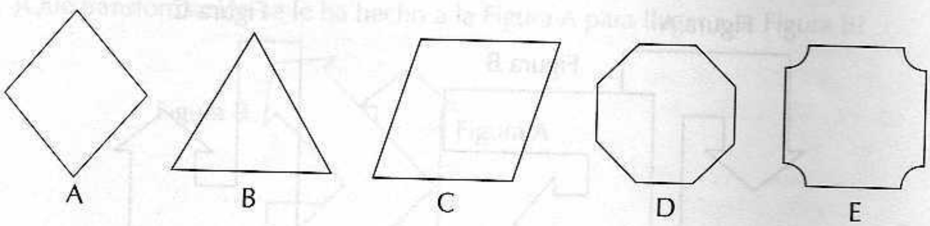
29. Complete la figura de modo que el punto O sea centro de simetría.



30. Dibuje un cuadrilátero que tenga sólo un eje de simetría.

31. Dibuje un cuadrilátero que tenga dos ejes de simetría.

32. De las siguientes figuras, ¿cuál(es) tiene(n) centro de simetría? Determínelo.



33. Determine el centro de giro y el ángulo de giro de la Figura A para llegar a la Figura B:

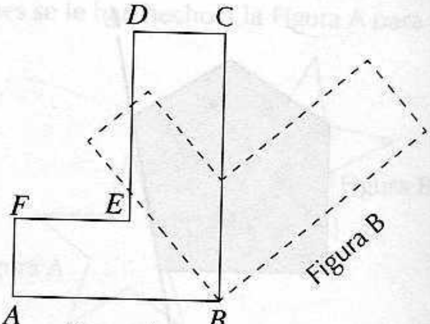
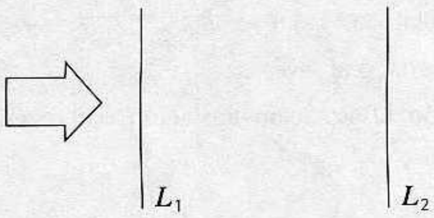
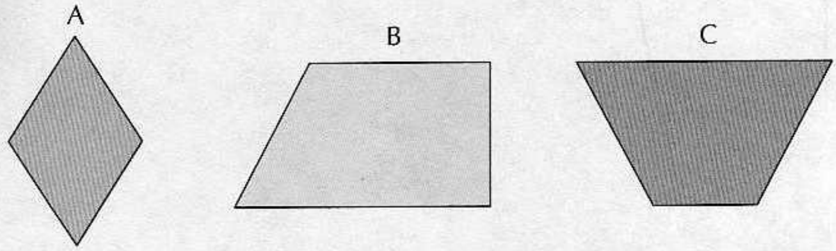


Figura A

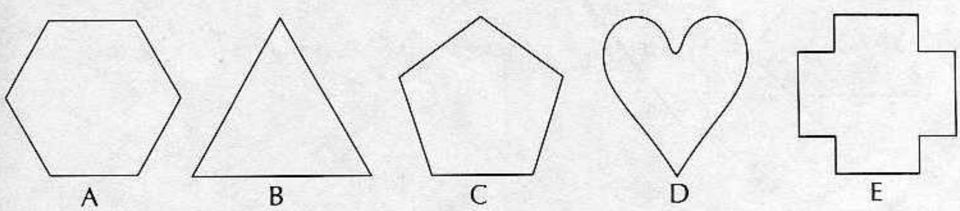
34. Trace el simétrico de la figura respecto de L_1 y luego trace el simétrico de la figura obtenida respecto de L_2. Compare la figura inicial y terminal.



35. Identifique los ejes de simetría de las siguientes figuras:



36. Identifique los centros de simetría y los ejes de simetría de las siguientes figuras.



Soluciones

1. $P'(1, 2)$
2. $P'(-1, -2)$
3. $P'(-2, 1)$
4. $(5, 2)$ y $(7, -5)$, respectivamente.
5. $(-2, 2)$, $(0, -5)$ y $(1, -2)$, respectivamente.
6. $(4, -2)$
7. $(-2, 4)$
8. Hay tres soluciones: $(0, -1)$, $(4, 3)$, $(10, -1)$
9. $v(-6, 10)$
10. $v(2, 3)$ y $B'(-3, 9)$
11. $v(9, -4)$, $B'(17, -2)$ y $C'(14, 0)$
12. $M'(3, -3)$; $N'(5, -1)$ y $P'(12, -8)$
13. $M'(-3, 3)$; $N'(-5, 1)$ y $P'(-12, 8)$
14. $v(6, 0)$
15. $P'(2, 3)$ y $P''(-2, 3)$
16. $P'(-3, 2)$ y $P''(3, -2)$. Ninguna coincide.
17. Una traslación horizontal.
18. Una simetría axial.
19. Una traslación y una rotación.
20. Una traslación y una rotación.

21. Una traslación y una rotación.

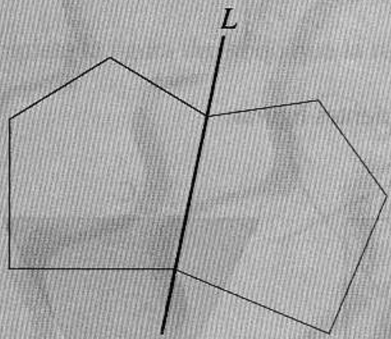
22. Una rotación y una traslación.

23. Una simetría y una rotación, o al revés.

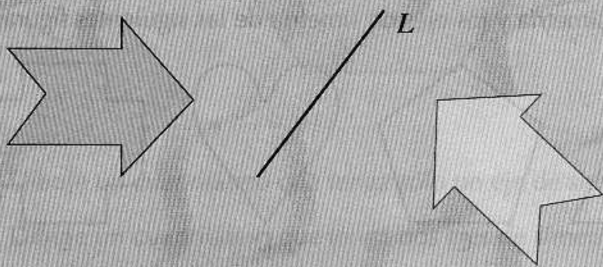
24. (1) Rotación, (2) Simetría, o al revés.

25. (1) Rotación–traslación, (2) Rotación–traslación, o al revés.

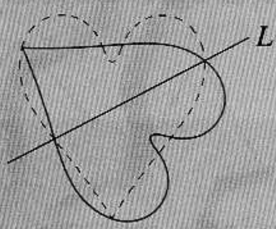
26.



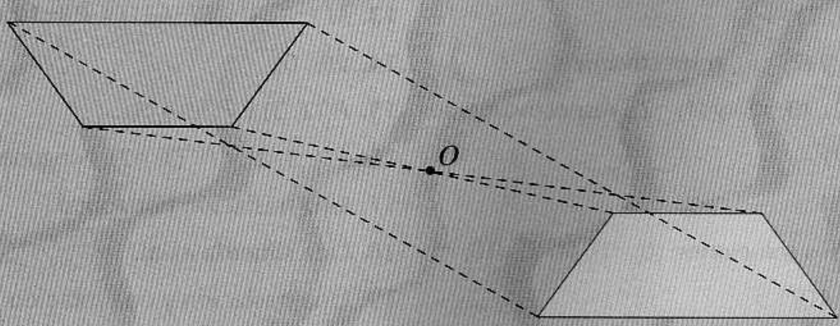
27.



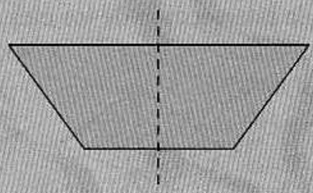
28.



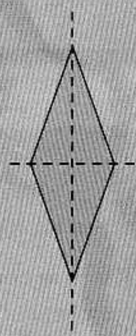
29.



30. El trapecio isósceles es un ejemplo de cuadrilátero que tiene un solo eje de simetría.



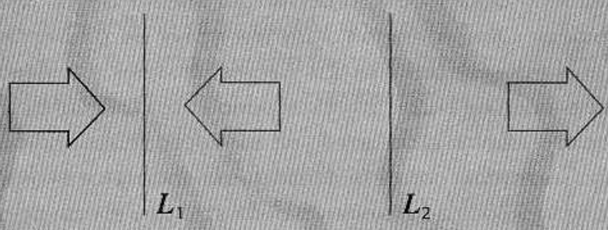
31. El rombo tiene dos ejes de simetría.



32. Las figuras A, C, D y E.

33. El giro se efectuó en torno al vértice B, fue de 45° y en sentido negativo.

34.



La figura final se obtiene de una traslación aplicada a la figura inicial.

35. En la Figura A, ambas diagonales.

La Figura B no tiene.

La Figura C tiene un eje que es la recta vertical, perpendicular a las bases y que pasa por el punto medio de ambas.

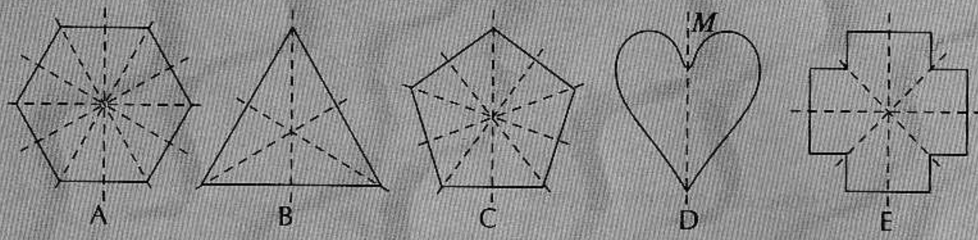
36. La Figura A tiene 6 ejes de simetría: las tres diagonales y los tres segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos. El centro de simetría es la intersección de los ejes.

La Figura B tiene 3 ejes de simetría, que son las tres bisectrices (alturas o transversales de gravedad). No tiene centro de simetría.

La Figura C tiene 5 ejes de simetría, que son los segmentos determinados por cada vértice y el punto medio del lado opuesto. No tiene centro de simetría.

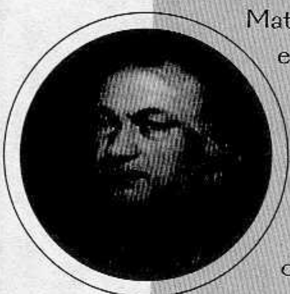
La Figura D tiene 1 eje de simetría, que es la recta vertical, que une los puntos D y M. No tiene centro de simetría.

La Figura E tiene 4 ejes de simetría, que son las diagonales de los vértices interiores y los dos segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos. Tiene un centro de simetría, que es la intersección de los ejes.



PIERRE DE FERMAT

(Beaumont, Francia, 1601-Castres, id., 1665)



Matemático francés. Poco se conoce de sus primeros años, excepto que estudió derecho, posiblemente en Toulouse y Burdeos. Interesado por las matemáticas, en 1629 abordó la tarea de reconstruir algunas de las demostraciones perdidas del matemático griego Apolonio relativas a los lugares geométricos; a tal efecto desarrollaría, contemporánea e independientemente de René Descartes, un método algebraico para tratar cuestiones de geometría por medio de un sistema de coordenadas. Diseñó asimismo un algoritmo de diferenciación mediante el cual pudo determinar los valores máximos y mínimos de una curva polinómica, amén de trazar las correspondientes tangentes, logros todos ellos que abrieron el camino al desarrollo ulterior del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz. Tras asumir correctamente que cuando la luz se desplaza en un medio más denso su velocidad disminuye, demostró que el camino de un rayo luminoso entre dos puntos es siempre aquel que menos tiempo le cuesta recorrer; de dicho principio, que lleva su nombre, se deducen las leyes de la reflexión y la refracción. En 1654, y como resultado de una larga correspondencia, desarrolló con Blaise Pascal los principios de la teoría de la probabilidad. Otro campo en el que realizó destacadas aportaciones fue el de la teoría de números, en la que empezó a interesarse tras consultar una edición de la Aritmética de Diofanto; precisamente en el margen de una página de dicha edición fue donde anotó el célebre teorema que lleva su nombre y que tardaría más de tres siglos en demostrarse. De su trabajo en dicho campo se derivaron importantes resultados relacionados con las propiedades de los números primos, muchas de las cuales quedaron expresadas en forma de simples proposiciones y teoremas. Desarrolló también un ingenioso método de demostración que denominó «del descenso infinito». Extremadamente prolífico, sus deberes profesionales y su particular forma de trabajar (sólo publicó una obra científica en vida) redujeron en gran medida el impacto de su obra.

Prueba de selección múltiple

1. Al segmento $\overline{AB}$, cuyas coordenadas son $A(2, 4)$ y $B(4, 2)$, se le aplica una traslación que lo transforma en el segmento $\overline{A'B'}$. Si las coordenadas de A' son $(-1,3)$, ¿cuáles son las coordenadas de B'?

A. (2, 2)

B. (2, −2)

C. (3, 1)

D. (−3, −1)

E. (1, 1)

2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto simétrico de $P(-2,3)$ respecto del eje Y?

A. (−2, −3)

B. (2, 3)

C. (2, −3)

D. (3, −2)

E. (3, 2)

3. Al punto $Q(-5, 2)$ se le efectúa una rotación de 90° en torno al origen y en sentido positivo. ¿Cuáles son sus nuevas coordenadas?

A. (2, 5)

B. (−2, 5)

C. (−2, −5)

D. (5, −2)

E. (−5, −2)

4. El punto $M(-1, -4)$ se traslada según el vector $(-1, -4)$ hasta coincidir con el punto R. ¿Cuáles son las coordenadas de R?

A. (0, 0)

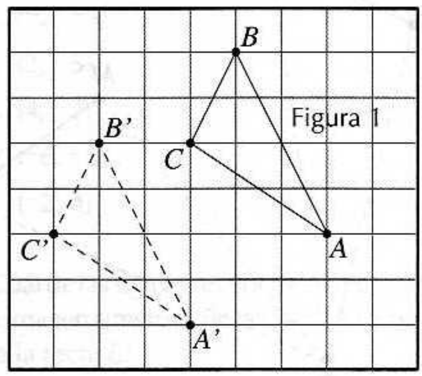
B. (−2, −8)

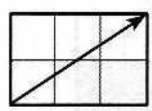
C. (−2, 0)

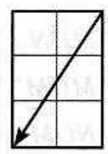
D. (0, −8)

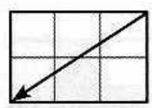
E. (2, 8)

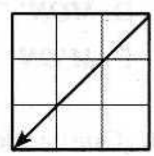
5. El triángulo ABC de la Figura 1 se traslada hasta coincidir con el triángulo $A'B'C'$. ¿Cuál de los siguientes es el vector de traslación?

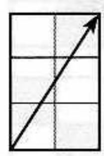


A. 

D. 

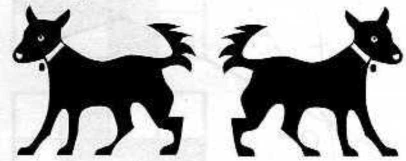
B. 

E. 

C. 

6. ¿Qué transformación se efectuó a la Figura 1 para obtener la Figura 2?

Figura 1 Figura 2



A. Traslación

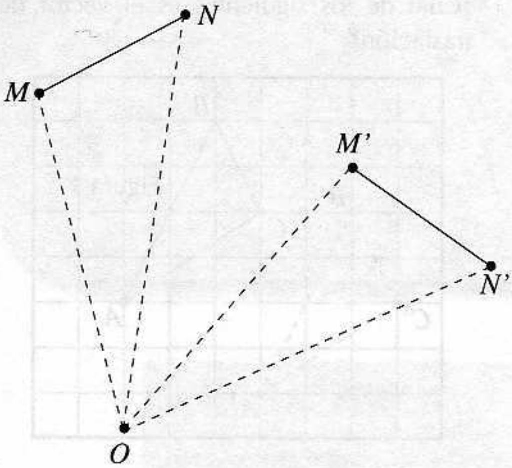
B. Simetría central

C. Simetría axial

D. Rotación

E. Rotación y traslación

7. Si $\overline{M'N'}$ es la imagen de $\overline{MN}$ a través de una rotación con centro O, como muestra la figura, ¿cuál de los siguientes es el ángulo que indica la rotación?



A. *MON*

B. *MOM'*

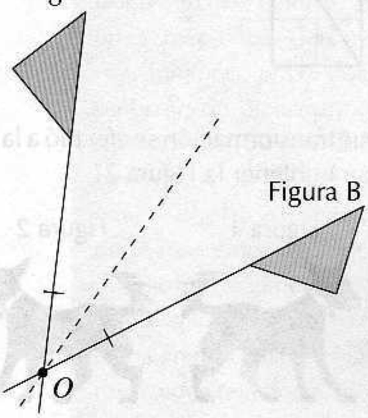
C. *NOM'*

D. *MON'*

E. *M'ON'*

8. ¿Qué transformación se efectuó a la Figura A para obtener la Figura B?

Figura A



A. Traslación

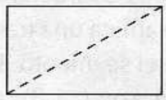
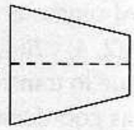
B. Simetría axial

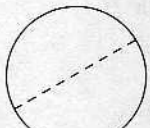
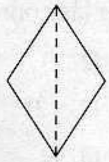
C. Simetría central

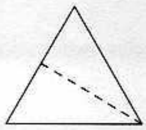
D. Rotación

E. Ninguna de las anteriores

9. ¿En cuál de las siguientes opciones la recta punteada no es un eje de simetría?

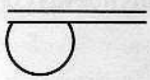
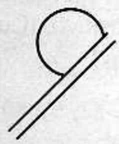
A.  D. 

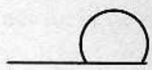
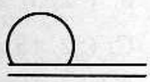
B.  E. 

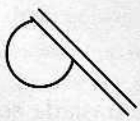
C. 

10. A la Figura A se le ha efectuado una rotación en sentido positivo de 90° en torno al punto P. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la imagen obtenida?

Figura A

A.  D. 

B.  E. 

C. 

11. Al trasladar el punto $R(-5, 3)$ se obtiene el punto $S(0, 0)$. ¿Cuál es el vector de traslación?

A. (5, 3)

B. (5, −3)

C. (10, 3)

D. (−10, 3)

E. (−10, −3)

12. ¿Cuál de las siguientes letras tiene solo un eje de simetría?

A. N

B. P

C. E

D. L

E. O

13. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Si dos puntos son simétricos respecto de un eje, entonces el segmento que los une es perpendicular a dicho eje.

II. Si al punto de coordenadas (x, y) se le aplica una rotación de 90° en torno al origen, sus nuevas coordenadas son $(-y, x)$

III. Dos simetrías sucesivas respecto de ejes paralelos son equivalentes a una traslación cuya magnitud es igual a la distancia entre los ejes.

A. Sólo I

B. Sólo II

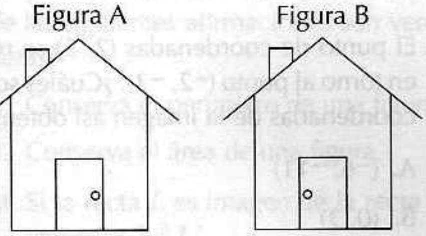
C. Sólo I y II

D. Sólo II y III

E. I, II y III

14. ¿Qué transformación se le aplicó a la Figura A para obtener la Figura B?

Figura A Figura B



A. Traslación

B. Simetría axial

C. Simetría central

D. Rotación

E. Ninguna de las anteriores

15. Si al punto de coordenadas $(8, -2)$ se le aplica una traslación según el vector $(-4, 0)$ y luego, una segunda traslación que lo transforma en el punto de coordenadas $(2, -7)$, ¿cuál es el vector de esta segunda traslación?

A. $(-2, -5)$

B. $(2, -5)$

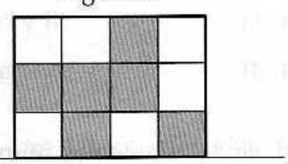
C. $(4, -2)$

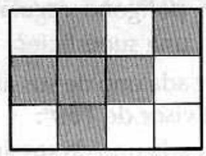
D. $(-6, -5)$

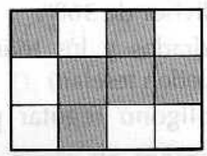
E. $(-2, 4)$

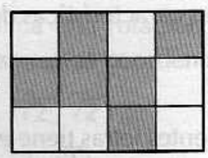
16. ¿Cuál de las siguientes opciones representa la imagen simétrica de la Figura A respecto de la recta L?

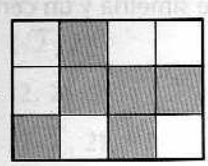
Figura A

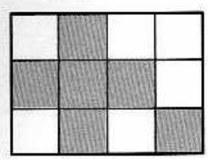


A. 

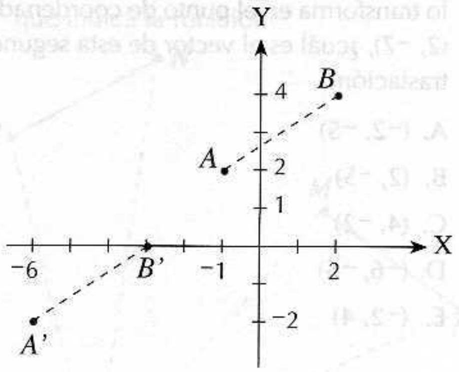
B. 

C. 

D. 

E. 

17. ¿Cuál es el vector que permite trasladar el segmento $\overline{AB}$ hasta el segmento $\overline{A'B'}$ (en ese orden)?



A. (−5, −4)

B. (−4, −5)

C. (5, 4)

D. (4, 5)

E. (4, 3)

18. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto de la condición que debe cumplir un polígono regular para que pueda teselar una superficie?

A. La medida de cada uno de sus ángulos interiores es divisor de 180°.

B. La medida de cada uno de sus ángulos interiores es divisor de 360°.

C. Sólo los cuadrados y los triángulos equiláteros pueden teselar.

D. Cualquier polígono regular puede teselar.

E. Depende de las características de cada polígono.

19. ¿Cuál de las siguientes letras tiene exactamente dos ejes de simetría y un centro de simetría?

A. **A**

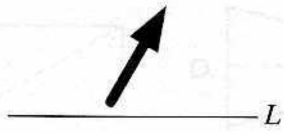
B. **B**

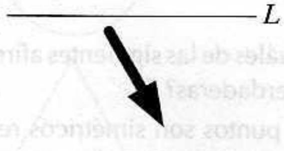
C. **Z**

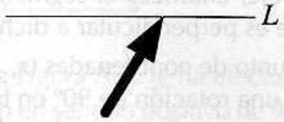
D. **X**

E. **N**

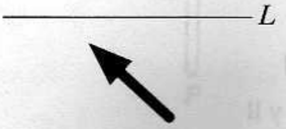
20. ¿Qué opción representa el reflejo de la flecha en torno a la recta L?

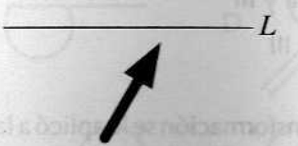


A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

21. El punto de coordenadas (2, 5) se refleja en torno al punto (−2, −3). ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen así obtenida?

A. (−6, −11)

B. (0, 3)

C. (−6, 3)

D. (0, 11)

E. (6, 11)

22. El punto de coordenadas (−2, 3) se refleja en torno al punto (0, −1). ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen así obtenida?

A. $(-2, -5)$

B. $(2, -5)$

C. $(2, 2)$

D. $(-2, 2)$

E. $(2, -4)$

23. El punto de coordenadas $(3, 1)$ se ha reflejado en torno al punto (x, y) y se ha obtenido el punto $(-5, -3)$. ¿Cuáles son las coordenadas de (x, y)?

A. $(1, 1)$

B. $(1, -2)$

C. $(-1, -1)$

D. $(1, -1)$

E. $(-2, 1)$

24. Respecto de una traslación, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A. Conserva el área de una figura.

B. Conserva la pendiente de una recta.

C. Conserva la dirección de un vector.

D. Si la recta L es imagen de la recta L', entonces, $L \parallel L'$.

E. Si A' es la imagen de A y B' es la imagen de B, entonces $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$.

25. Respecto de una reflexión, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Conserva el perímetro de una figura.

II. Conserva el área de una figura.

III. Si la recta L es imagen de la recta L', entonces $L \parallel L'$.

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo II y III

E. Todas

26. Rrespecto de una rotación, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Al componer dos rotaciones con el mismo centro, se obtiene una rotación.

II. Una rotación en 180° es equivalente a una simetría axial.

III. Si M' y N' son imágenes de M y N, respectivamente, a través de la rotación con centro en O y ángulo α, entonces $\measuredangle M'ON' = \alpha$.

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo I y III

E. Todas

27. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al efectuar una reflexión del punto $(3, -3)$ respecto de la recta $y = -x$?

A. $(3, 3)$

B. $(-3, 3)$

C. $(-3, 0)$

D. $(3, -3)$

E. $(3, 0)$

28. Al punto de coordenadas $(\sqrt{2}, 0)$ se le aplica una rotación en 45°. ¿Cuáles son sus nuevas coordenadas?

A. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

B. $(2, \sqrt{2})$

C. $(\sqrt{2}, 2)$

D. $(2, 2)$

E. $(2\sqrt{2}, 2)$

29. ¿Cuál es el punto simétrico de $(-2, 3)$ respecto del eje de las abscisas?

A. $(2, 3)$

B. $(2, -3)$

C. $(-2, -3)$

D. $(-2, 0)$

E. $(0, 2)$

30. ¿Cuál es el punto simétrico de $(0, -2)$ respecto del eje de las ordenadas?

A. $(2, 0)$

B. $(-2, 0)$

C. $(0, 2)$

D. $(0, -2)$

E. $(2, 2)$

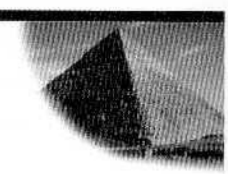
Soluciones

1. D	**6.** C	**11.** B	**16.** C	**21.** A	**26.** A
2. B	**7.** B	**12.** C	**17.** A	**22.** B	**27.** D
3. C	**8.** B	**13.** E	**18.** B	**23.** C	**28.** A
4. B	**9.** A	**14.** E	**19.** D	**24.** E	**29.** C
5. B	**10.** A	**15.** A	**20.** A	**25.** C	**30.** D

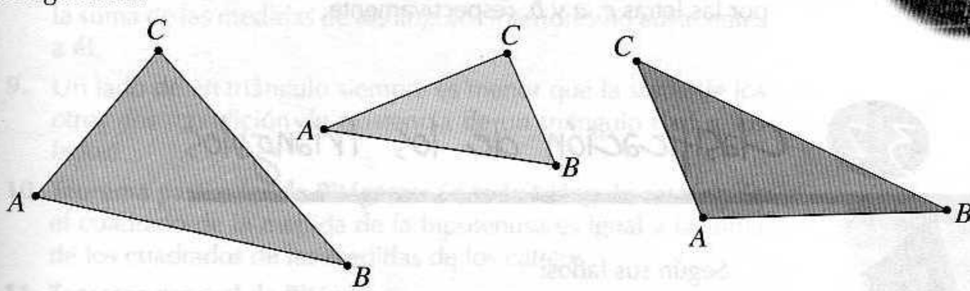
CAPÍTULO 3

Triángulos

Definiciones 3.1



Se llama **triángulo** a una porción cerrada del plano limitada por tres segmentos.

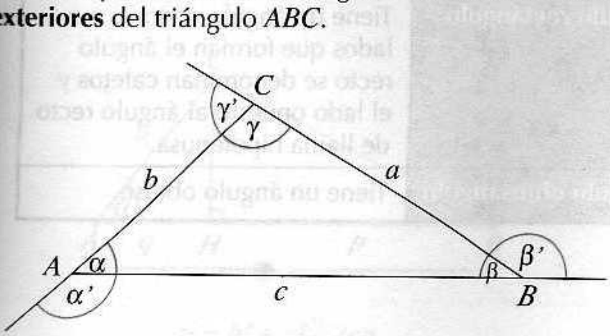


Otra definición de triángulo podría ser: Dados tres puntos no colineales, A, B y C, se llama **triángulo** a la unión de los tres segmentos generados por los tres puntos.

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llaman **lados** del triángulo. Las intersecciones de los segmentos A, B y C se denominan **vértices** del triángulo.

Los ángulos $\measuredangle CAB$, $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$ se llaman **ángulos interiores** del triángulo ABC.

Los suplementos de los ángulos interiores se denominan **ángulos exteriores** del triángulo ABC.



En la figura anterior, los ángulos de medidas α, β y γ son interiores del triángulo ABC. Los ángulos de medidas α', β' y γ' son los respectivos ángulos exteriores del triángulo ABC.

Se dice que:

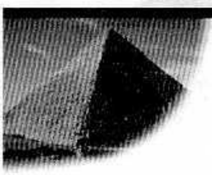
- El ángulo BAC de medida α está **comprendido** entre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ y es **opuesto** al lado $\overline{CB}$.
- El ángulo ABC de medida β está **comprendido** entre los lados $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ y es **opuesto** al lado $\overline{AC}$.
- El ángulo BCA de medida γ está **comprendido** entre los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ y es **opuesto** al lado $\overline{AB}$.

También se dice que:

- Los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle ABC$ de medidas α y β son **adyacentes** al lado $\overline{AB}$.
- Los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$ de medidas β y γ son **adyacentes** al lado $\overline{BC}$.
- Los ángulos $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle CAB$ de medidas γ y α son **adyacentes** al lado $\overline{AC}$.

Las medidas de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ normalmente se designan por las letras c, a y b, respectivamente.

3.2 Clasificación de los triángulos



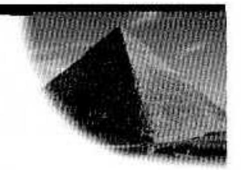
Según sus lados:

Triángulo equilátero	Tiene los tres lados congruentes.
Triángulo isósceles	Tiene dos lados congruentes. El tercer lado se denomina base.
Triángulo escaleno	Tiene sus tres lados distintos.

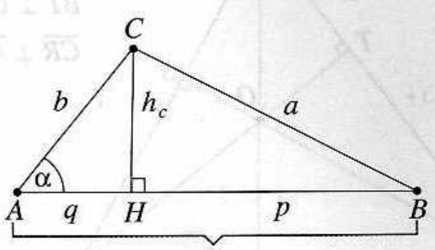
Según sus ángulos:

Triángulo acutángulo	Tiene sus tres ángulos agudos.
Triángulo rectángulo	Tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto de llama hipotenusa.
Triángulo obtusángulo	Tiene un ángulo obtuso.

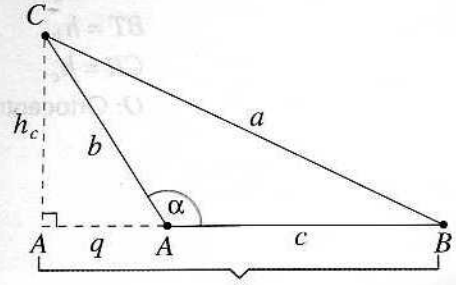
Teoremas sobre triángulos 3.3



1. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° (ver ejercicio resuelto nº 3).
2. En un triángulo, a mayor (menor) lado se opone mayor (menor) ángulo (ver ejercicio resuelto nº 5).
3. En un triángulo, a mayor (menor) ángulo se opone mayor (menor) lado.
4. En un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.
5. Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden todos 60º.
6. En un triángulo isósceles, los ángulos basales son congruentes (ver ejercicio resuelto nº 4).
7. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.
8. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.
9. Un lado de un triángulo siempre es menor que la suma de los otros dos (condición de existencia de un triángulo dados sus lados).
10. **Teorema particular de Pitágoras:** En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.
11. **Teorema general de Pitágoras:**
    a) En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la medida del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados menos el doble de la medida de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.
    b) En un triángulo obtusángulo, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados más el doble de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$



$a^2 = b^2 + c^2 + 2cq$

El Teorema general de Pitágoras es un criterio para determinar si un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo cuando se conocen sus tres lados.

12. Teorema de Euclides:

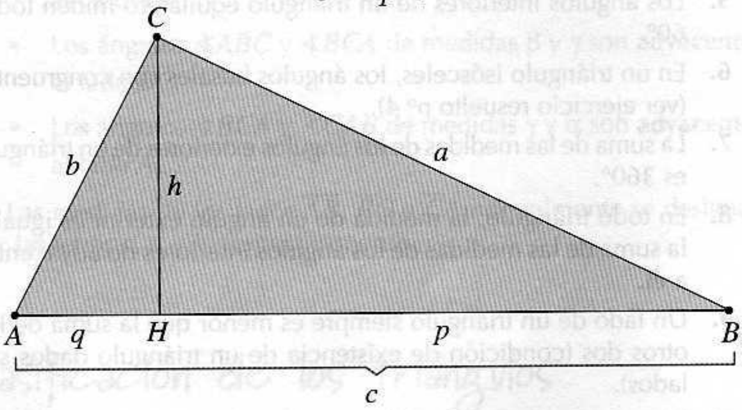
En todo triángulo rectángulo:

a) El cuadrado de la medida de la altura respecto de la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (Ver página 278).

$$h^2 = p \cdot q$$

b) El cuadrado de la medida de uno de los catetos es igual al producto de su proyección sobre la hipotenusa y la medida de la hipotenusa completa.

$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = q \cdot c$$



3.4 Elementos secundarios de un triángulo

Alturas (h_a, h_b, h_c)

Se llama **altura** al segmento que une un vértice perpendicularmente con el lado opuesto.

Sus medidas se denotan:

$AS = h_a$

$BT = h_b$

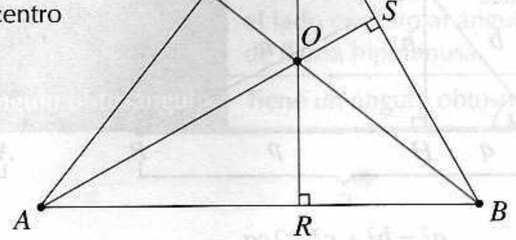
$CR = h_c$

O: Ortocentro

$\overline{AS} \perp \overline{CB}$

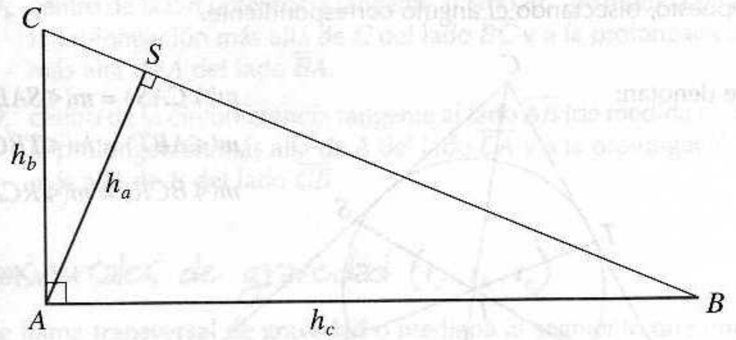
$\overline{BT} \perp \overline{CA}$

$\overline{CR} \perp \overline{AB}$



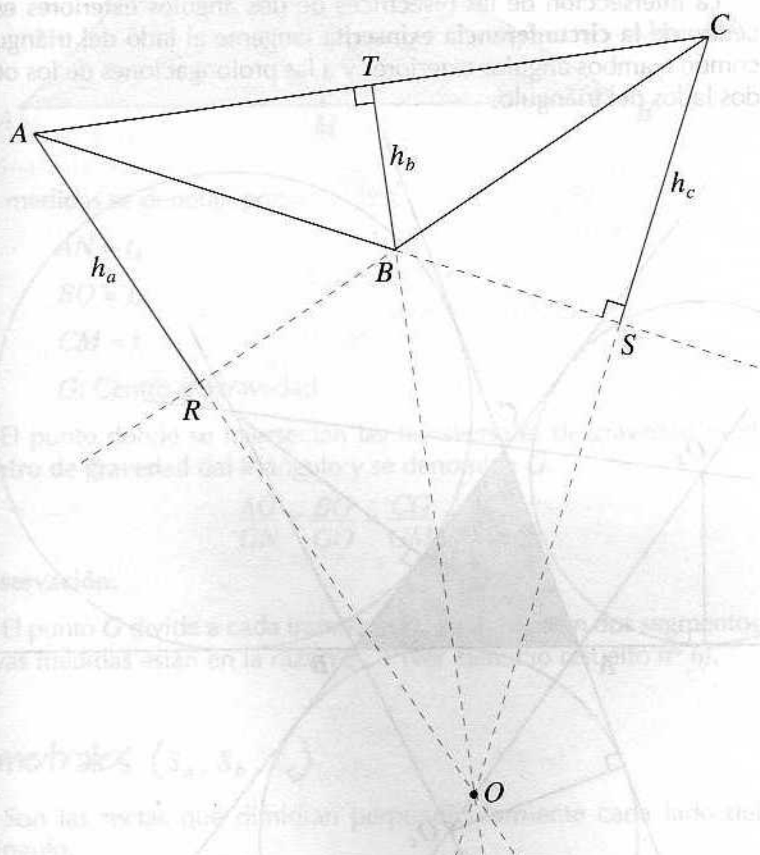
El punto de intersección de las alturas se llama **ortocentro**.

Si el triángulo es acutángulo, las alturas se intersectan en su interior, como se muestra en la figura anterior. Si es rectángulo, las alturas se intersectan en el vértice del ángulo recto.



En el triángulo ABC, rectángulo en A, las alturas concurren en el ortocentro O, el cual coincide con el vértice A y los pies de las alturas h_b y h_c.

Si es obtusángulo, las prolongaciones de las alturas se intersectan en el exterior del triángulo.



Bisectrices (b_a, b_b, b_c)

Se llama **bisectriz** al segmento que une un vértice con su lado opuesto, bisectando el ángulo correspondiente.

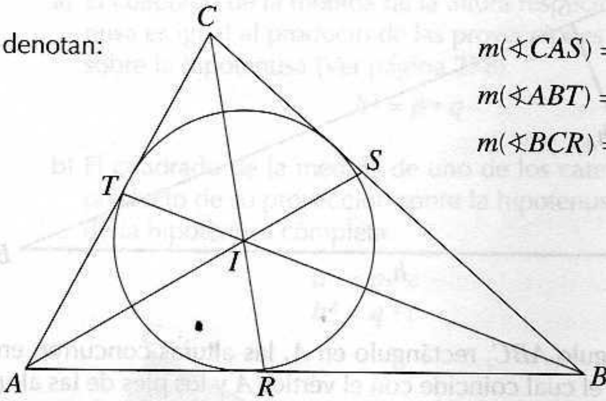
Sus medidas se denotan:

$AS = b_a$

$BT = b_b$

$CR = b_c$

I = Incentro



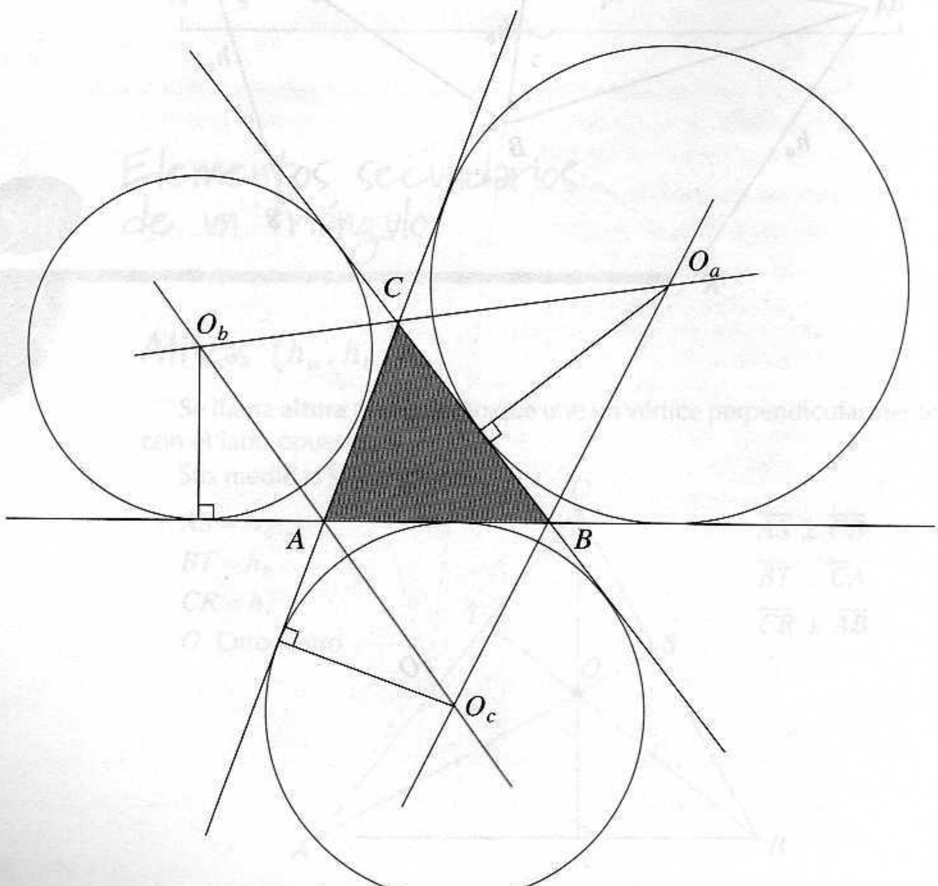
$m(\sphericalangle CAS) = m(\sphericalangle SAB)$

$m(\sphericalangle ABT) = m(\sphericalangle TBC)$

$m(\sphericalangle BCR) = m(\sphericalangle RCA)$

El punto de intersección de las bisectrices se llama **incentro** y es el centro de la **circunferencia inscrita** en el triángulo (ver página 329).

La intersección de las bisectrices de dos ángulos exteriores es el centro de la **circunferencia exinscrita** tangente al lado del triángulo, común a ambos ángulos exteriores y a las prolongaciones de los otros dos lados del triángulo.



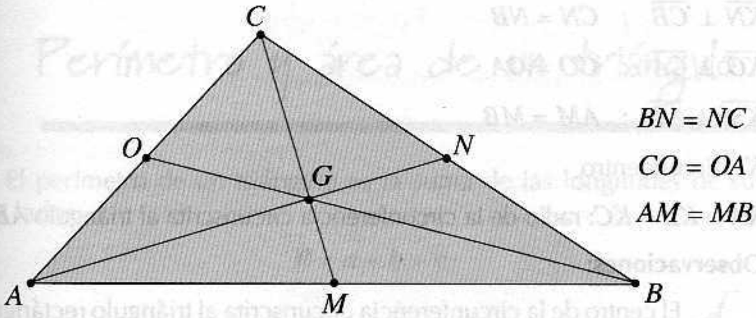
O_a centro de la circunferencia tangente al lado $\overline{BC}$ (de medida a), a la prolongación más allá de C del lado $\overline{AC}$ y a la prolongación más allá de B del lado $\overline{AB}$.

O_b centro de la circunferencia tangente al lado $\overline{AC}$ (de medida b), a la prolongación más allá de C del lado $\overline{BC}$ y a la prolongación más allá de A del lado $\overline{BA}$.

O_c centro de la circunferencia tangente al lado $\overline{AB}$ (de medida c), a la prolongación más allá de A del lado $\overline{CA}$ y a la prolongación más allá de B del lado $\overline{CB}$.

Transversales de gravedad (t_a, t_b, t_c)

Se llama **transversal de gravedad** o mediana al segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.



Sus medidas se denotan por:

$AN = t_a$

$BO = t_b$

$CM = t_c$

G: Centro de gravedad

El punto donde se intersectan las transversales de gravedad es el **Centro de gravedad** del triángulo y se denomina G.

$$\frac{AG}{GN} = \frac{BG}{GO} = \frac{CG}{GM} = \frac{2}{1}$$

Observación:

El punto G divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos cuyas medidas están en la razón 2 : 1 (ver ejercicio resuelto nº 6).

Simetrales (s_a, s_b, s_c)

Son las rectas que dimidian perpendicularmente cada lado del triángulo.

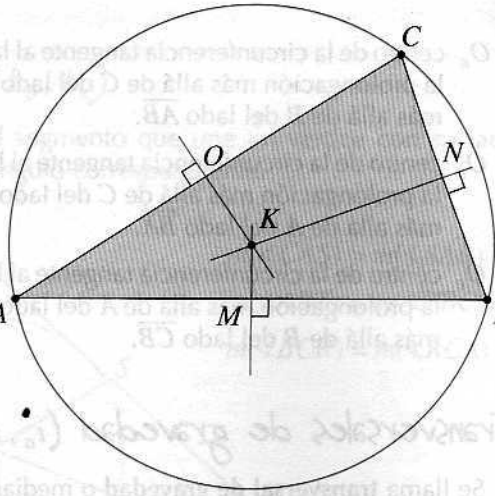
Estas tres rectas se intersectan en el punto K, que se denomina **circuncentro** y es el centro de la **circunferencia circunscrita** al triángulo (ver página 329).

Llamaremos medidas de las simetrales a los segmentos:

$KN = s_a$

$KO = s_b$

$KM = s_c$



$\overline{KN} \perp \overline{CB}$; $CN = NB$

$\overline{KO} \perp \overline{CA}$; $CO = OA$

$\overline{KM} \perp \overline{AB}$; $AM = MB$

K: Circuncentro

$KA = KB = KC$: radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Observaciones:

1. El centro de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo se ubica en el punto medio de la hipotenusa. Si el triángulo es acutángulo, el circuncentro es punto de su interior y si es obtusángulo, es de su exterior.
2. En un triángulo rectángulo, la transversal de gravedad correspondiente al ángulo recto mide la mitad de la hipotenusa y es igual al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Medianas

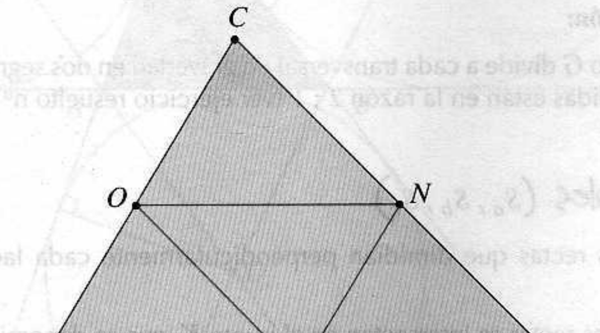
Se llama **mediana** al segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo.

$AM = MB$

$BN = NC$

$CO = OA$

$\overline{OM}$, $\overline{MN}$ y $\overline{ON}$ medianas



Observaciones:

1. Cada mediana es igual a la mitad del lado que no contiene sus extremos.
2. Cada mediana es paralela al lado que no contiene sus extremos.
3. En un triángulo equilátero, las alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad respectivas a cada uno de los lados están contenidas en la misma recta, y:

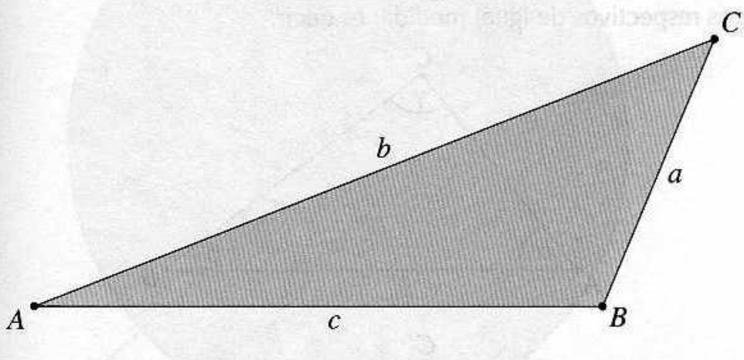
$$h_a = b_a = t_a, \quad h_b = b_b = t_b, \quad h_c = b_c = t_c$$

4. En un triángulo isósceles, la altura, la bisectriz, la simetral y la transversal de gravedad correspondientes a la base (lado distinto) son coicidentes.

Perímetro y área de un triángulo 3.5

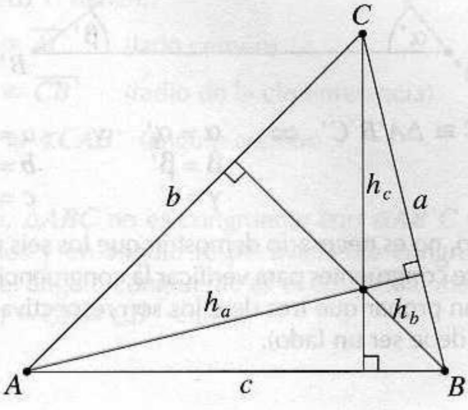
El perímetro de un triángulo es la suma de las longitudes de sus tres lados.

$$P = a + b + c$$



El área de un triángulo se puede calcular de diversas formas:

1. El área del triángulo ABC se calcula multiplicando la medida de uno de sus lados por la altura correspondiente y dividiendo por dos.



$$A_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

2. Fórmula de Herón. Si se conoce la medida de los tres lados,

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)(s-c)},$$

donde: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro)

3. Área del triángulo en función del radio de la circunferencia inscrita (r) y del semiperímetro (s). (Ver ejercicio resuelto nº 17).

$$A_{\triangle ABC} = r \cdot s$$

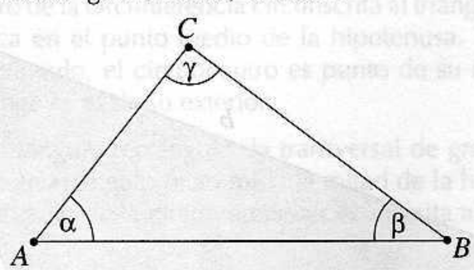
4. Área del triángulo en función del radio de la circunferencia circunscrita (R) y del producto de la medida de sus lados. (Ver ejercicio resuelto nº 23).

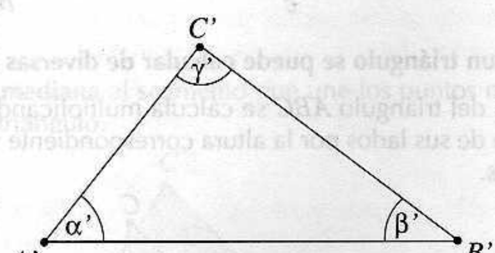
$$A_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

3.6 Congruencia de triángulos

Dos figuras son congruentes si al poner una sobre otra se confunden, ya que coinciden en toda su extensión, es decir, tienen igual forma y las mismas dimensiones.

Dos triángulos son congruentes si tienen todos sus elementos homólogos respectivos de igual medida; es decir:





$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff \begin{array}{lcl} \alpha = \alpha' & \text{y} & a = a' \\ \beta = \beta' & & b = b' \\ \gamma = \gamma' & & c = c' \end{array}$$

Sin embargo, no es necesario demostrar que los seis elementos son respectivamente congruentes para verificar la congruencia de dos triángulos. Basta con probar que tres de ellos son respectivamente iguales (uno al menos debe ser un lado).

Consideramos cuatro casos de congruencia de triángulos:

Caso 1: Dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen sus tres lados respectivamente congruentes (L.L.L.)

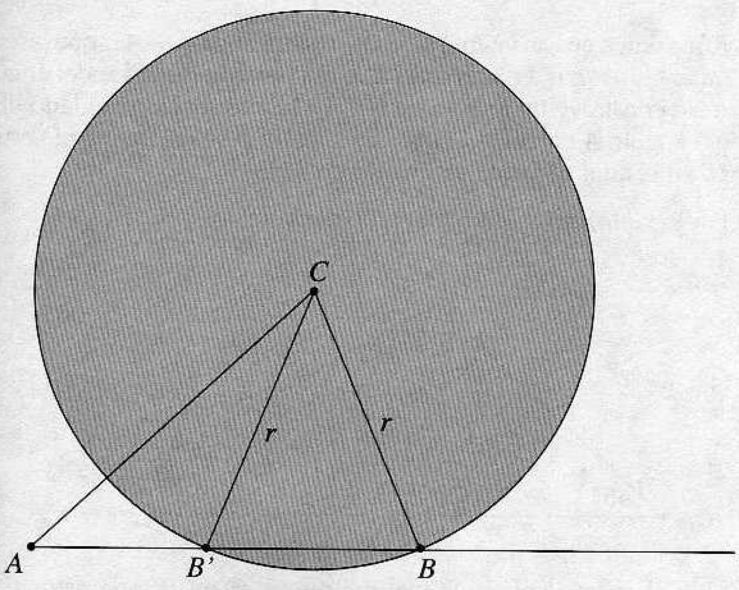
Caso 2: Dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruentes (L.A.L.)

Caso 3: Dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen un lado y los dos ángulos adyacentes a él respectivamente congruentes (A.L.A.)

Caso 4: Dos triángulos son congruentes si y sólo si tienen dos lados congruentes y el ángulo opuesto al mayor de estos lados respectivamente congruentes (L.L.A.)

Observación:

En este cuarto caso es necesario que el ángulo congruente sea el opuesto al mayor de los lados, porque de no ser así pueden existir dos triángulos con dos lados congruentes y el ángulo opuesto al menor de ellos también congruente y los triángulos no ser congruentes. Basta observar en la siguiente figura:



$\triangle ABC$ y $\triangle AB'C$ tienen:

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado común)

$\overline{CB} \cong \overline{CB'}$ (radio de la circunferencia)

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CAB'$ (ángulo común)

Claramente, $\triangle ABC$ no es congruente con $\triangle AB'C$ y sin embargo tienen dos lados y un ángulo respectivamente congruentes. Lo que ocurre es que el ángulo congruente es el opuesto al menor de los dos lados iguales ($r = CB = CB' < CA$).

Ejercicios resueltos

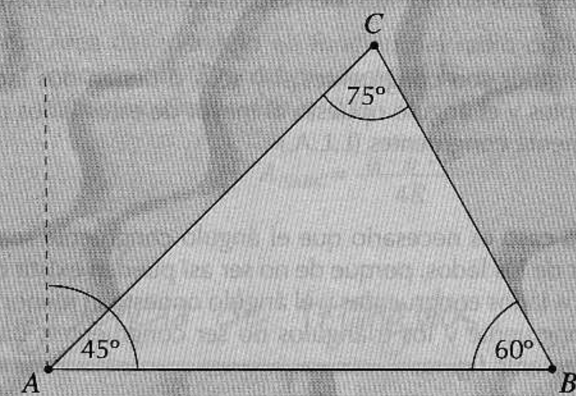
1. Dibujar:

a) Un triángulo acutángulo.

b) Un triángulo rectángulo.

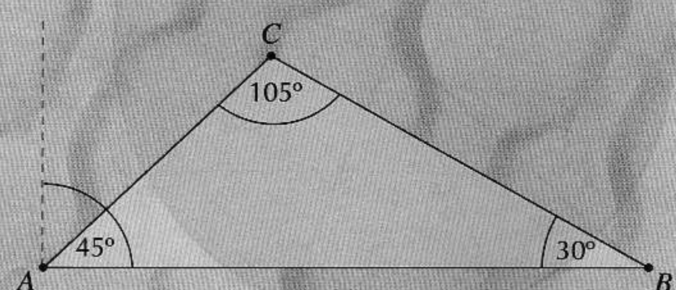
c) Un triángulo obtusángulo.

Solución 1:



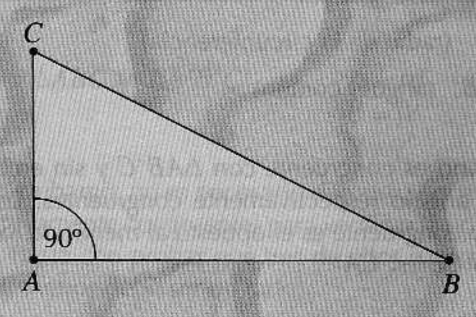
a) Con vértice en un punto *A* se construye un ángulo de 45° que bisecta un ángulo recto. En un punto *B*, sobre uno de los lados del ángulo *A*, se construye un ángulo de 60°. En la intersección del lado libre del ángulo *A* con el lado libre del ángulo *B* se encuentra el vértice *C*, en el cual se forma un ángulo de 75°.

Por lo tanto, *ABC* es un triángulo acutángulo.



b) Con el mismo trabajo inicial del punto a), en *B* se construye un ángulo de 30° y el ángulo en *C* resulta de 105° (obtuso).

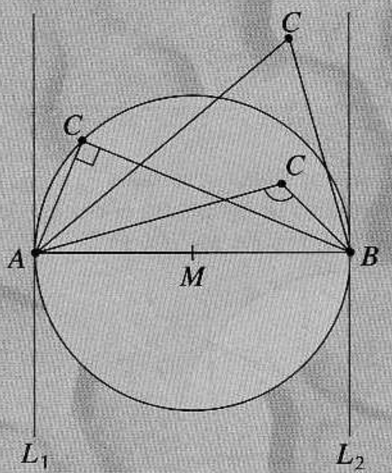
Por lo tanto, *ABC* es un triángulo obtusángulo.



c) Se construye un ángulo recto en A y con cualquier longitud sobre los lados del $\sphericalangle A$ se fijan B y C.

Por lo tanto, ABC es un triángulo rectángulo en A.

Solución 2:



Se traza un segmento cualquiera $\overline{AB}$. Se construye la circunferencia con centro M, punto medio de $\overline{AB}$, y radio $\overline{MA}$.

a) Si C es punto exterior de la circunferencia y se ubica entre las tangentes L_1 y L_2 en los puntos A y B, respectivamente, sin pertenecer a ninguna de ellas, entonces el $\triangle ABC$ es triángulo acutángulo.

b) Si C es punto interior de la circunferencia, entonces el $\triangle ABC$ es triángulo obtusángulo.

c) Si C es un punto de la circunferencia distinto de A y de B, entonces el $\triangle ABC$ es triángulo rectángulo en C.

En forma más general, en la misma figura:

a) Si $C \in \odot$ o $C \in L_1$ o $C \in L_2$ y $C \neq A$ y $C \neq B$, entonces el $\triangle ABC$ es triángulo rectángulo.

b) Si $C \in$ al interior de la circunferencia o al exterior de las paralelas L_1 y L_2, entonces el $\triangle ABC$ es triángulo obtusángulo.

c) Si $C \in$ *al* exterior de la circunferencia y al interior de las paralelas L_1 y L_2, entonces el $\triangle ABC$ es triángulo acutángulo.

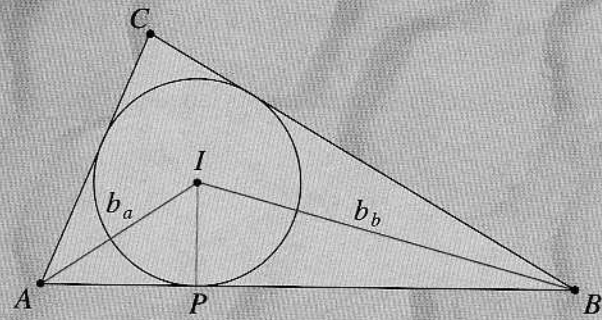
2. Dado un triángulo ABC cualquiera, dibujar:

a) su circunferencia inscrita

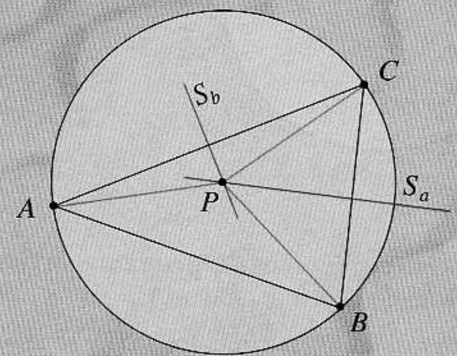
b) su circunferencia circunscrita.

Solución:

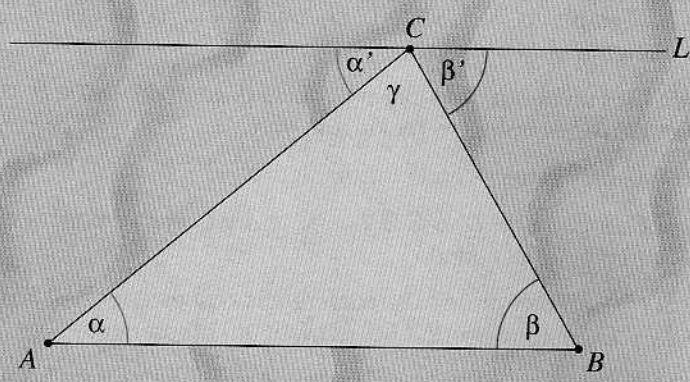
a) En un $\triangle ABC$ se trazan las bisectrices del $\sphericalangle A$ y del $\sphericalangle B$. La intersección de ambas bisectrices es el centro I de la circunferencia inscrita. Desde I se traza la perpendicular al lado $\overline{AB}$, obteniéndose P. Entonces, IP es el radio de la circunferencia inscrita en $\triangle ABC$.



b) En el $\triangle ABC$ cualquiera se trazan las simetrales S_a y S_b. En la intersección P de ambas simetrales se encuentra el centro de la circunferencia circunscrita. Su radio es $PA = PB = PC$.



3. Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.



Solución:

Hipótesis:

ABC, triángulo; α, β y γ, medidas de los ángulos interiores.

Tesis:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Demostración:

a) Por C se traza $\overleftrightarrow{CL} \parallel \overline{AB}$.

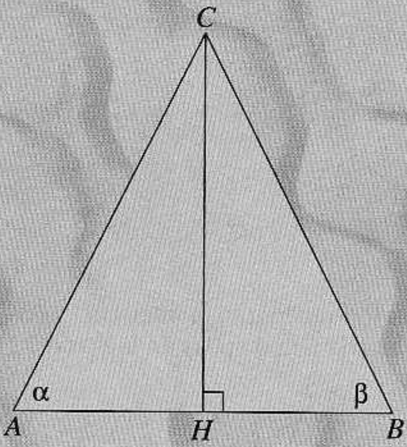
b) $\alpha = \alpha'$ (ángulos alternos internos entre paralelas).

c) $\beta = \beta'$ (ángulos alternos internos entre paralelas).

d) $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$ (forman un ángulo extendido).

e) Reemplazando α' por α y β' por β, tenemos $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

4. Demostrar que los ángulos basales de un triángulo isósceles son congruentes.



Solución:

Hipótesis: ABC, triángulo isósceles de base $\overline{AB}$; α y β, medida de los ángulos basales.

Tesis: $\alpha = \beta$

Demostración:

a) Trazamos la altura $\overline{CH}$ de modo que $\overline{CH} \perp \overline{AB}$.

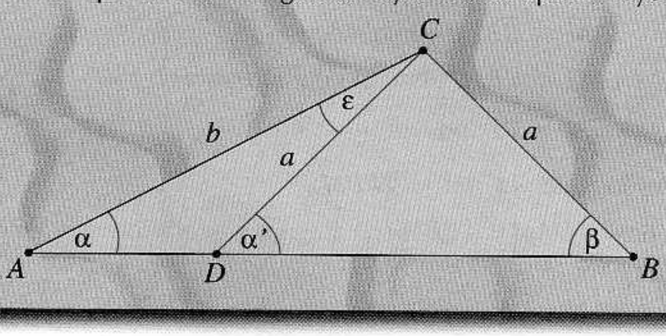
b) $\triangle AHC \cong \triangle BHC$ porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{BC} \text{ (hipótesis)} \\ \overline{CH} \cong \overline{CH} \text{ (lado común)} \\ \measuredangle AHC \cong \measuredangle BHC = 90°;\ CB = CA > CH \end{cases}\right\} \text{(L.L.A)*}$$

c) Por lo tanto, $\alpha = \beta$ por ser elementos homólogos de triángulos congruentes.

Nota:
$AC = BC > CH$ porque la menor distancia desde C al segmento $\overline{AB}$ es la longitud del segmento perpendicular desde C a $\overline{AB}$ (h_c).

5. Demostrar que en todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.



Solución:

Hipótesis: ABC triángulo, $b > a$

Tesis: $\beta > \alpha$

Demostración:

a) $\odot(C, a) \cap \overline{AB} = \{D\}$, con D entre A y B

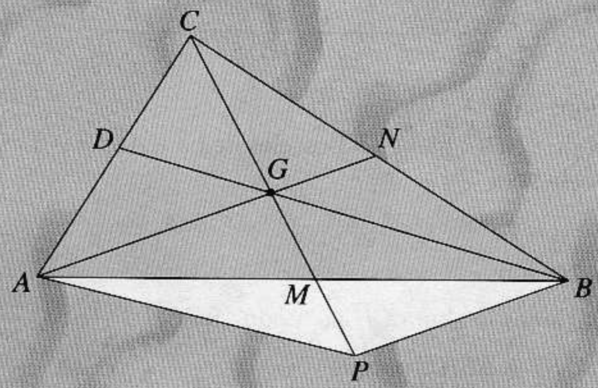
b) $\triangle DBC$ isósceles con $\alpha' = \beta$

c) Pero, $\alpha' = \alpha + \varepsilon$
(ángulo exterior igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él)

d) Por lo tanto, $\beta = \alpha + \varepsilon$

e) Luego, $\beta > \alpha$

6. Demostrar que en todo triángulo la intersección de las transversales de gravedad divide a cada una de ellas en la razón 2 : 1.



Solución:

Hipótesis: ABC, triángulo cualquiera

$\overline{CM}$, $\overline{AN}$ y $\overline{BD}$, transversales de gravedad

G, centro de gravedad.

Tesis: $\dfrac{CG}{GM} = \dfrac{2}{1}$

Demostración:

a) Se prolonga $\overline{GM}$ más allá de M, hasta P, tal que $GM = MP$

b) $\triangle AMG \cong \triangle BMP$ porque:

$$\left\{\begin{array}{r} \overline{AM} \cong \overline{MB} \text{ (M punto medio)} \\ \sphericalangle AMG \cong \sphericalangle BMP \text{ (opuesto por el vértice)} \\ \overline{GM} \cong \overline{MP} \text{ (por construcción)} \end{array}\right\} \text{ (L.A.L)}$$

c) Por lo tanto, $\sphericalangle GAM \cong \sphericalangle PBM$.

d) Como $\sphericalangle GAM$ y $\sphericalangle PBM$ son ángulos alternos internos, entonces $\overline{PB} \parallel \overline{AN}$.

e) En $\triangle PBC$, como $\overline{PB} \parallel \overline{GN}$ y N es punto medio de $\overline{BC}$, entonces G es punto medio de $\overline{CP}$. ($\overline{GN}$ es mediana de $\triangle PBC$)

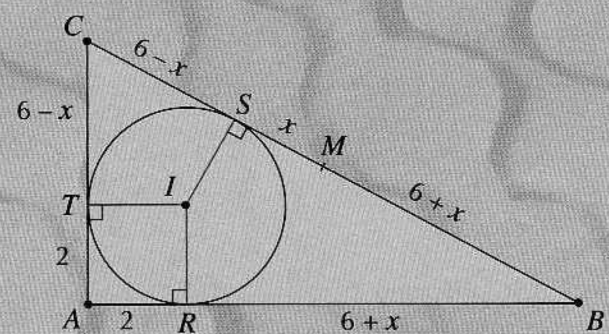
f) Luego, $CG = GP$

g) Pero, $GP = 2\,GM$ (por construcción)

h) Por lo tanto, $CG = 2GM$

i) $\dfrac{CG}{GM} = \dfrac{2}{1}$

7. Calcular el área de un triángulo rectángulo si el radio de la circunferencia inscrita en él es 2 y el de su circunferencia circunscrita es 6.



Solución:

Sea ABC un triángulo rectángulo en A.

Sean R, S y T los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.

I: centro de la circunferencia inscrita.

Como $IR = IT = 2$, se tiene que: $AT = AR = 2$ ($ARIT$ cuadrado).

M es punto medio de la hipotenusa y centro de la circunferencia circunscrita, luego $MB = MC = 6$

Sea $SM = x$, entonces $SB = (6 + x)$ y $SC = (6 - x)$. Como $BS = BR$ y $CS = CT$ (se demuestra por congruencia), se tiene que los lados del triángulo rectángulo son:

$AB = 2 + 6 + x = 8 + x$; $AC = 2 + 6 - x = 8 - x$; $BC = 12$

Luego, $12^2 = (8 + x)^2 + (8 - x)^2$ (Teorema de Pitágoras)

$144 = 64 + 16x + x^2 + 64 - 16x + x^2$

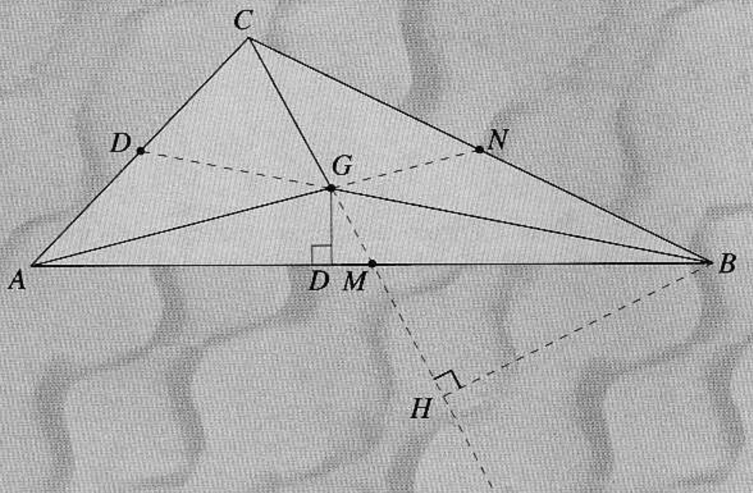
$16 = 2x^2$

$x = 2\sqrt{2}$

Para calcular el área usamos la fórmula de multiplicar la medida de un lado (un cateto) por la altura respectiva (el otro cateto) y dividir por 2:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{(8 + 2\sqrt{2})(8 - 2\sqrt{2})}{2} = \frac{64 - 8}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

8. Demostrar que los triángulos determinados por los segmentos que unen el centro de gravedad G de un triángulo ABC y los vértices del triángulo son equivalentes (tienen la misma área).



Solución:

Hipótesis: ABC, triángulo

G, centro de gravedad

M, N y O, puntos medios de los lados del triángulo

Tesis: $A_{\triangle ABG} = A_{\triangle BCG} = A_{\triangle CAG}$

Demostración:

a) $CG = 2\ GM$ (CM transversal de gravedad)

b) $A_{\triangle BCG} = \dfrac{CG \cdot BH}{2}$

c) $A_{\triangle GMB} = \dfrac{GM \cdot BH}{2} = \dfrac{CG \cdot BH}{4}$

d) Por otro lado:

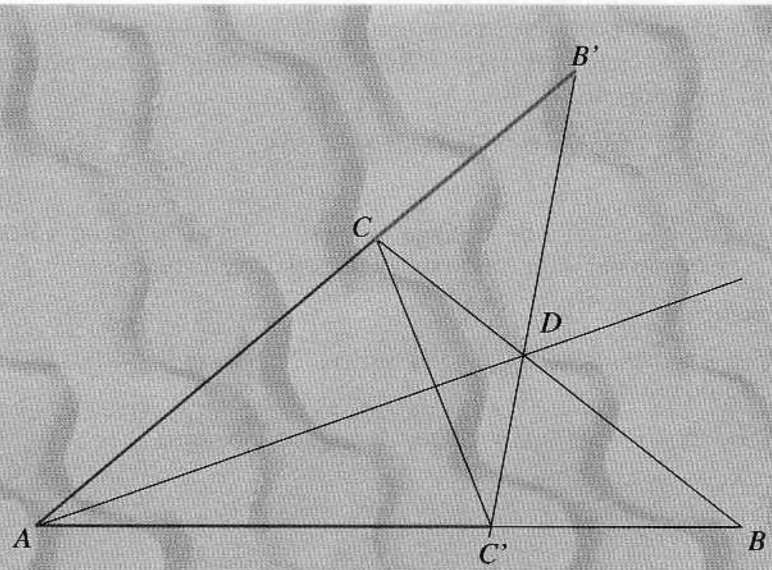
$A_{\triangle GMB} = A_{\triangle AMG}$ (igual base $AM = MB$ e igual altura GD)

e) Además, $A_{\triangle ABG} = A_{\triangle AMG} + A_{\triangle GMB} = 2\ \dfrac{CG \cdot BH}{4} = \dfrac{CG \cdot BH}{2}$

f) Comparando b) con e) : $A_{\triangle ABG} = A_{\triangle BCG}$

g) Análogamente se demuestra que ambas son iguales a $A_{\triangle CAG}$

9. Dado un triángulo ABC, sobre el lado $\overline{AB}$ marcar C' tal que $AC' = AC$ y sobre el lado $\overline{AC}$ marcar B' tal que $AB' = AB$. Sea D el punto donde se intersectan $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$. Demostrar que $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del ángulo CAB.



Solución:

Hipótesis: ABC, triángulo
$AC = AC'$
$AB = AB'$

Tesis: $\overrightarrow{AD}$, bisectriz del $\sphericalangle CAB$

Demostración:

a) Unimos C con C'

b) $\triangle C'CA$ isósceles (hipótesis)

c) $\triangle CC'B \cong \triangle C'CB'$ porque:

$$\left.\begin{cases} \sphericalangle BC'C \cong \sphericalangle B'CC' \text{ (ambos son suplemento de ángulos congruentes)} \\ \overline{CC'} \cong \overline{C'C} \text{ (lado común)} \\ \overline{C'B} \cong \overline{CB'} \text{ (a medidas iguales restamos medidas iguales)} \end{cases}\right\} \text{(L.A.L.)}$$

d) Por lo tanto, $\sphericalangle CB'C' \cong \sphericalangle C'BC$ (ángulos homólogos de triángulos congruentes)

e) $\triangle C'BD \cong \triangle CB'D$ porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{C'B} \cong \overline{CB'} \text{ (a medidas iguales se restan medidas iguales)} \\ \sphericalangle C'DB \cong \sphericalangle CDB' \text{ (opuesto por el vértice)} \\ \sphericalangle C'BD \cong \sphericalangle CB'D \text{ (punto d)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A.)}$$

f) Por lo tanto, $DB = DB'$ y $C'D = CD$ (lados homólogos de triángulos congruentes)

g) $\triangle A'BD \cong \triangle AB'D$ porque:

$$\left.\begin{cases} AB = AB' \text{ (hipótesis)} \\ AD = AD \text{ (lado común)} \\ BD = B'D \text{ (punto f)} \end{cases}\right\} \text{(L.L.L.)}$$

h) Por lo tanto, $\sphericalangle B'AD \cong \sphericalangle BAD$ (ángulos homólogos de triángulos congruentes)

i) Luego, $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del ángulo CAB.

10. Determinar el valor de los ángulos interiores de un triángulo isósceles si el ángulo del vértice es la mitad de cada ángulo basal.

Solución:

Sea x la medida del ángulo del vértice, luego $2x$ es la medida de cada ángulo basal.

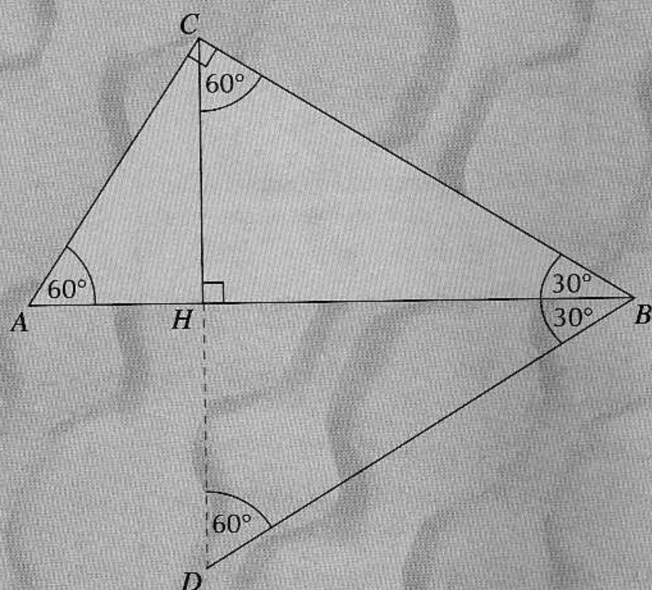
$2x + 2x + x = 180°$ (la suma de los ángulos interiores...)

$5x = 180°$

$x = 36°$

Por lo tanto:
Cada ángulo basal mide 72° y el ángulo del vértice mide 36°.

11. Dado un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos agudos mide 60°, demostrar que la altura correspondiente a la hipotenusa es igual a la mitad del cateto opuesto al ángulo de 60°.



Solución:

Hipótesis: ABC, triángulo rectángulo en C

$m(\sphericalangle CAB) = 60°$; $\overline{CH}$: altura

Tesis: $2CH = CB$

Demostración:

a) $m(\sphericalangle CBA) = 30°$ (la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°)

b) $m(\sphericalangle BCH) = 60°$ (lados perpendiculares al triángulo CAB)

c) Se construye el $\measuredangle ABD$ de medida 30°; y D en la prolongación de $\overline{CH}$

d) $\triangle CDB$ equilátero

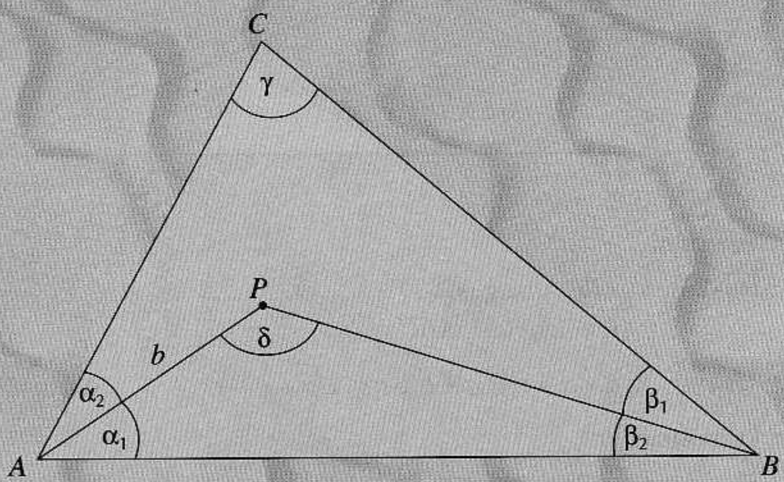
e) $\overline{BH}$ es la altura del triángulo equilátero

f) Luego H es punto medio de $\overline{CD}$

g) Pero $CD = CB$

h) Por lo tanto, $2CH = CB$

12. En un triángulo ABC se considera un punto P en su interior. Demostrar que $m(\measuredangle ACB) < m(\measuredangle APB)$.



Solución:

Hipótesis: ABC triángulo

$P \in$ Interior $\triangle ABC$

Tesis: $m(\measuredangle ACB) < m(\measuredangle APB)$ $(\gamma < \delta)$

Demostración:

a) Llamamos α_1, α_2, β_1, β_2 a las medidas de los ángulos que determinan $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$.

b) $\delta + \alpha_1 + \beta_1 = 180°$ (suma de los ángulos interiores del $\triangle ABP$)

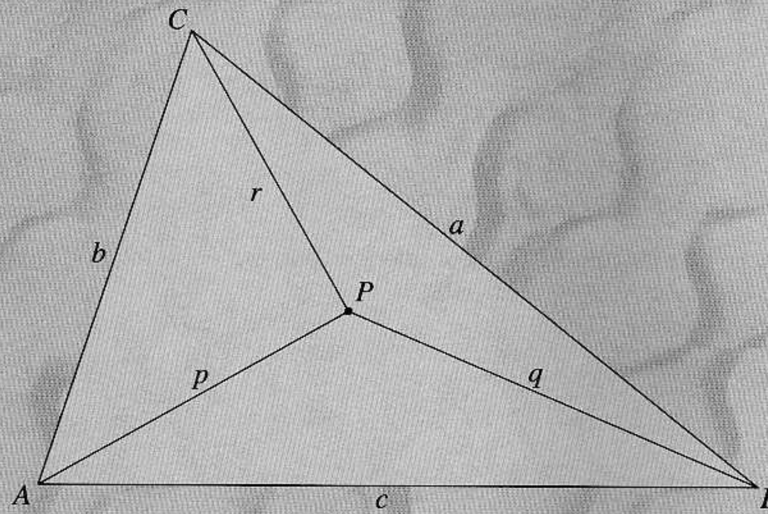
c) $\gamma + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 180°$ (suma de los ángulos interiores del $\triangle ABC$)

d) Por lo tanto, $\delta + \alpha_1 + \beta_1 = \gamma + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$

e) Luego: $\delta = \gamma + \alpha_2 + \beta_2$

f) Lo que significa que $\delta > \gamma$

13. Demostrar que en todo triángulo ABC, dado un punto P en su interior, su perímetro es mayor que la suma de las medidas de los segmentos que unen P con cada vértice y menor que dos veces la misma suma.



Solución:

Hipótesis: ABC, triángulo

$P \in$ Interior $\triangle ABC$

Tesis: $p + q + r < a + b + c < 2(p + q + r)$

Demostración:

a) $a < r + q$ (la medida de un lado de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos)

b) $b < r + p$ (la medida de un lado de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos)

c) $c < p + q$ (la medida de un lado de un triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos)

d) Sumando miembro a miembro:

$a + b + c < 2(p + q + r)$

e) $c + p + q < c + a + b$ (el perímetro del triángulo interior es menor que el del triángulo exterior)

$p + q < a + b$

f) $a + r + q < a + b + c$ (el perímetro del triángulo interior es menor que el del triángulo exterior)

$r + q < b + c$

g) $b + r + p < b + a + c$ (el perímetro del triángulo interior es menor que el del triángulo exterior)

$r + p < a + c$

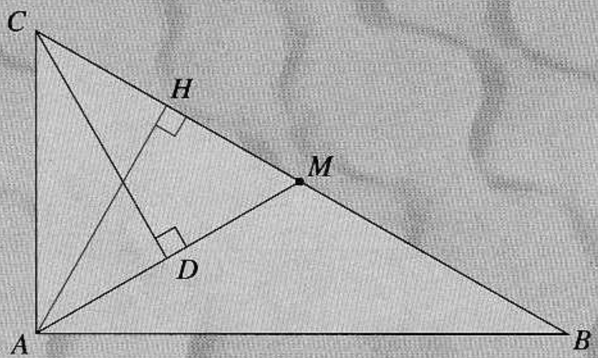
h) Sumando e), f) y g)

$2(p+q+r) < 2(a+b+c)$; de donde $p+q+r < a+b+c$

i) De d) y h):

$p+q+r < a+b+c < 2(p+q+r)$; de donde $p+q+r < a+b+c$

14. Calcular el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 13, sabiendo que la perpendicular trazada desde el vértice de uno de sus ángulos agudos a la transversal de gravedad correspondiente a la hipotenusa es $\frac{60}{13}$.



Solución:

Sea ABC, triángulo rectángulo en A

$BC = 13$

M, punto medio de $\overline{BC}$

$CD = \frac{60}{13}$

$CD \perp AM$

Sabemos que $AM = BM = CM = 6{,}5$ $\left(\frac{1}{2} \text{ de } BC\right)$ es el radio de la circunferencia circunscrita

El área de $\triangle AMC$ es:

$$A_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot CD = \frac{6{,}5 \cdot 60}{2 \cdot 13} = 15$$

El área de $\triangle AMC$ es igual al área del $\triangle AMB$, ya que ambos tienen igual base ($CM = MB = 6{,}5$) e igual altura(AH)

Por lo tanto, el área de $\triangle ABC = 30$ (dos veces el área del $\triangle AMC$).

Otra solución:

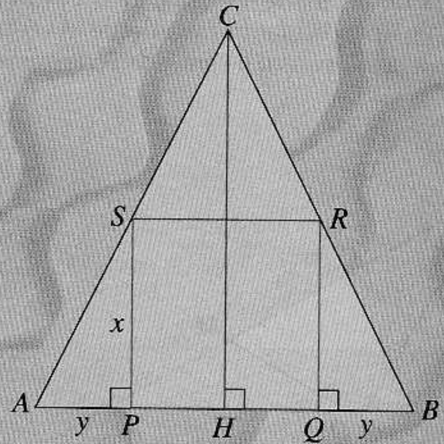
El $\triangle AMC$ es isósceles de base $\overline{AC}$ ($AM = CM$)

Luego, $\overline{AH} = \overline{CD}$ (Las alturas de los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes)

Por lo tanto:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{60}{13} = 30$$

15. Calcular la medida del lado de un cuadrado inscrito en un triángulo equilátero de lado 10.



Solución:

Sea ABC el triángulo equilátero de lado 10

Sea x el lado del cuadrado inscrito $PQRS$

Sea $y = AP = QB$

$CH = 5\sqrt{3}$ (altura del triángulo equilátero)

El área del triángulo ABC es: $A_{\Delta ABC} = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

El área del triángulo ABC se descompone en la siguiente suma de áreas:

$$A_{\Delta APS} + A_{\Delta BQR} + A_{PQRS} + A_{\Delta SRC}$$

Por lo tanto, $\frac{y \cdot x}{2} + \frac{y \cdot x}{2} + x^2 + \frac{x(5\sqrt{3} - x)}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{2}$

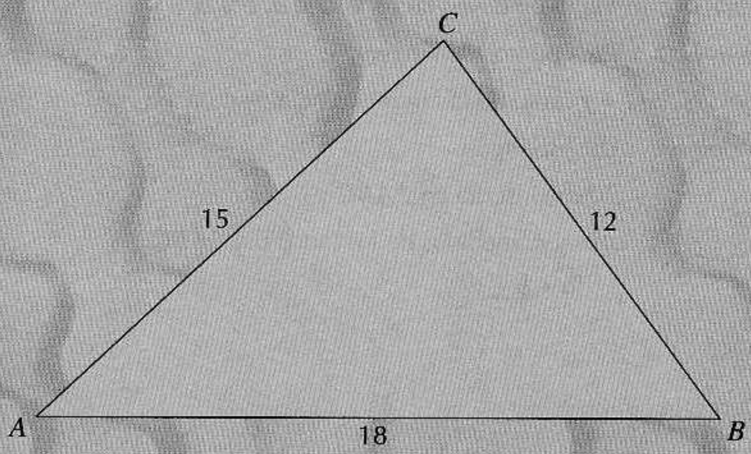
Pero $2y + x = 10$; luego, $y = \frac{10 - x}{2}$. Por lo tanto, la ecuación anterior queda:

$$\frac{10 - x}{2} \cdot x + x^2 + \frac{5\sqrt{3}x}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{2}$$

$$5x - \frac{x^2}{2} + x^2 + \frac{5\sqrt{3}x}{2} - \frac{x^2}{2} = 25\sqrt{3}$$

Entonces, el lado del cuadrado inscrito en un triángulo equilátero de lado 10 cm mide aproximadamente 4,64 cm. Exactamente mide $\frac{10\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ cm.

16. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden 15, 18 y 12 m.



Solución:

Sabemos que:

$$A_{\Delta} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

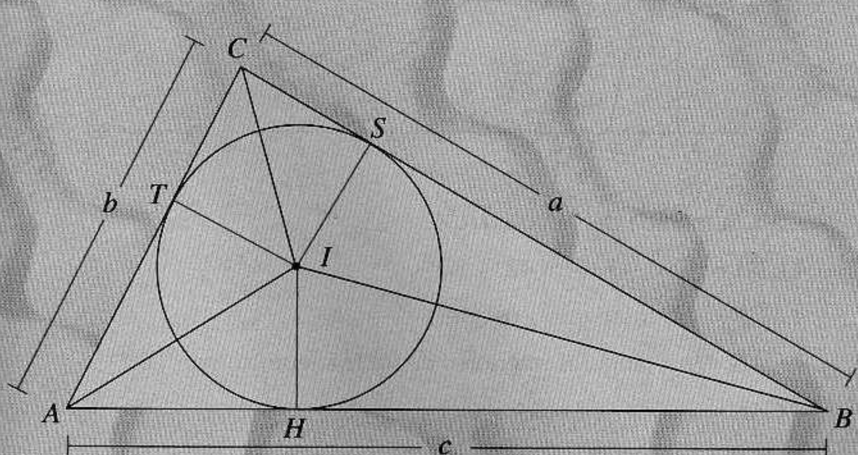
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{45}{2}$$

$$A_{\Delta} = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \left(\frac{45}{2} - 18\right) \cdot \left(\frac{45}{2} - 15\right) \cdot \left(\frac{45}{2} - 12\right)}$$

$$A_{\Delta} = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{21}{2}} = \frac{135\sqrt{7}}{4} \approx 89{,}3 \text{ m}^2$$

Por lo tanto, el área del triángulo cuyos lados miden 15, 18 y 12 m es aproximadamente 89,3 m². Exactamente: $\frac{135\sqrt{7}}{4} = 33{,}75\sqrt{7}$ m².

17. Demostrar que el área de un triángulo es igual al semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita.



Solución:

Sea ABC un triángulo cuyos lados miden a, b y c;

Sean H, S y T los puntos de tangencia;

$IH = IS = IT = r$ radio de la circunferencia inscrita

Hipótesis: ABC, triángulo

$\odot(I, r)$ inscrita en $\triangle ABC$

a, b, y c, medidas de los lados del $\triangle ABC$

$s = \frac{(a+b+c)}{2}$

Tesis: $A_{\triangle ABC} = r \cdot s$

Demostración:

a) $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABI} + A_{BCI} + A_{CAI}$

b) $A_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2}$

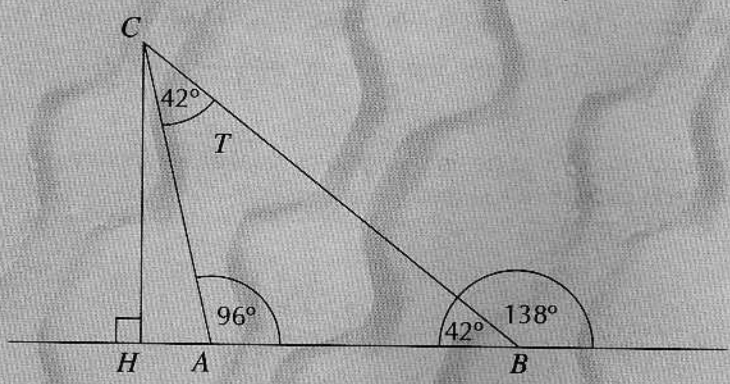
c) $A_{\triangle ABC} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2}$

d) $A_{\triangle ABC} = r \cdot s$

18. Dado un triángulo isósceles con $AB = AC$; el ángulo exterior en B mide 138°. $\overline{CH}$ es la altura desde el vértice C. Hallar la medida del ángulo HCA.

Solución:

Hagamos un dibujo cercano a la realidad para que nos oriente:



Sea x la medida del ángulo HCA.

$\sphericalangle CBA = 180° - 138° = 42°$

$\sphericalangle ACB = 42°$ (triángulo isósceles)

$\sphericalangle CAB = 96°$ (ángulos interiores de un triángulo suman 180°)

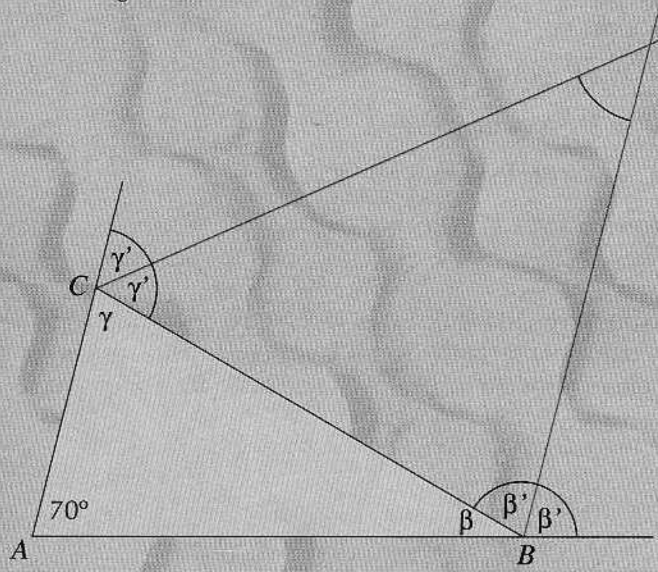
$\sphericalangle CAH = 180° - 96° = 84°$

$\sphericalangle HCA = 90° - 84° = 6°$

Por lo tanto, el ángulo HCA mide 6°.

19. En un triángulo ABC, $\alpha = 70°$. Las bisectrices de los ángulos exteriores en B y en C se intersectan en D. Hallar la medida del $\measuredangle BDC$.

Solución:
Haremos un dibujo para orientarnos y les daremos nombres a las medidas de los ángulos.



$\gamma + \beta = 180° - 70° = 110°$ (suma de ángulos interiores de un triángulo)

$2\gamma' + \gamma + 2\beta' + \beta = 360°$ (suman dos ángulos extendidos)

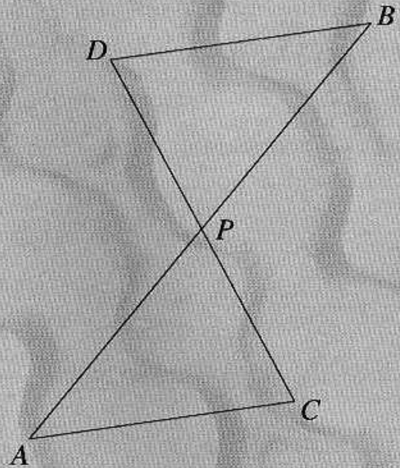
$2\gamma' + 2\beta' = 360° - (\gamma + \beta) = 360° - 110° = 250°$

Luego: $\gamma' + \beta' = 125°$

$m(\measuredangle CDB) = 180° - 125° = 55°$

Por lo tanto, el ángulo BDC mide $55°$.

20. Demostrar que si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisectan en el punto P, entonces, $\triangle APC \cong \triangle BPD$



Solución:

Hipótesis: $\overline{AP} \cong \overline{PB}$

$\overline{CP} \cong \overline{PD}$

Tesis: $\triangle APC \cong \triangle BPD$

Demostración:

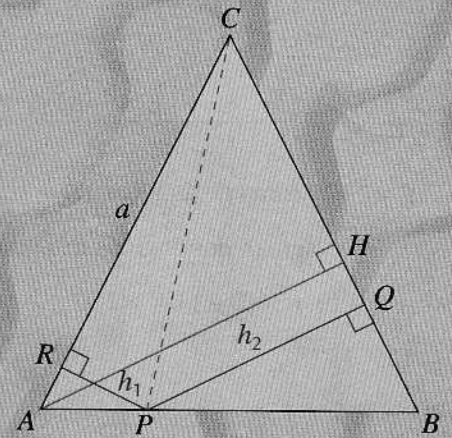
a) $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ (por hipótesis)

b) $\overline{CP} \cong \overline{DP}$ (por hipótesis)

c) $\sphericalangle APC \cong \sphericalangle BPC$ (opuestos por el vértice)

d) Por teorema L.A.L.: $\triangle APC \cong \triangle BPD$

21. Demostrar que en un triángulo isósceles la suma de las distancias desde un punto cualquiera de la base a los lados congruentes es constante e igual a la altura respecto de cualquiera de los lados congruentes.



Solución:

Hipótesis: $\triangle ABC$ isósceles

$AC = BC = a$

$AH = h$, altura respecto del lado $\overline{BC}$

P, punto cualquiera de $\overline{AB}$

$PR = h_1$ y $PQ = h_2$ distancias de P a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Tesis: $h_1 + h_2 = h$ (constante)

Demostración:

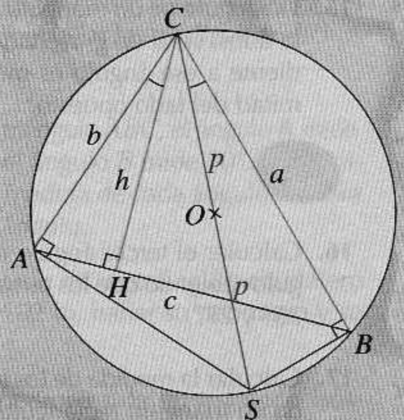
a) $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle APC} + A_{BPC}$

b) $\dfrac{a \cdot h}{2} = \dfrac{a \cdot h_1}{2} + \dfrac{a \cdot h_2}{2}$

c) $\dfrac{a}{2} \cdot h = \dfrac{a}{2} \cdot (h_1 + h_2)$ $\left(\text{Se divide en ambos lados por } \dfrac{a}{2}\right)$

d) $h = h_1 + h_2$ (constante)

22. Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de radio R, y h la medida de la altura $\overline{CH}$. Probar que $a \cdot b = 2Rh$



Solución:

a) Dibujamos el $\triangle ABC$ inscrito en $\odot(O, p)$

b) Trazamos el diámetro $\overline{CS}$ de medida $2R$ y trazamos altura $\overline{CH}$ de medida h.

d) $\triangle CBS \sim \triangle CHA$ (ver página 155)

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle B \cong \sphericalangle H = 90^\circ \\ \sphericalangle BCS \cong \sphericalangle BAS \text{ (inscritos que subtienden el mismo arco)} \\ \sphericalangle BAS \cong \sphericalangle HCA \text{ (ángulos agudos de lados respectivamente perpendiculares)} \\ \text{Por lo tanto, } \sphericalangle BCS \cong \sphericalangle HCA \text{ (transitividad)} \end{array}\right\} \text{(caso A.A.)}$$

e) luego, $\dfrac{CB}{CH} = \dfrac{CS}{CA}$

f) $\dfrac{a}{h} = \dfrac{2R}{b}$

g) Por lo tanto, $a \cdot b = 2hR$

23. Demostrar que el área de un triángulo ABC es igual al producto de sus tres lados dividido por cuatro veces el radio de la circunferencia circunscrita en él.

Solución:

a) Sean a, b y c las medidas de los lados del triángulo, R el radio de la circunferencia circunscrita y h la altura respecto del lado de medida c (ver figura del ejercicio anterior).

b) En el ejercicio anterior, demostramos que: $2Rh = a \cdot b$

c) $h = \dfrac{a \cdot b}{2R}$ (Multiplicamos en ambos lados por c)

d) $c \cdot h = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{2R}$ (Dividimos en ambos lados por 2)

e) $\dfrac{c \cdot h}{2} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

f) pero, $\dfrac{c \cdot h}{2} = A_{\triangle ABC}$

g) Por lo tanto, $A_{\triangle ABC} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

I.

Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique su respuesta:

1. Todo triángulo equilátero es isósceles.
2. Todo triángulo isósceles es equilátero.
3. Un triángulo rectángulo puede ser isósceles.
4. Un triángulo rectángulo puede ser equilátero.
5. Un triángulo equilátero puede ser rectángulo.
6. En un triángulo rectángulo, los catetos coinciden con dos de las alturas.
7. Un triángulo puede tener dos ángulos rectos.
8. Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° cada uno.
9. En un triángulo rectángulo, la transversal de gravedad del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.
10. En todo triángulo rectángulo los ángulos agudos miden 30° y 60°.
11. Un triángulo puede tener dos ángulos obtusos.
12. En un triángulo equilátero, la circunferencia inscrita y la circunscrita tienen el mismo centro.
13. Un ángulo de un triángulo es recto si la transversal de gravedad correspondiente a ese ángulo es igual a la mitad del lado opuesto.
14. Un ángulo de un triángulo es agudo si la transversal de gravedad correspondiente a ese ángulo es mayor que la mitad del lado opuesto.
15. Un ángulo de un triángulo es obtuso si la transversal de gravedad correspondiente a ese ángulo es menor que la mitad del lado opuesto.

II.

16. Calcular el tercer ángulo de un triángulo sabiendo que los otros dos miden 35° y 27°.
17. Calcular la medida de los tres ángulos de un triángulo rectángulo isósceles.
18. Hallar la medida de los ángulos basales de un triángulo isósceles si el ángulo del vértice mide 98°.
19. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos mide 18°. Hallar la medida del otro.
20. En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos miden 30° y 60°. Si el cateto opuesto al ángulo de 30° mide 5 cm, hallar la medida de la hipotenusa y del otro cateto.
21. Hallar la medida de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles si su hipotenusa mide 16 cm.
22. Hallar la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 16 cm y 18 cm.
23. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm y un cateto es la tercera parte del otro, hallar la medida de los catetos.
24. En un triángulo rectángulo, uno de sus catetos mide 12 cm y su hipotenusa mide 13 cm. Hallar la medida del otro cateto, la de la altura respecto de la hipotenusa y la de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

25. En un triángulo ABC, la altura respecto de $\overline{AB}$ mide 5 cm. La proyección de los otros dos lados sobre $\overline{AB}$ es 12 cm y 20 cm. Hallar las medidas de dichos lados.

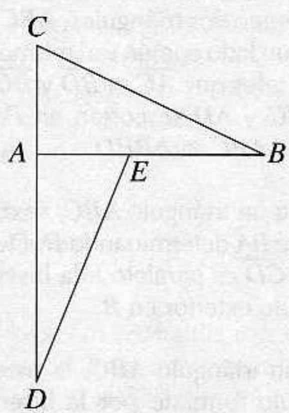
26. En un triángulo ABC, el ángulo A mide 66° y el ángulo B mide 30°. Determinar la medida de cada ángulo exterior del triángulo.

27. Si un lado de un triángulo equilátero mide 102 m, hallar su perímetro y su área.

28. Si el perímetro de un triángulo isósceles es 96 m y uno de sus lados congruentes mide 28 m, hallar la medida de la base.

29. Analice si se puede construir un triángulo cuyos lados sean 2, 3 y 6 cm.

30. Los triángulos ABC y ADE son congruentes de lados 6, 8 y 10 cm. Hallar el perímetro de la figura $CDEBC$.



31. Sea ABC un triángulo tal que el $\sphericalangle B$ mide 22°, el $\sphericalangle C$ mide 110° y la bisectriz del ángulo A intersecta a $\overline{BC}$ en D. Hallar la medida de los ángulos CAD y BDA.

III.

32. Demostrar que los ángulos interiores de un triángulo tienen medidas que suman 180°.

33. Demostrar que en un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.

34. Demostrar que en todo triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.

35. Demostrar que la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.

36. Demostrar que en un triángulo equilátero si un segmento es altura, también es bisectriz, transversal de gravedad y parte de la simetral.

37. Demostrar que los cuatro triángulos que se forman al trazar las tres medianas en un triángulo cualquiera son congruentes.

38. Demostrar que si en un triángulo ABC, $AC = BC$ y M es un punto de $\overline{AB}$ tal que $\sphericalangle ACM \cong \sphericalangle BCM$, entonces M es punto medio de $\overline{AB}$.

39. Dado un triángulo isósceles ABC con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, demostrar que la bisectriz del ángulo A es parte de la simetral del lado $\overline{BC}$.

40. Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Trazar las bisectrices de los ángulos basales tal que la bisectriz del $\sphericalangle A$ intersecta a $\overline{BC}$ en D y la bisectriz de $\sphericalangle B$ intersecta a $\overline{AC}$ en E. Demostrar que el $\triangle ABD \cong \triangle BAE$.

41. Demostrar que un triángulo que tiene dos alturas congruentes es isósceles.

42. Demostrar que las alturas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

43. Demostrar que la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es parte de la simetral.

44. Demostrar que las bisectrices de un triángulo equilátero son congruentes.

IV

45. Sea r el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo y R el radio de la circunferencia circunscrita. Demostrar que $2R + r = s$ (s: semiperímetro).

46. En un triángulo equilátero PQR, trazar $\overline{QH} \perp \overline{PR}$ y $\overline{HG} \perp \overline{RQ}$. Demostrar que $RG = 3GQ$.

47. Demostrar que en un triángulo equilátero la suma de las distancias de un punto interior cualquiera a sus tres lados es constante e igual a la medida de la altura del triángulo.

48. Calcular el área y el perímetro de un triángulo equilátero sabiendo que la suma del radio de la circunferencia inscrita con el radio de la circunferencia circunscrita es $5\sqrt{3}$ cm.

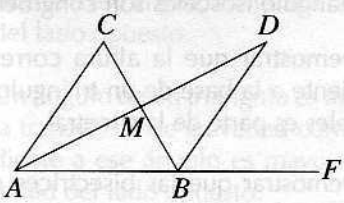
49. Determinar el lado del cuadrado inscrito en un triángulo equilátero de lado a.

50. Demostrar que en todo triángulo ABC rectángulo en C se verifica la relación $(a + b - c)^2 = 2(c - a)(c - b)$

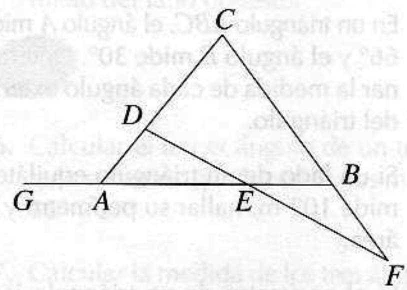
51. Probar que en un triángulo rectángulo en C se verifica que $c^2 = (a - b)^2 + 2ab$.

52. Demostrar que el perímetro de un triángulo es mayor que la suma de las longitudes de las tres alturas.

53. En la figura, M es punto medio de los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{AD}$. Demostrar que $m(\measuredangle ACB) < m(\measuredangle CBF)$.



54. En la figura, demostrar que: $m(\measuredangle GAC) > m(\measuredangle DFC)$



55. Sea ABC un triángulo y D un punto del lado $\overline{AC}$. Explicar por qué no puede darse que $\measuredangle ADB \cong \measuredangle ACB$.

56. Demostrar que si los segmentos trazados desde el punto medio de un lado de un triángulo, perpendicularmente a los otros dos lados, son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

57. Se tienen dos triángulos, ABC y ABD, con un lado común y al mismo lado de éste tales que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. Si BC y AD se cortan en P, probar que $\Delta APC \cong \Delta BPD$

58. Dado un triángulo ABC, se copia $\overline{BC}$ sobre $\overline{BA}$ determinando D. Demostrar que $\overline{CD}$ es paralelo a la bisectriz del ángulo exterior en B.

59. En un triángulo ABC, la medida del ángulo formado por la bisectriz del $\measuredangle C$ y la altura correspondiente a C es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos en A y en B.

60. En un triángulo ABC, con centro en A y radio $\overline{AC}$, se marca D sobre $\overline{AB}$ y E sobre su prolongación. Demostrar que $m(\measuredangle CAB) = 2m(\measuredangle CEB)$ y que el $\measuredangle ECD$ es recto.

61. Demostrar que la bisectriz de un ángulo de un triángulo es perpendicular a la bisectriz del ángulo exterior adyacente.

Soluciones

I.

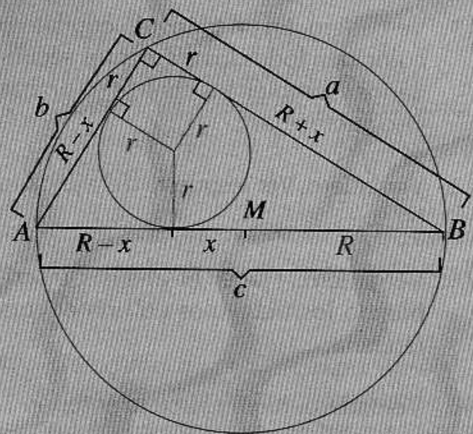
1. Verdadero.
2. Falso. Un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes.
3. Verdadero. Cuando los dos ángulos agudos miden 45°.
4. Falso. En un triángulo rectángulo siempre el ángulo recto es mayor que cualquiera de los ángulos agudos. La hipotenusa es el lado mayor de los tres.
5. Falso. Un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales a 60°, ninguno de ellos puede medir 90°.
6. Verdadero. Los catetos son las alturas respecto de los ángulos agudos.
7. Falso. Si un triángulo tuviera dos ángulos rectos, el tercer ángulo debería medir 0° y no existiría triángulo. Si dos ángulos miden 90°, los lados distintos del lado común serían paralelos; no se forma el triángulo.
8. Verdadero. Como los tres ángulos tienen la misma medida, 180° : 3 es 60° para cada uno.
9. Verdadero. Un triángulo rectángulo se puede inscribir en una semicircunferencia, donde el radio es la transversal de gravedad del ángulo recto.
10. Falso. Eso es un triángulo rectángulo. Hay otros en que los ángulos agudos pueden ser de 20° y 70°. La condición es que la suma de las medidas de ambos sea 90°. Existen infinitas posibilidades.
11. Falso. La medida de un ángulo obtuso es mayor que 90° y las medidas de dos ángulos obtusos suman más de 180°, lo que contradice el teorema de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
12. Verdadero. En un triángulo equilátero coinciden todos los elementos secundarios y también los centros de ambas circunferencias.
13. Verdadero. Ver respuesta del ejercicio N° 9.
14. Verdadero. Hacer el análisis inscribiendo los triángulos en una circunferencia.
15. Verdadero. Idem ejercicio anterior.

II.

16. 118°
17. 90°, 45° y 45°
18. 41° cada uno
19. 72°
20. 10 cm; $5\sqrt{3}$ cm
21. $8\sqrt{2}$ cm
22. 24,08 cm
23. $2\sqrt{10}$ cm; $6\sqrt{10}$ cm
24. 5 cm; 4,62 cm; 1,92 cm y 11,08 cm
25. 13 cm; $5\sqrt{17}$ cm
26. 114°; 150°; 96°
27. Perímetro: 306 m; Área: $2.601\sqrt{3}$ m²
28. 40 m
29. No se puede construir porque la medida de cualquiera de los lados siempre debe ser menor que la suma de las medidas de los otros dos.
30. 36 cm
31. $\sphericalangle CAD = 24°$; $\sphericalangle BDA = 134°$

IV.

45.



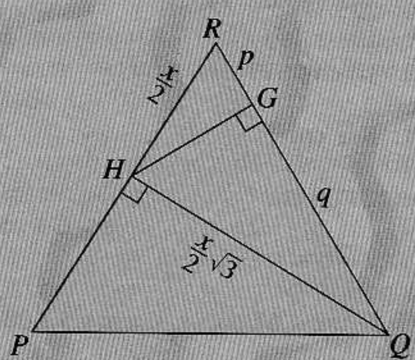
$$R-x+R+x+R+x+r+r+R-x=a+b+c$$

$$4R+2r=a+b+c \qquad /:2$$

$$2R+r=\frac{a+b+c}{2}$$

$$2R+r=s$$

46.



Sea x la medida del lado del triángulo equilátero PQR.

$RH=\frac{x}{2}$, $HQ=\frac{x\sqrt{3}}{2}$

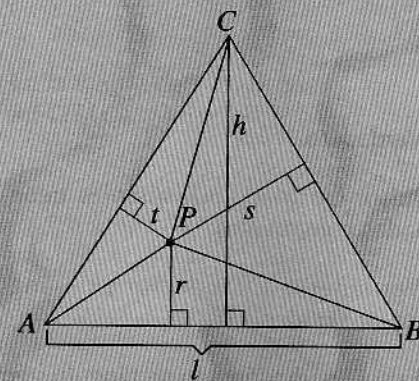
Euclides en $\triangle QRH$:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\cdot p \quad \Rightarrow \quad p=\frac{x^2}{4x}=\frac{x}{4}$$

$$\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2=x\cdot q \quad \Rightarrow \quad q=\frac{3x^2}{4x}=\frac{3x}{4}$$

Por lo tanto: $q=3p \Rightarrow RG=3GQ$

47.



$$A_{\triangle ABC}=A_{\triangle ABP}+A_{\triangle BPC}+A_{\triangle APC}$$

$$\frac{l\cdot h}{2}=\frac{l\cdot r}{2}+\frac{l\cdot s}{2}+\frac{l\cdot t}{2}$$

$$\frac{1}{2}(h)=\frac{1}{2}(r+s+t)$$

Por lo tanto: $h=r+s+t$

48. Perímetro: 30 cm; Área: $25\sqrt{3}$ cm²

49. $(2\sqrt{3}-3)a$

50. En todo triángulo rectángulo se verifica el Teorema de Pitágoras:

$$a^2+b^2=c^2$$

Sumando $(c^2+2ab-2ac-2bc)$ nos queda:

$$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$=2c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$(a+b-c)^2=2(c^2+ab-ac-bc)$$

$$(a+b-c)^2=2(c(c-a)-b(c-a))$$

$$(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b)$$

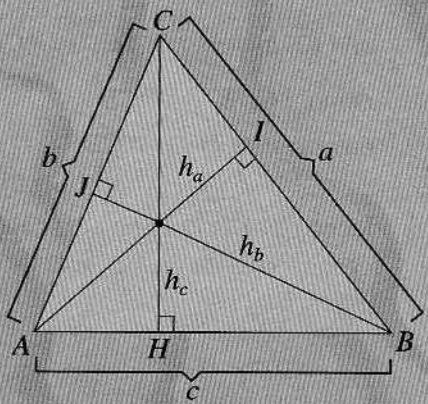
51. $a^2+b^2=c^2$

Sumamos y restamos $2ab$ en el primer miembro.

$$a^2-2ab+b^2+2ab=c^2$$

$$(a-b)^2+2ab=c^2$$

52.



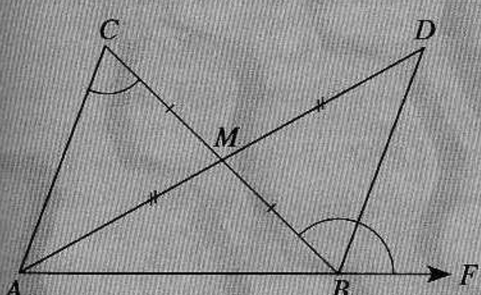
En $\triangle CIB$: $a > h_c$ (a hipotenusa)

En $\triangle AIC$: $b > h_a$ (b hipotenusa)

En $\triangle AJB$: $c > h_b$ (c hipotenusa)

Sumando: $a + b + c > h_a + h_b + h_c$

53.



Si M es punto medio de $\overline{CB}$ y $\overline{AD}$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{CM} \cong \overline{MB} \\ \overline{AM} \cong \overline{MD} \\ \measuredangle CMA \cong \measuredangle BMD \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle DMB$$

Luego: $\measuredangle ACM \cong \measuredangle DBM$

y $m(\measuredangle CBF) = m(\measuredangle DBM) + m(\measuredangle DBF)$

$m(\measuredangle CBF) = m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle DBF)$

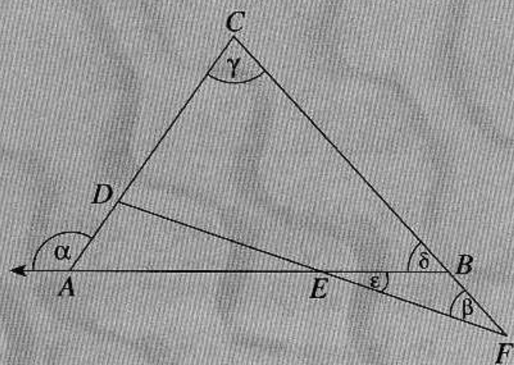
Por lo tanto: $m(\measuredangle CBF) > m(\measuredangle ACB)$

Otra solución: Bastaría decir que:
$m(\measuredangle CBF) = m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle CAB)$

Porque la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él. Por lo tanto:

$$m(\measuredangle CBF) > m(\measuredangle ACB)$$

54.



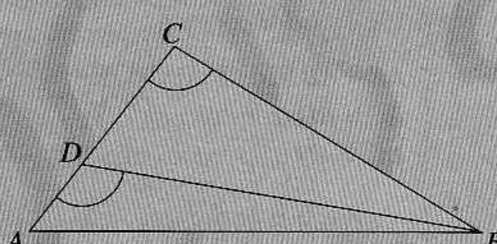
En $\triangle ABC$: $\alpha = \gamma + \delta$

En $\triangle EBF$: $\delta = \varepsilon + \beta$

Por lo tanto: $\alpha = \gamma + \varepsilon + \beta$

Luego $\alpha > \beta$

55.



$m(\measuredangle ADB) = m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle CBD)$,

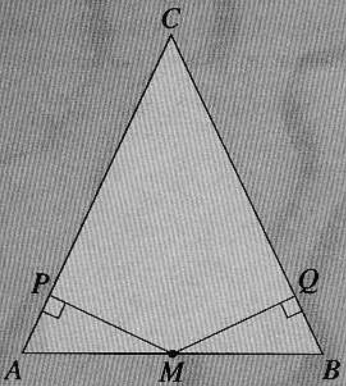
y $m(\measuredangle CBD) \neq 0$,

porque ABC es triángulo.

Luego, $m(\measuredangle ADB) > m(\measuredangle ACB)$

$\measuredangle ADB \cong \measuredangle ACB$ sólo en el caso en que D coincide con C y $m(\measuredangle CBD) = 0$

56.



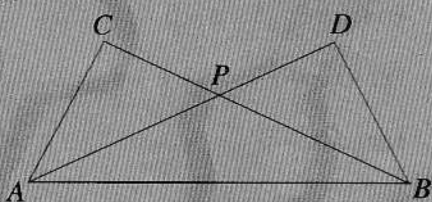
$$\left.\begin{array}{l} AM = MB \\ MP = MQ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMP \cong \triangle BMQ$$
(Teorema L.L.A.)

$m\sphericalangle P = m\sphericalangle Q = 90°$

Por lo tanto: $m\sphericalangle A = m\sphericalangle B$

Luego: $\triangle ABC$ es isósceles

57.



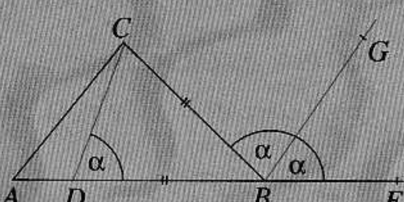
$\triangle ABC \cong \triangle BAD$ porque:

$$\left\{\begin{array}{l} AB = AB \text{ (lado común)} \\ AC = BD \text{ (construcción)} \\ BC = AD \text{ (construcción)} \end{array}\right\}$$

$\therefore \sphericalangle C = \sphericalangle D$ (ángulos homólogos de triángulos congruentes)
y $AC = BD$ (construcción)
$m(\sphericalangle APC) = m(\sphericalangle BPD)$
($\sphericalangle$ opuestos por el vértice)

por A.L.A. $\triangle APC \cong \triangle BPD$

58.



$\triangle DBC$ isósceles con base $\overline{DC}$

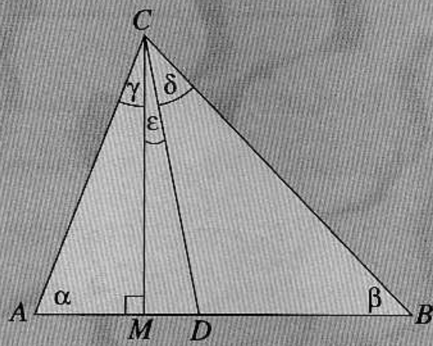
$m(\sphericalangle CDB) + m(\sphericalangle DCB) = m(\sphericalangle CBF)$

como $\sphericalangle CDB \cong \sphericalangle DCB$

entonces $\sphericalangle CDB \cong \sphericalangle GBF$
($\overrightarrow{BG}$ bisectriz)

luego $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BG}$ por contener ángulos correspondientes congruentes.

59.



$\gamma + \varepsilon = \delta$ (*) ($\overline{CD}$ bisectriz de $\sphericalangle ACD$)

$\gamma = 90° - \alpha$ ($\overline{CM}$ altura)

$\delta + \varepsilon = 90° - \beta$ ($\overline{CM}$ altura)

$\delta = 90° - \beta - \varepsilon$

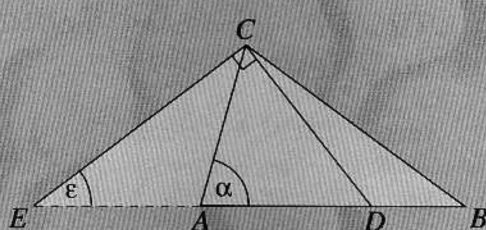
Por lo tanto; en (*)

$90° - \alpha + \varepsilon = 90° - \beta - \varepsilon$

$2\varepsilon = \alpha - \beta$

$\varepsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

60.

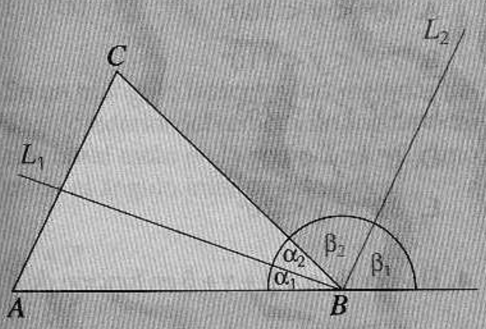


$\alpha = 2\varepsilon$ porque $\triangle EAC$ es isósceles y α es medida de un ángulo exterior.

A es punto medio de $\overline{ED}$.

Como $AE = AC = AD$, A es centro de la circunferencia circunscrita al ΔEDC, lo que prueba que $\measuredangle ECD = 90°$.

61.



$\alpha_1 = \alpha_2$ (L_1 bisectriz)

$\beta_1 = \beta_2$ (L_2 bisectriz)

$2\alpha_2 + 2\beta_2 = 180°$

(forman un ángulo extendido)

$\alpha_2 + \beta_2 = 90°$

luego $L_1 \perp L_2$

HERÓN DE ALEJANDRÍA

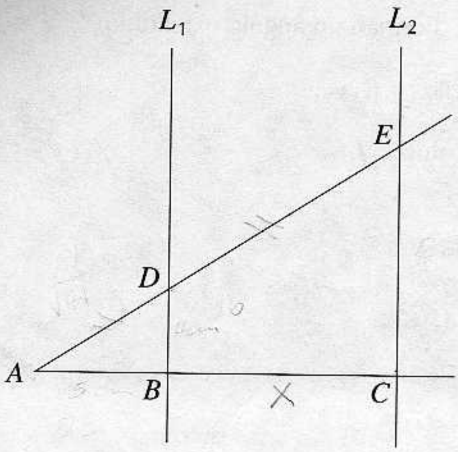
(Llamado el Viejo) Matemático e inventor griego. En su principal trabajo sobre geometría (Métrica) enumera diferentes maneras de hallar el área de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares de tres a doce lados, círculos, elipses y superficies y volúmenes de cilindros, conos y esferas. En él se incluyen, además, la conocida fórmula que permite calcular el área de un triángulo a partir de la longitud de sus lados, y un método aproximado para hallar la raíz cuadrada de un número, usado hoy día por los modernos ordenadores. En otro libro, Neumática, describe el diseño de sifones, de máquinas que funcionan con monedas y del aelopilo, que vendría a ser el equivalente de una turbina de vapor.

MENELAO DE ALEJANDRÍA

Matemático griego. Cultivó la astronomía y la geometría en Alejandría y en Roma. Autor del tratado "Sphaerica", en el que realizó un sistemático estudio de las propiedades de los triángulos esféricos (teoremas de Menelao), que constituyen las bases de la trigonometría esférica.

Prueba de selección múltiple

1. Si $L_1 \| L_2$, $\overline{AB} \perp L_1$, $AB = 5$ cm, $DB = 4$ cm, $\overline{AD} \cong \overline{DE}$ y $EC = 8$ cm, determinar la medida de $\overline{BC}$.



A. 4 cm

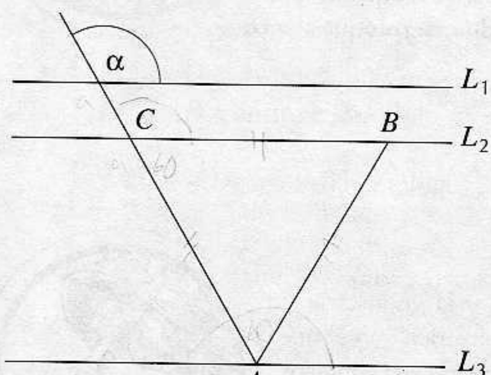
B. 15 cm

C. 5 cm

D. 3 cm

E. 20 cm

2. Si $L_1 \| L_2 \| L_3$ y el triángulo ABC es equilátero, ¿cuánto mide α?



A. 30°

B. 50°

C. 60°

D. 120°

E. 130°

3. ABC es un triángulo rectángulo con x e y medidas de los ángulos agudos. Si se cumple que $15° < x < 70°$, entonces:

A. $90° < y < 180°$

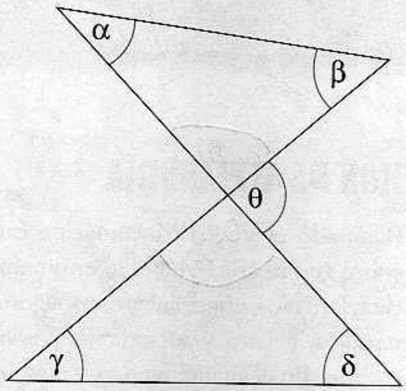
B. $75° < y < 110°$

C. $20° < y < 75°$

D. $0° < y < 90°$

E. $30° < y < 70°$

4. El valor de $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ en función de θ es:



A. 2θ

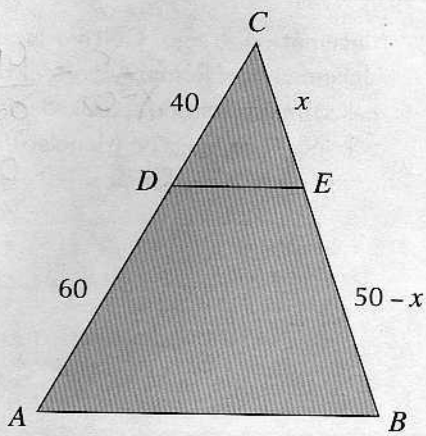
B. $180° - \theta$

C. 3θ

D. $90° + \theta$

E. $180° + \theta$

5. En el triángulo ABC, $\overline{DE} \| \overline{AB}$. Determinar el valor de x si $DC : DA = x : (50 - x)$.



A. 20

B. 40

C. 50

D. 80

E. 100

6. En un triángulo isósceles, las medidas del ángulo exterior del vértice y un ángulo exterior basal están en la razón 2 : 3. ¿Cuánto mide el ángulo interior del vértice?

A. 45°

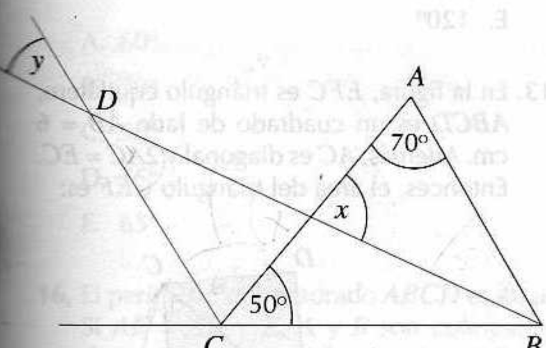
B. 50°

C. 60°

D. 90°

E. 130°

7. En el triángulo ABC, $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{CD}$ son bisectrices. Determinar el valor de $2x + 5y$.



A. 200°

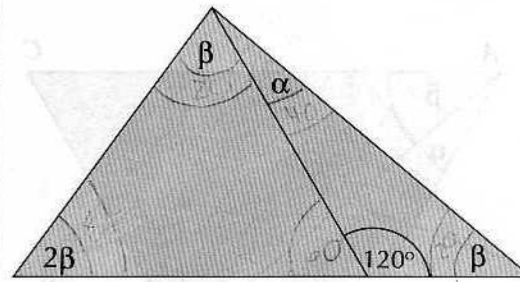
B. 220°

C. 222°

D. 300°

E. 335°

8. En el triángulo de la figura, determina los valores de α y β.



A. $\alpha = 10°$ y $\beta = 50°$

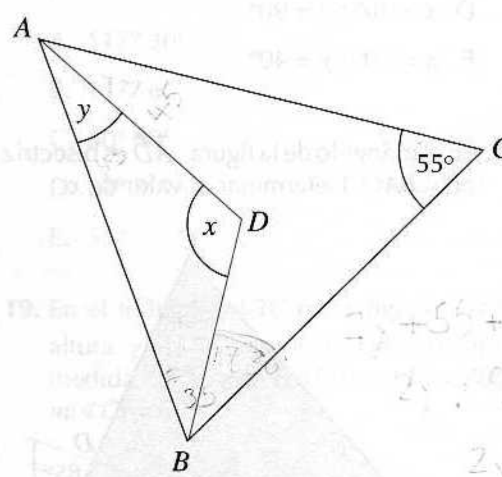
B. $\alpha = 50°$ y $\beta = 10°$

C. $\alpha = 40°$ y $\beta = 20°$

D. $\alpha = 20°$ y $\beta = 40°$

E. $\alpha = 30°$ y $\beta = 30°$

9. En el triángulo ABC, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BD}$ son bisectrices. Si $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle C) - 20°$, determinar el valor de $x + y$.



A. 117° 30′

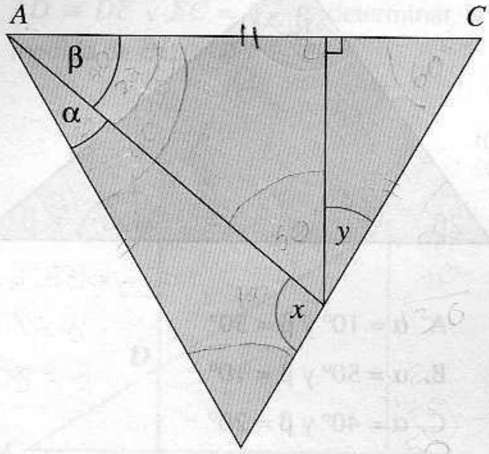
B. 125°

C. 152° 30′

D. 162° 30′

E. 80°

10. Si ABC es un triángulo equilátero donde $\alpha : \beta = 1 : 2$, determinar los valores de x e y.



A. $x = 90^\circ$; $y = 40^\circ$

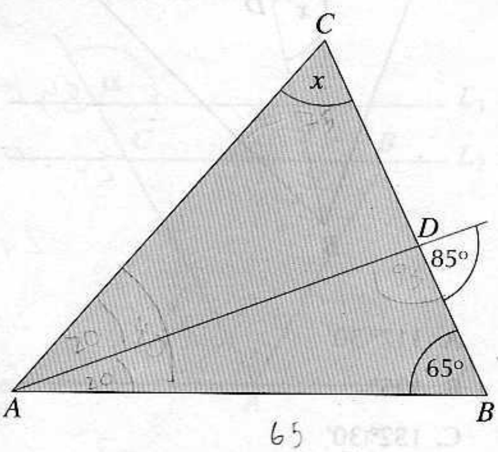
B. $x = 30^\circ$; $y = 100^\circ$

C. $x = 100^\circ$; $y = 30^\circ$

D. $x = 40^\circ$; $y = 90^\circ$

E. $x = 20^\circ$; $y = 40^\circ$

11. En el triángulo de la figura, $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz de $\measuredangle BAC$. Determinar el valor de x.



65
40
105

A. 20°

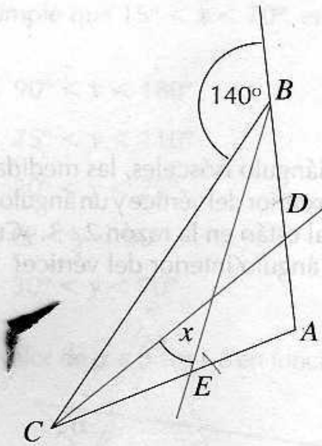
B. 40°

C. 75°

D. 95°

E. 105°

12. En un triángulo ABC isósceles, $AC = AB$, $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{CD}$ son bisectrices. Determinar el valor de x.



A. 10°

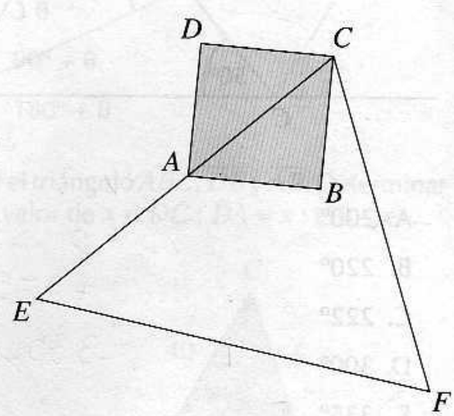
B. 20°

C. 30°

D. 40°

E. 120°

13. En la figura, EFC es triángulo equilátero, $ABCD$ es un cuadrado de lado $AB = 6$ cm. Además, AC es diagonal y $2AC = EC$. Entonces, el área del triángulo CEF es:



A. $144\sqrt{3}$

B. $288\sqrt{3}$

C. $54\sqrt{3}$

D. $72\sqrt{3}$

E. $36\sqrt{2}$

14. Si el lado de un triángulo equilátero es la mitad de la diagonal de un cuadrado de lado 4, entonces el área del triángulo es:

A. $\sqrt{3}$

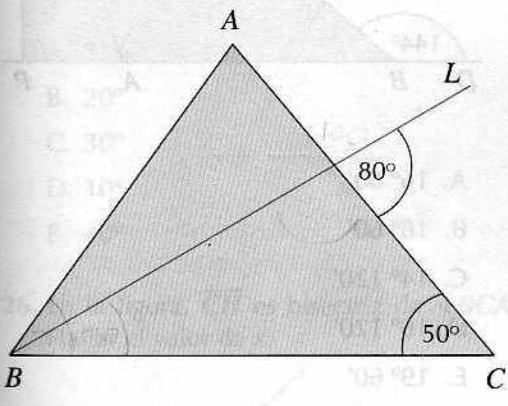
B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $6\sqrt{3}$

E. $8\sqrt{3}$

15. En el triángulo ABC, $\overrightarrow{BL}$ es bisectriz. Determinar la medida del ángulo ABC.



A. 60º

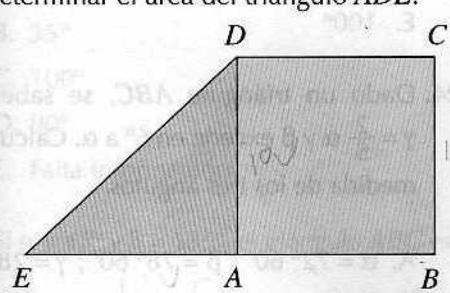
B. 30º

C. 50º

D. 75º

E. 65º

16. El perímetro del cuadrado $ABCD$ es 40 u. Si $AE = AD$ y E, A y B son colineales, determinar el área del triángulo ADE.



A. 100 u^2

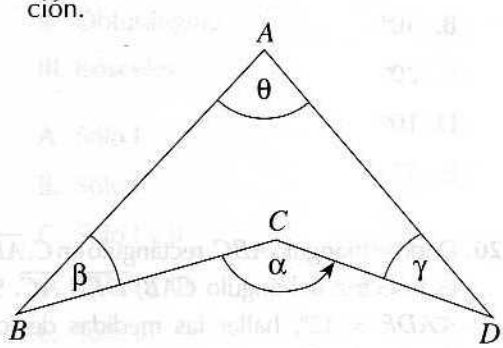
B. 40 u^2

C. 50 u^2

D. 90 u^2

E. 80 u^2

17. En la figura se cumple la siguiente relación.



A. $\alpha = \beta + \theta + \gamma$

B. $\alpha = \beta - \theta + \gamma$

C. $\alpha = \beta + \theta - \gamma$

D. $\alpha = \beta - \theta - \gamma$

E. $\alpha = -\beta + \gamma - \theta$

18. En un triángulo ABC, $m(\sphericalangle C) = 55º$. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos exteriores en A y B.

A. 117º 30′

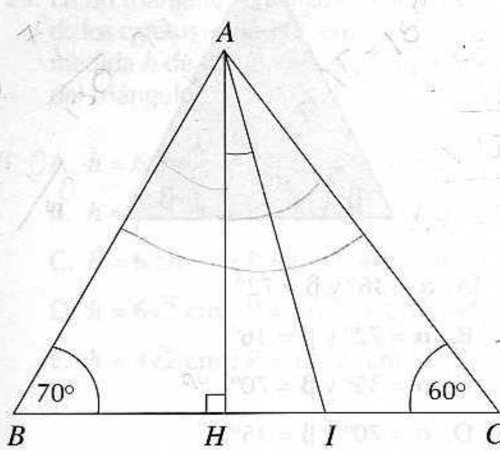
B. 117º 60′

C. 60º 60′

D. 62º 30º

E. 55º

19. En el triángulo ABC de la figura, $\overline{AH}$ es altura y $\overline{AI}$ es bisectriz. Determinar la medida del ángulo HAI si $m(\sphericalangle B) = 70º$ y $m(\sphericalangle C) = 60º$.



A. 65°

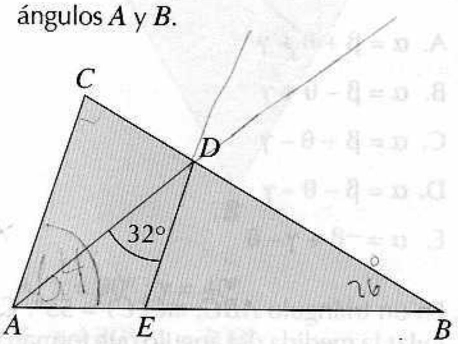
B. 30°

C. 20°

D. 10°

E. 5°

20. Dado el triángulo ABC, rectángulo en C, $\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo CAB; $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$. Si $\measuredangle ADE = 32°$, hallar las medidas de los ángulos A y B.



A. 32° y 58°

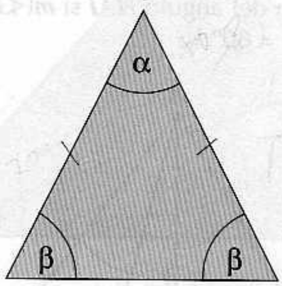
B. 58° y 32°

C. 64° y 26°

D. 26° y 64°

E. Ninguna de las anteriores

21. Hallar los ángulos de un triángulo isósceles, sabiendo que el ángulo del vértice es la mitad de cada uno de los ángulos basales.



A. $\alpha = 36°$ y $\beta = 72°$

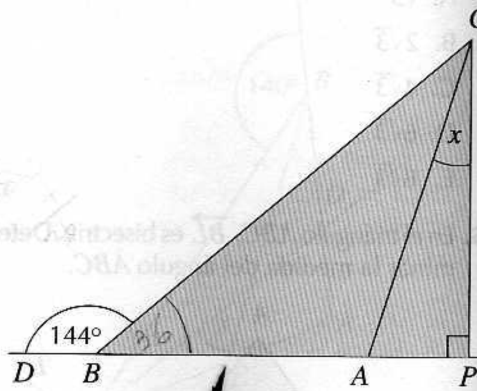
B. $\alpha = 72°$ y $\beta = 36°$

C. $\alpha = 35°$ y $\beta = 70°$

D. $\alpha = 70°$ y $\beta = 35°$

E. $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$

22. En el triángulo ABC de la figura, $AB = AC$ y $\overline{CP} \perp \overline{AB}$. Si $m(\measuredangle CBD) = 144°$, determinar la medida del ángulo x.



A. 16° 60′

B. 18° 60′

C. 14° 120′

D. 16° 120′

E. 19° 60′

23. Sea ABC un triángulo, tal que $m(\measuredangle A) = 70°$ y $m(\measuredangle B) = 30°$. Determinar la medida del ángulo exterior de C.

A. 60°

B. 30°

C. 70°

D. 120°

E. 100°

24. Dado un triángulo ABC, se sabe que $\gamma = \frac{2}{5}\,\alpha$ y β excede en 6° a α. Calcular la medida de los tres ángulos.

A. $\alpha = 72°\ 60'$; $\beta = 78°\ 60'$; $\gamma = 28°\ 30'$

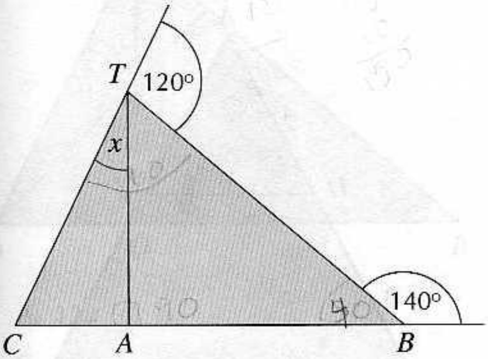
B. $\alpha = 71°\ 60'$; $\beta = 78°\ 30'$; $\gamma = 27°\ 30'$

C. $\alpha = 72°\ 30'$; $\beta = 78°\ 30'$; $\gamma = 28°\ 60'$

D. $\alpha = 28°\ 60'$; $\beta = 71{,}5°'$; $\gamma = 72°$

E. $\alpha = 73°$; $\beta = 79°$; $\gamma = 28°'$

25. Si $\overline{TA}$ es altura en el triángulo BTC, entonces el valor de x es:



A. 35°

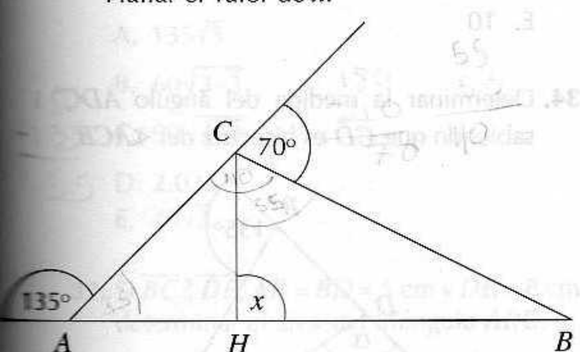
B. 20°

C. 30°

D. 10°

E. 40°

26. En la figura, $\overline{CH}$ es bisectriz de $\measuredangle BCA$. Hallar el valor de x.



A. 30°

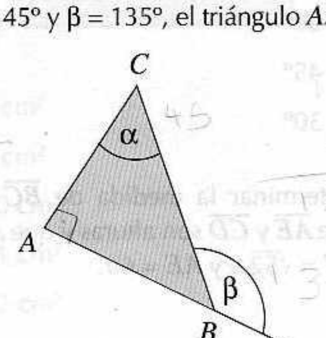
B. 35°

C. 100°

D. 90°

E. Falta información

27. Si $\alpha = 45°$ y $\beta = 135°$, el triángulo ABC es:



I. Rectángulo

II. Obtusángulo

III. Isósceles

A. Sólo I

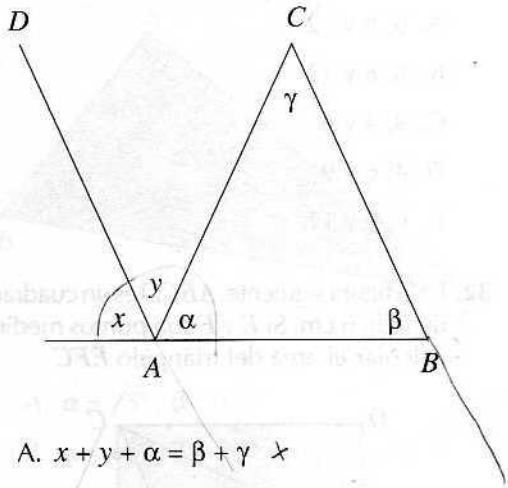
B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo I y III

E. Sólo III

28. En la figura, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Entre los ángulos señalados se cumple la siguiente relación:



A. $x + y + \alpha = \beta + \gamma$

B. $x + y - \beta = \gamma + \alpha$

C. $x + y = \beta + \gamma$

D. $\alpha - y = x$

E. $\alpha - x = y$

29. En un triángulo rectángulo isósceles, uno de los catetos mide $3\sqrt{2}$ cm. Determinar la medida h de la hipotenusa y el perímetro del triángulo.

A. $h = 6$ cm ; $P = 6(\sqrt{2} + 1)$ cm

B. $h = 6\sqrt{2}$ cm ; $P = 6(\sqrt{2} + 1)$ cm

C. $h = 6$ cm ; $P = 6(\sqrt{2} + 2)$ cm

D. $h = 6\sqrt{2}$ cm ; $P = 6(\sqrt{2} + 2)$ cm

E. $h = 3\sqrt{2}$ cm ; $P = 12\sqrt{2}$ cm

30. Los lados de un triángulo son: $x + 3$, $x + 2$ y $2x + 1$. Hallar el valor de x sabiendo que el perímetro del triángulo es 22.

A. 4

B. 2

C. 1

D. 3

E. 6

31. Los lados de un triángulo están en la razón 4 : 3 : 6. Determinar la medida de cada uno si su perímetro es 26 cm.

A. 5, 9 y 12

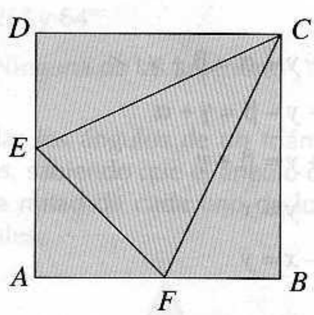
B. 6, 8 y 12

C. 3, 4 y 6

D. 4, 6 y 9

E. 6, 9 y 11

32. En la figura siguiente, $ABCD$ es un cuadrado de lado 6 cm. Si E y F son puntos medios, calcular el área del triángulo EFC.



A. 13,5 cm²

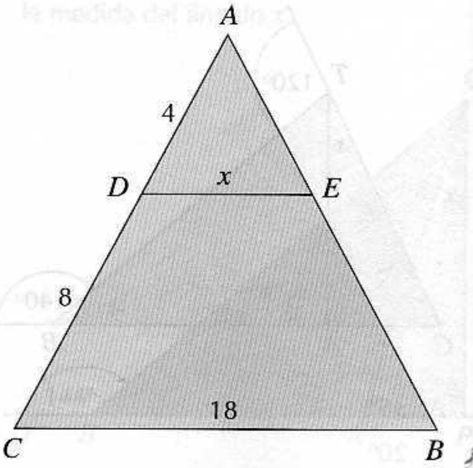
B. 22,5 cm²

C. 36 cm²

D. 31,5 cm²

E. 45,5 cm²

33. En la figura, $AD : DE = AC : CB$. Hallar el valor de x.



A. 9

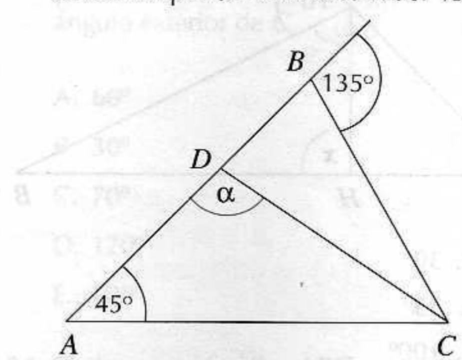
B. 6

C. 3

D. 12

E. 10

34. Determinar la medida del ángulo ADC sabiendo que $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del $\measuredangle ACB$.



A. 20°

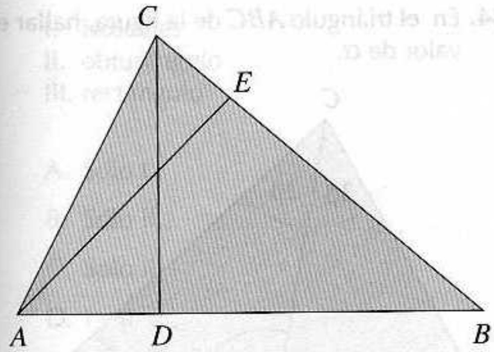
B. 90°

C. 60°

D. 45°

E. 30°

35. Determinar la medida de $\overline{BC}$ sabiendo que $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas y que $AB = 10u$, $AC = \sqrt{52}\,u$ y $AE = 6u$.



A. $12u$

B. $16u$

C. $18u$

D. $20u$

E. $22u$

36. Las áreas de un triángulo equilátero y de un rectángulo son iguales. Si las medidas del rectángulo son 81 y 25 cm, determinar el perímetro del triángulo.

A. $135\sqrt{3}$

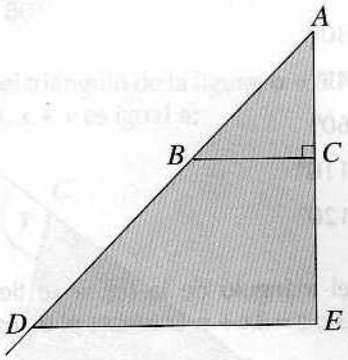
B. $60\sqrt{3\sqrt{3}}$

C. $90\sqrt{3\sqrt{3}}$

D. 2.025

E. $45\sqrt{3}$

37. Si $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$, $AB = BD = 5$ cm y $DE = 8$ cm, determinar el área del triángulo ABC.



A. 6 cm²

B. 8 cm²

C. 10 cm²

D. 11 cm²

E. 12 cm²

38. Si α y β son las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y están en la razón 7 : 8, ¿cuánto mide el ángulo menor?

A. 35°

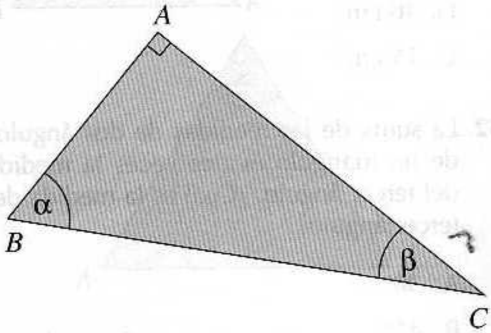
B. 42°

C. 48°

D. 50°

E. 55°

39. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Determinar el valor de α y β si α = 2β.



A. α = 75° ; β = 15°

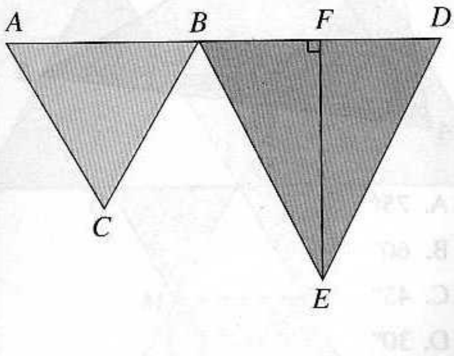
B. α = 60° ; β = 30°

C. α = 70° ; β = 20°

D. α = 50° ; β = 40°

E. α = 65° ; β = 25°

40. Si el triángulo ABC es equilátero de igual perímetro que el triángulo BDE que es isósceles de base $\overline{BD}$ y, además, $FD = 3,5$ y $EB = 10$, hallar la medida de AB.



A. 4

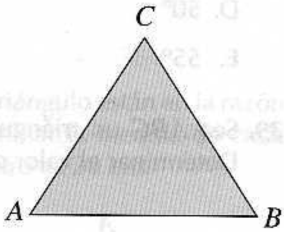
B. 8

C 16

D. 9

E. 6

41. ¿Cuál es el área del triángulo ABC si $AC = BC = 5$ cm y $AB = 6$ cm?



A. 12 cm²

B. 5 cm²

C. 24 cm²

D. 30 cm²

E. 15 cm²

42. La suma de las medidas de dos ángulos de un triángulo es tres veces la medida del tercer ángulo. ¿Cuál es la medida del tercer ángulo?

A. 30°

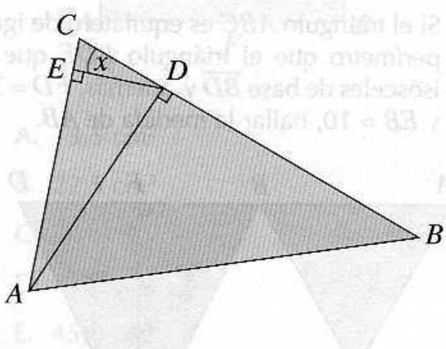
B. 45°

C. 60°

D. 90°

E. 135°

43. Si el triángulo ABC es isósceles con $AB = BC$ y se traza $\overline{AD} \perp \overline{CB}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ y, además, si $m(\measuredangle DAB) = 60°$, ¿cuál es el valor de x?



A. 75°

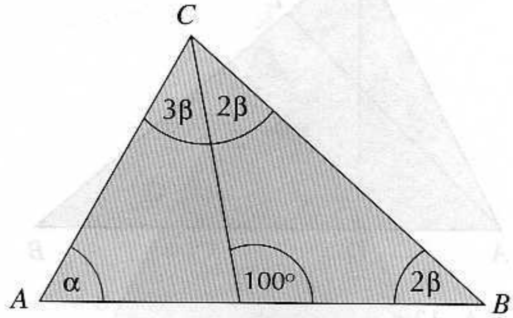
B. 60°

C. 45°

D. 30°

E. 15°

44. En el triángulo ABC de la figura, hallar el valor de α.



A. 80°

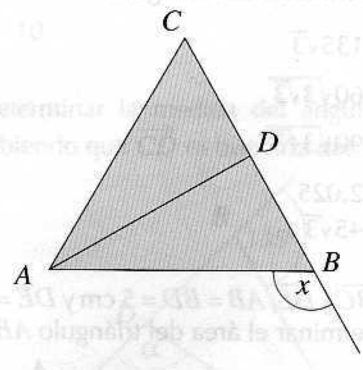
B. 20°

C. 60°

D. 45°

E. 40°

45. En el triángulo ABC equilátero, $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz. Hallar el valor de x.



A. 30°

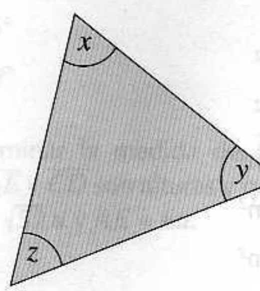
B. 45°

C. 60°

D. 110°

E. 120°

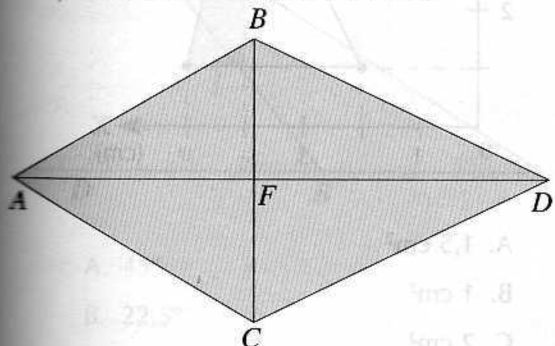
46. En el triángulo de la figura se tiene que $y = 3x$; $z = 3x + y$. Entonces el triángulo es:



I. isósceles
II. obtusángulo
III. rectángulo

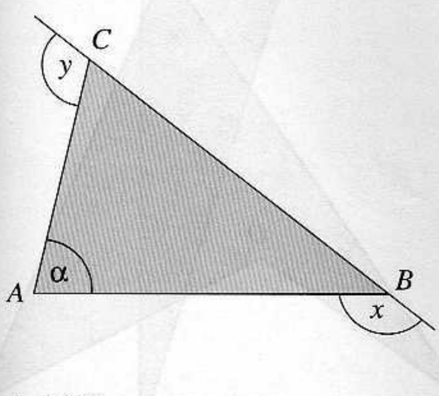
A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. I y II
E. I y III

47. En la figura siguiente, $BF = FC$, $\overline{AF}$ es la altura del $\triangle CAB$ y $\overline{DF}$ es la altura del $\triangle CDB$. Si $m(\sphericalangle BAC) = 80°$ y $m(\sphericalangle ABD) = 120°$, la medida del $\sphericalangle CDB$ es:



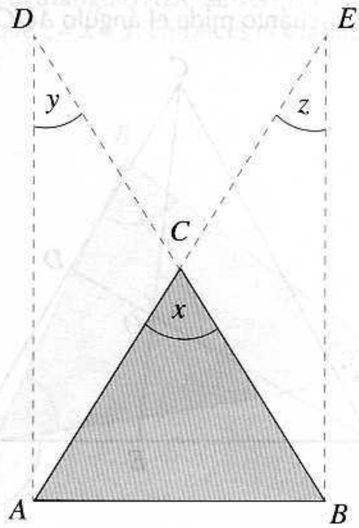
A. 20°
B. 40°
C. 45°
D. 60°
E. 80°

48. En el triángulo de la figura, $\alpha = 80°$. Entonces, $x + y$ es igual a:



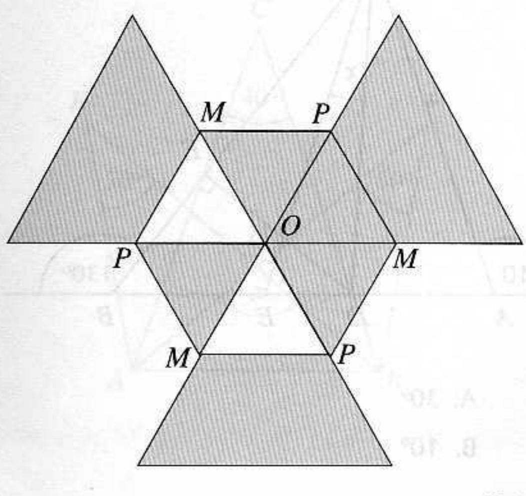
A. 100°
B. 180°
C. 260°
D. 300°
E. 360°

49. En el triángulo ABC se prolongan los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de modo que $DC = CA$ y $CE = CB$. Entonces se verifica que:



A. $x = 2y + z$
B. $2x = y + z$
C. $x = (y + z) - 180$
D. $x + y + z = 180$
E. $x = y + z$

50. La figura está formada por triángulos equiláteros congruentes en los cuales los puntos marcados P y M son puntos medios de los lados. Si cada $\triangle POM$ mide 5 cm², entonces el área de la región sombreada es:



A. 65 cm²

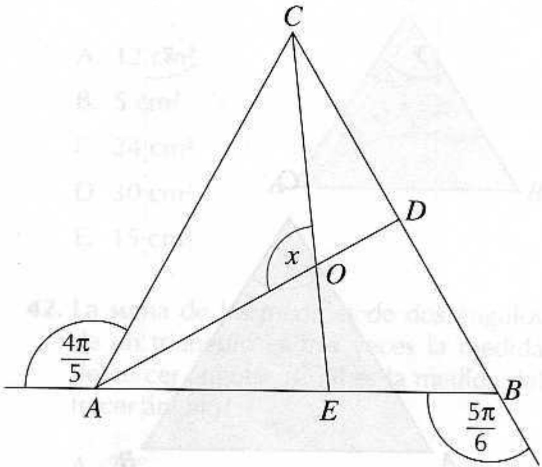
B. 50 cm²

C. 100 cm²

D. 120 cm²

E. 60 cm²

51. Siendo $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CE}$ bisectrices del triángulo ABC, ¿cuánto mide el ángulo AOC?



A. 105°

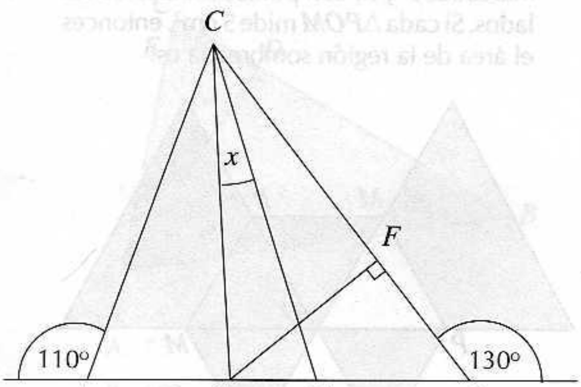
B. π

C. $\frac{3\pi}{2}$

D. 100°

E. 110°

52. Siendo $\overline{CD}$ la altura y $\overline{CE}$ la bisectriz del triángulo ABC, ¿cuál es el valor de x?



A. 30°

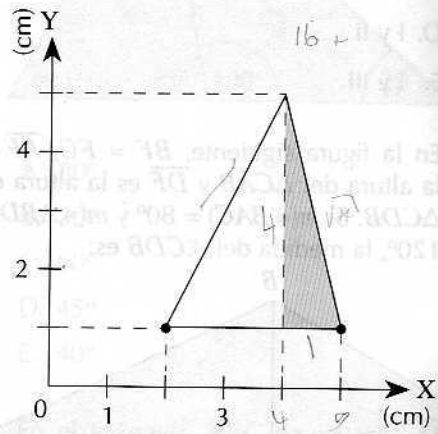
B. 10°

C. 20°

D. 15°

E. 25°

53. Encuentre el área del triángulo sombreado.



A. 1,5 cm²

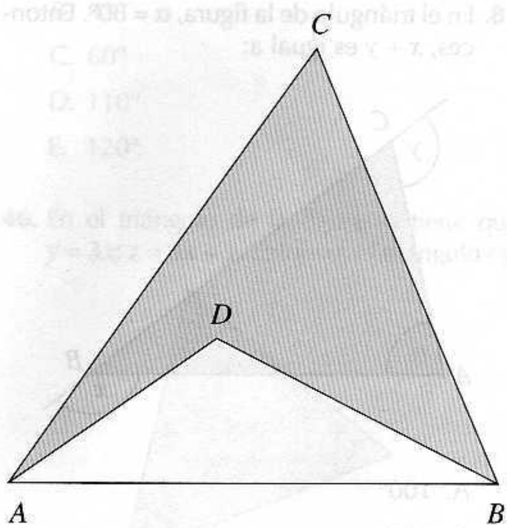
B. 1 cm²

C. 2 cm²

D. 10 cm²

E. 12,5 cm²

54. En el triángulo ABC, la altura correspondiente a $\overline{AB}$ mide 20 cm, el lado $\overline{AB}$ es de 30 cm y el punto D se encuentra a 10 cm de la base. El área de la región sombreada es:



A. 150 cm²

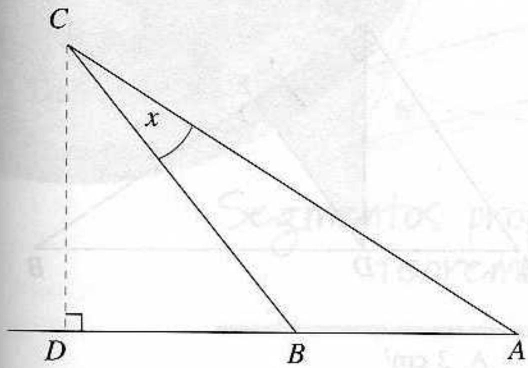
B. 300 cm²

C. 100 cm²

D. Falta información

E. 105 cm²

55. Si en el triángulo ABC isósceles de base $\overline{AC}$ se traza la altura $\overline{CD}$, logrando que $DB = CD$, el valor de x es:



A. 45°

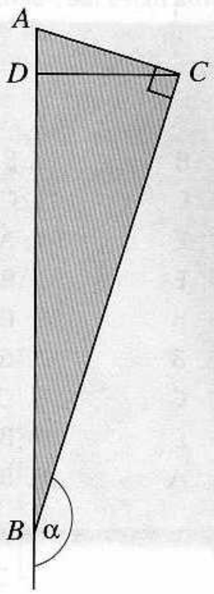
B. 22,5°

C. 20°

D. 25°

E. Ninguna de las anteriores

56. Si en el triángulo rectángulo ABC se traza la altura $\overline{CD}$ y $m(\sphericalangle DCA) = 10°$, el valor de α es:



A. 130°

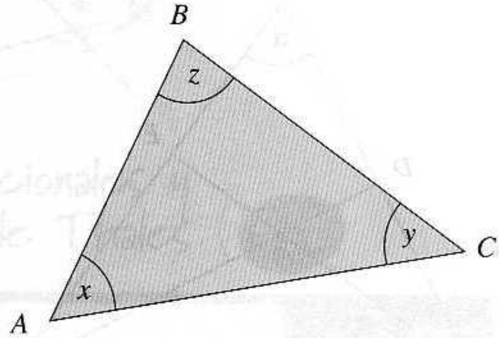
B. 100°

C. 150°

D. 170°

E. 120°

57. En el triángulo ABC se verifica que $y = 2x$ y que $z = x + y$. Entonces el triángulo ABC es:



A. equilátero

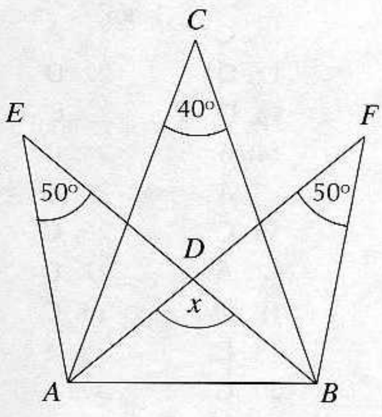
B. obtusángulo

C. rectángulo

D. isósceles

E. Ninguna de las anteriores.

58. En el triángulo ABC se tiene que $AC = BC$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BD}$ son bisectrices del $\sphericalangle CAB$ y del $\sphericalangle CBA$, respectivamente, y el ángulo BCA mide 40°. El ángulo ADB mide:



A. 100°

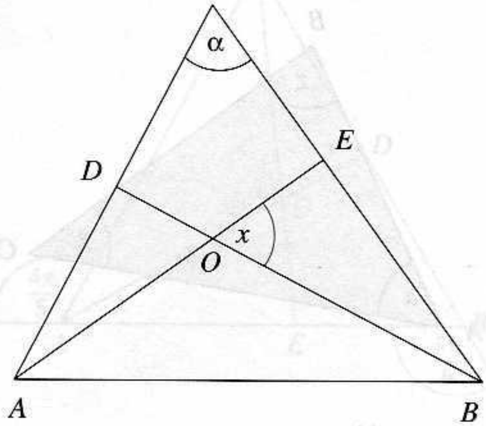
B. 120°

C. 130°

D. 110°

E. 140°

59. En la figura siguiente se traza $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{AE} \perp \overline{BC}$. El ángulo BOE mide:



A. $90° - \alpha$

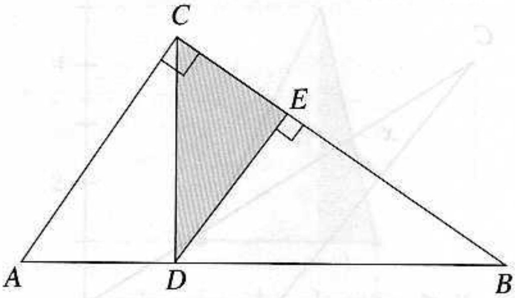
B. α

C. $\dfrac{90° + \alpha}{2}$

D. $180° - \alpha$

E. $\dfrac{180° - \alpha}{2}$

60. Si ABC es un triángulo rectángulo en C; CD es la altura del triángulo ABC; $\overline{DE}$ es la altura del triángulo CDB, $DB = 5$ cm y $BE = 4$ cm, entonces, el área sombreada mide:



A. 3 cm^2

B. $\dfrac{27}{8}$ cm^2

C. 9 cm^2

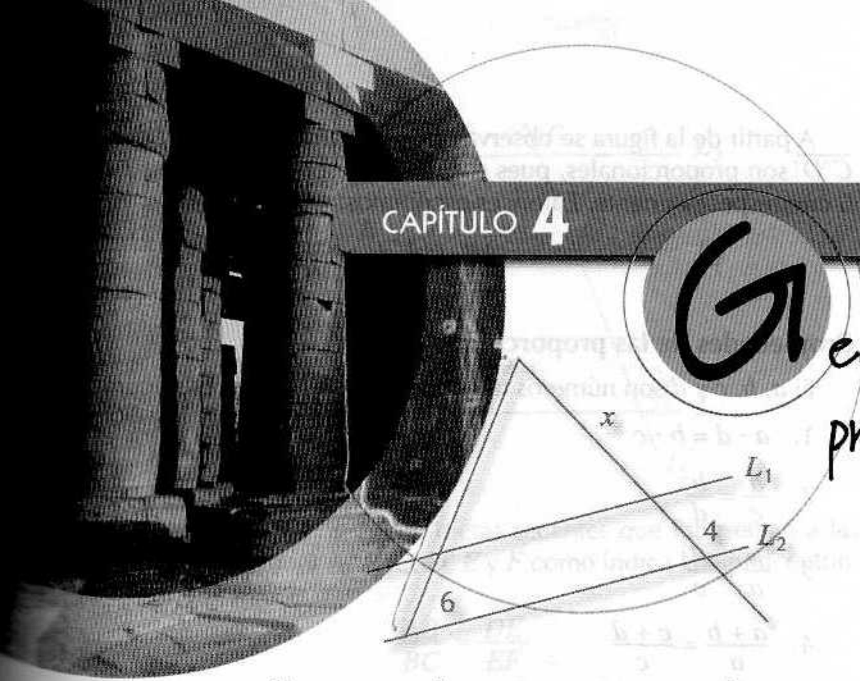
D. 16 cm^2

E. No se puede determinar

Soluciones

1. C	**11.** C	**21.** A	**31.** B	**41.** A	**51.** A
2. D	**12.** D	**22.** D	**32.** A	**42.** B	**52.** B
3. C	**13.** D	**23.** E	**33.** B	**43.** E	**53.** C
4. A	**14.** B	**24.** C	**34.** B	**44.** E	**54.** A
5. A	**15.** A	**25.** D	**35.** A	**45.** E	**55.** B
6. D	**16.** C	**26.** C	**36.** C	**46.** B	**56.** D
7. E	**17.** A	**27.** D	**37.** A	**47.** B	**57.** C
8. D	**18.** D	**28.** C	**38.** B	**48.** C	**58.** D
9. D	**19.** E	**29.** A	**39.** B	**49.** E	**59.** B
10. C	**20.** C	**30.** A	**40.** D	**50.** A	**60.** B

CAPÍTULO 4



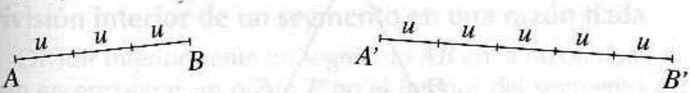
Geometría de proporciones

Segmentos proporcionales y teorema de Thales 4.1

Definiciones y teoremas

Recordemos que la razón entre dos números a y b es una comparación por cociente entre ellos y la denotamos por $a : b$ o $\frac{a}{b}$. Entonces, llamamos razón entre dos trazos o segmentos al cociente entre sus medidas.

Ejemplo 1:



Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ están en la razón 3 : 5.

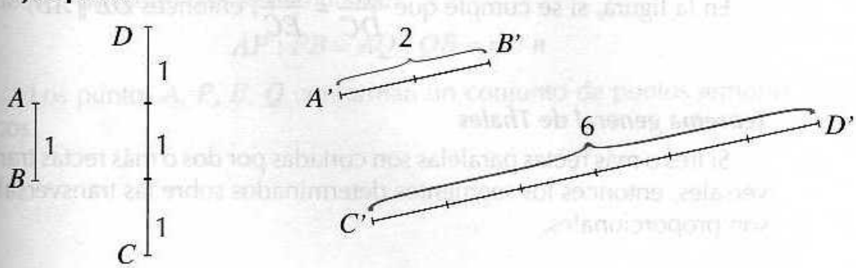
La razón en la cual están ambos segmentos es independiente de la unidad que se utilice, siempre que se emplee la misma unidad para ambos segmentos.

Si la razón en que están dos segmentos es un número racional, decimos que los segmentos son conmensurables.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Cuatro segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son proporcionales si se cumple que: $\frac{AA'}{BB'} = \frac{CC'}{DD'}$.

Ejemplo 2:



A partir de la figura se observa que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ son proporcionales, pues sus medidas son 1 cm, 3 cm, 2 cm y 6 cm, respectivamente. Entonces escribimos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Propiedades de las proporciones

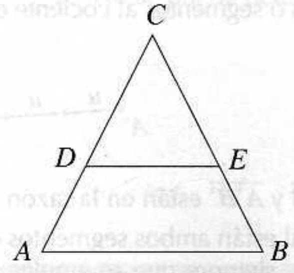
Si a, b, c y d son números tales que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces se cumple:

1. $a \cdot d = b \cdot c$
2. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
3. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
4. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$
5. $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$
6. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Teorema de Thales sobre segmentos proporcionales

Teorema particular de Thales

Si se traza una recta paralela a un lado de un triángulo, entonces los segmentos determinados sobre los otros lados son proporcionales.



En la figura, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y se cumple que: $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$.

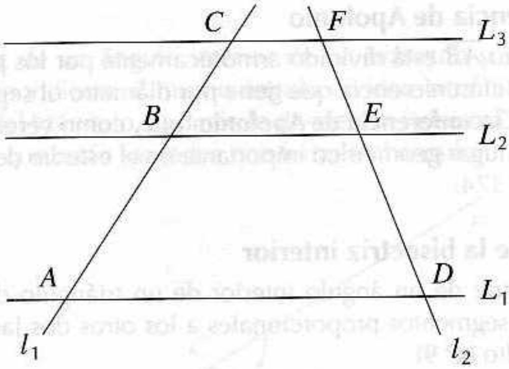
El recíproco de este teorema también es cierto, es decir:

"Si una recta intersecta dos lados de un triángulo en dos puntos distintos de modo que los segmentos determinados sobre esos lados resultan proporcionales, entonces esta recta es paralela al tercer lado."

En la figura, si se cumple que $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.

Teorema general de Thales

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos o más rectas transversales, entonces los segmentos determinados sobre las transversales son proporcionales.



Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ y l_1 y l_2 son rectas secantes que intersectan a las paralelas en los puntos A, B, C, D, E y F como indica la figura, entonces se cumple que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

El teorema recíproco también es cierto, es decir:

"Si tres o más rectas son intersectadas por dos transversales, determinando sobre aquellas transversales segmentos correspondientes proporcionales, entonces dichas rectas son paralelas."

En la figura anterior, si se cumple que: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, entonces se cumple que: $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$.

División de un segmento en una razón dada

División interior de un segmento en una razón dada

Dividir interiormente un segmento $\overline{AB}$ en la razón dada $m : n$ consiste en encontrar un punto P en el interior del segmento $\overline{AB}$ tal que se cumpla $AP : PB = m : n$.

División exterior de un segmento en una razón dada

Dividir exteriormente un segmento AB en la razón dada $m : n$ consiste en encontrar un punto P en la prolongación de AB tal que se cumpla $AP : PB = m : n$.

División armónica de un segmento

Dividir armónicamente un segmento $\overline{AB}$ en la razón $m : n$ consiste en dividirlo interiormente y exteriormente en la misma razón, esto es encontrar dos puntos, P en el interior de $\overline{AB}$ y Q en la prolongación de $\overline{AB}$, de modo que se cumpla que:

$$AP : PB = AQ : QB = m : n$$

Los puntos A, P, B, Q conforman un conjunto de puntos armónicos.

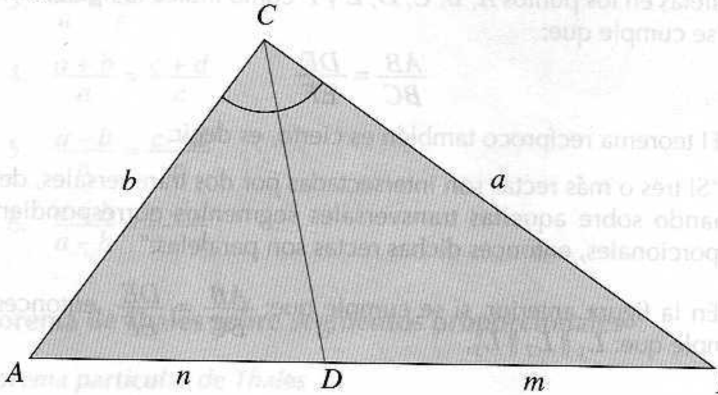
Circunferencia de Apolonio

Si el trazo $\overline{AB}$ está dividido armónicamente por los puntos P y Q, entonces la circunferencia que tiene por diámetro el segmento PQ se denomina **Circunferencia de Apolonio**, que, como veremos más adelante, es un lugar geométrico importante en el estudio de la geometría (Ver página 374).

Teorema de la bisectriz interior

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados (Ver Ejercicio Resuelto Nº 9)

En la figura, ABC es un triángulo cualquiera y $\overrightarrow{CD}$ es la bisectriz del ángulo ACB.

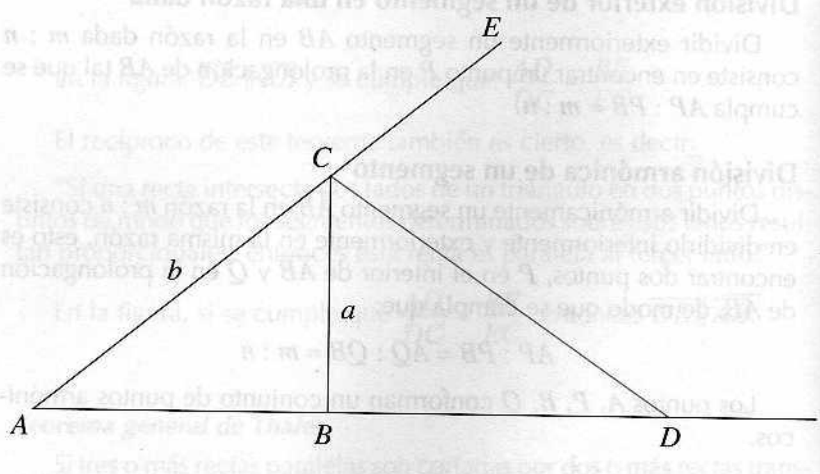


Se cumple que: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DB}$

Teorema de la bisectriz exterior

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

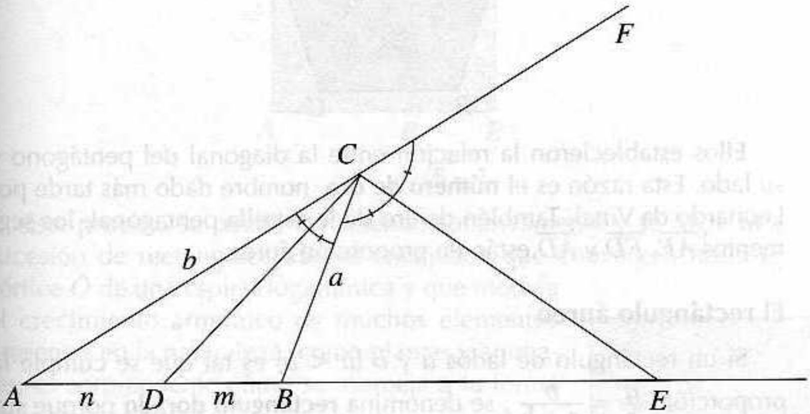
En la figura, ABC es un triángulo cualquiera y $\overrightarrow{CD}$ es la bisectriz del ángulo BCE.



Se cumple que: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$

Corolario

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo y la bisectriz exterior correspondiente al mismo ángulo dividen armónicamente al lado opuesto del triángulo, es decir, lo dividen en la misma razón (que es la razón en que están los lados que forman el ángulo).



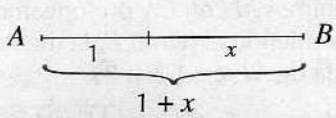
En el triángulo ABC de la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB y $\overrightarrow{CE}$ es bisectriz del ángulo BCF.

Se cumple que: $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{n}{m}$

La sección áurea o Divina proporción. El número de oro

La seción áurea de un segmento es la división armónica de él en media y extrema razón, esto es, la razón entre el segmento menor y el mayor es la misma que hay entre el segmento mayor y el segmento completo.

Tomemos un segmento de longitud 1 y realicemos en él esta división.



Sea 1 el segmento menor que resulta de la división y x el segmento mayor, entonces $(1 + x)$ es el segmento completo y se cumple:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 + x}$$

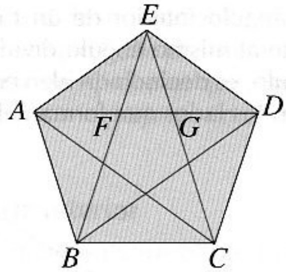
Al resolver esta ecuación obtenemos una ecuación cuadrática, cuya solución positiva es:

$$x = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$$

(la solución negativa se ignora pues se trata de medida de segmentos).

Este número se llama **número de oro**; es un número irracional, generalmente se designa por la letra griega ϕ y su valor es aproximadamente 1,618…

Los Pitagóricos tenían como símbolo la estrella pentagonal.



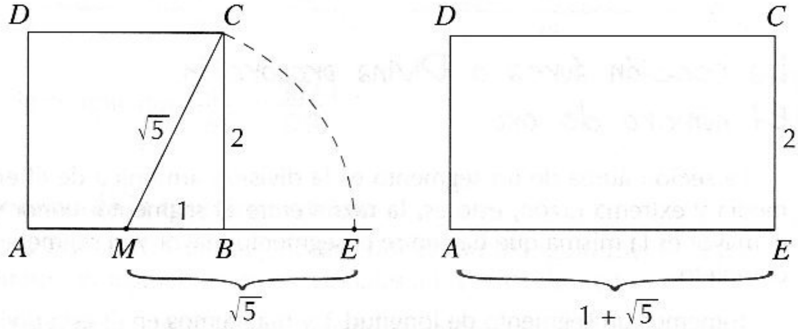
Ellos establecieron la relación entre la diagonal del pentágono y su lado. Esta razón es el **número de oro**, nombre dado más tarde por Leonardo da Vinci. También dentro de la estrella pentagonal, los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{FD}$ y $\overline{AD}$ están en proporción áurea.

El rectángulo áureo

Si un rectángulo de lados a y b ($a < b$) es tal que se cumple la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$, se denomina **rectángulo dorado** porque sus lados están en proporción áurea.

Podemos construir un rectángulo áureo de la siguiente manera:

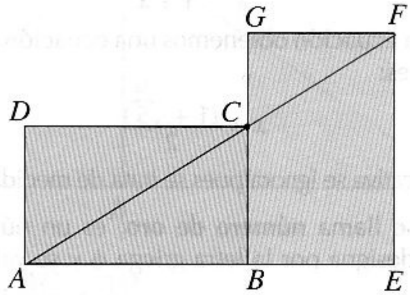
Dibujamos un cuadrado $ABCD$ de lado 2, y marcamos el punto medio M de uno de sus lados.



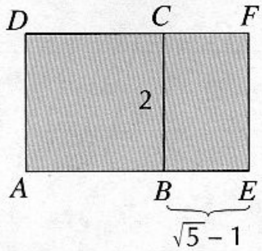
A continuación, unimos M con C y prolongamos esa medida sobre el lado inicial AB, obteniendo el punto E; la medida de MC es ($\sqrt{5}$) y, por lo tanto, la medida de AE es: 1 + ($\sqrt{5}$).

Los lados del rectángulo áureo son $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$ y la razón entre los lados de este rectángulo es el número de oro.

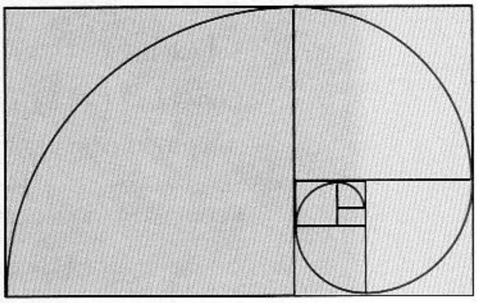
Si disponemos dos rectángulos áureos congruentes, como lo indica la figura siguiente, los puntos A, C y F son colineales.



Una de las particularidades que tiene este rectángulo es que al quitarle "el cuadrado" determinado por el lado menor del rectángulo, se obtiene otro rectángulo semejante al anterior, es decir, se obtiene otro "rectángulo áureo".



Este proceso se puede ir haciendo sucesivamente y se logra una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hasta el vértice O de una espiral logarítmica y que modela el crecimiento armónico de muchos elementos presentes en la naturaleza, como plantas y animales; es sorprendente cómo se asemeja a la forma de una caracola.



La proporción áurea ha estado presente desde tiempos muy antiguos en arquitectura, en edificios tales como la Pirámide de Keops y El Partenón, entre otros; en el arte, en el renacimiento; en genética, en botánica, en el cuerpo humano y, últimamente, hasta en las tarjetas de crédito.

Ejercicios resueltos

1. Un segmento $\overline{AB}$, de 80 cm de longitud, se divide interiormente en la razón 1 : 4. ¿Cuál es la medida de cada segmento?

   Solución:

   Debemos determinar el punto P en el interior de $\overline{AB}$ de modo que $AP: PB = 1:4$, es decir, debemos determinar una unidad de medida u que cumpla que $AP : PB = 1\ u : 4\ u$.

   Como la longitud del segmento es 80 cm, se debe dividir en 5 partes iguales, de 16 cm cada una; una de estas partes corresponde a $\overline{AP}$ y las otras cuatro a $\overline{BP}$; por lo tanto, $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ miden 16 cm y 64 cm, respectivamente.

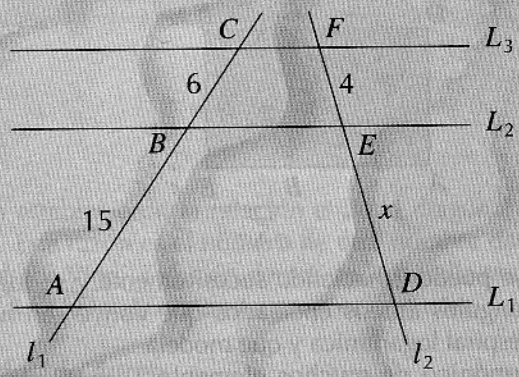
2. Un segmento está dividido interiormente en la razón 1 : 3 : 5, y la medida del segmento mayor es 75 cm. ¿Cuál es la longitud del segmento completo?

   Solución:

   El segmento completo está dividido en 9 unidades de igual medida y cinco de esas nueve unidades equivalen a 75 cm; por lo tanto, cada una mide 15 cm.

   La longitud del segmento es entonces 15 veces 9, es decir, 135 cm.

3. En la figura siguiente, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determinemos la medida del segmento $\overline{ED}$.



Solución:

Como $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, entonces los segmentos determinados sobre l_1 y l_2 son proporcionales, es decir: $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{AB}{BC}$.

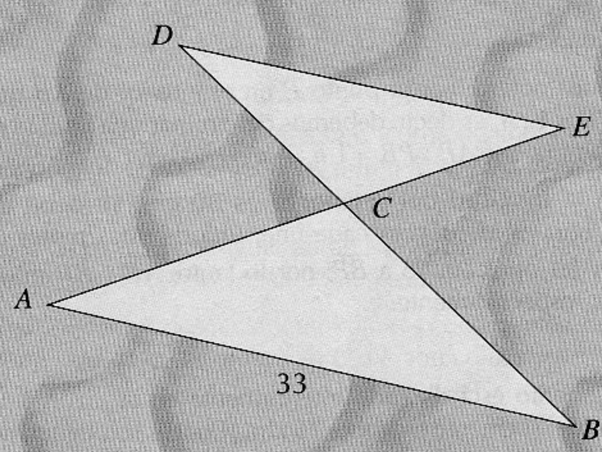
Reemplazando tenemos:

$$\frac{x}{4} = \frac{15}{6}$$

de donde obtenemos:

$$x = 10$$

4. En la figura siguiente, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $CE = 9$ cm, $DE = 27$ cm y $AB = 33$ cm. Determinemos la medida del segmento $\overline{AE}$.



Solución:

Como $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces los segmentos correspondientes determinados sobre los lados de los triángulos son proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE}$$

Si llamamos x a la medida del segmento $\overline{AE}$, entonces $AC = (x - 9)$ y al reemplazar, obtenemos:

$$\frac{33}{27} = \frac{x-9}{9}$$

y al resolver esta ecuación tenemos

$x = 20$, que es la medida del trazo $\overline{AE}$.

5. Dividamos interiormente el segmento $\overline{AB}$ en la razón 5 : 2.

Solución 1:

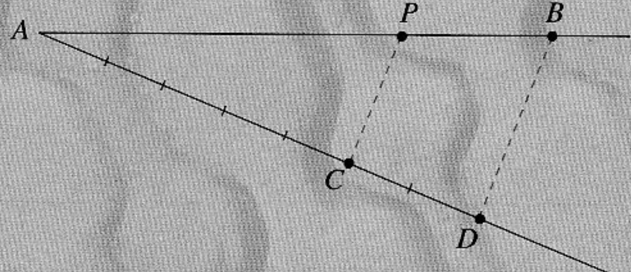
Debemos encontrar un punto P entre A y B de modo que se cumpla que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{5}{2}$.

Copiamos el segmento $\overline{AB}$ y desde uno de sus vértices trazamos un rayo que forme un ángulo no extendido con $\overline{AB}$.

A continuación, desde el vértice del ángulo así formado, utilizando una unidad cualquiera, copiamos 5 veces esa unidad, determinando el punto C sobre el rayo trazado, y luego copiamos dos veces la misma unidad, determinando el punto D sobre el mismo rayo.

Unimos el punto D con el punto B y por C trazamos una recta paralela a $\overline{BD}$ que intersecta a $\overline{AB}$ en el punto P. El punto P es el punto que divide interiormente al trazo AB en la razón 5 : 2. Se cumple que:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{CD} = \frac{5}{2}$$



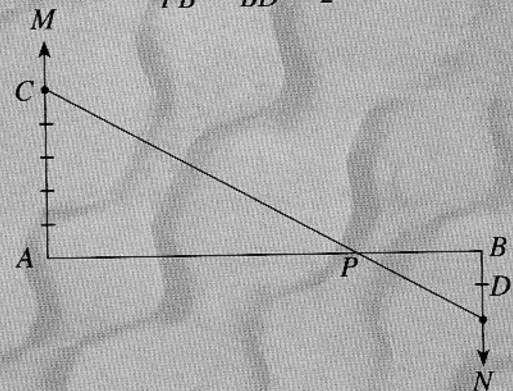
Solución 2:

Copiamos el trazo $\overline{AB}$ y desde sus extremos trazamos rayos $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BN}$, paralelos entre sí y en sentidos opuestos respecto de $\overline{AB}$.

Sobre $\overline{AM}$ y a partir de A, con una unidad cualquiera, copiamos cinco veces esa unidad, determinando el punto C, y sobre BN, a partir de B, copiamos dos veces la misma unidad, determinando el punto D.

La intersección de $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ determina el punto P, que es el punto de división interior del trazo $\overline{AB}$ en la razón 5 : 2. Se cumple que:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{BD}=\frac{5}{2}$$



6. Dividamos exteriormente el segmento $\overline{AB}$ en la razón 5 : 2.

Solución:

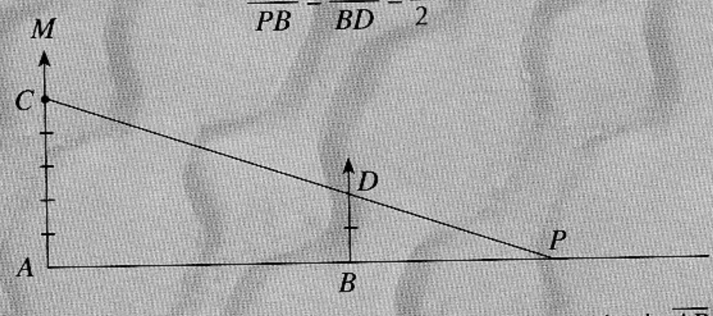
Debemos encontrar un punto P en la prolongación de $\overline{AB}$ de modo que se cumpla que $\frac{AP}{PB}=\frac{5}{2}$.

Copiamos el segmento $\overline{AB}$ y desde sus extremos trazamos rayos $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BN}$ paralelos entre sí y en el mismo sentido respecto de $\overline{AB}$.

Sobre $\overrightarrow{AM}$ y con una unidad cualquiera, a partir de A, copiamos cinco veces esa unidad, determinando el punto C, y sobre $\overrightarrow{BN}$, a partir de B, copiamos dos veces la misma unidad, determinando el punto D.

La intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ origina el punto P, en la prolongación de $\overline{AB}$, que es el punto de división exterior del trazo $\overline{AB}$ en la razón 5 : 2. Se cumple:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{BD}=\frac{5}{2}$$



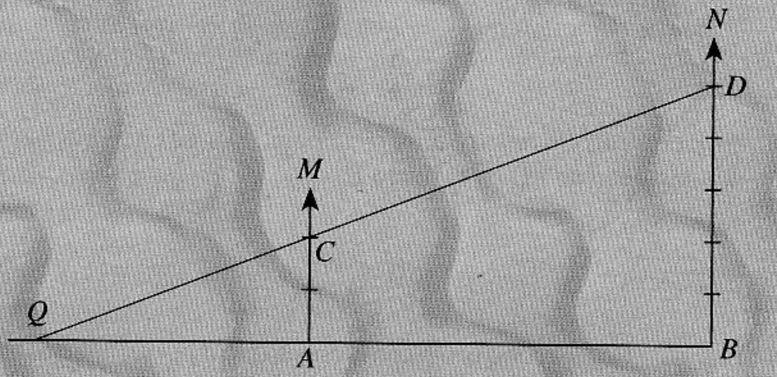
En este caso, el punto P se encuentra en la continuación de $\overline{AB}$ en la dirección de B porque la razón de división es un número mayor que 1.

Si la razón de división fuese un número menor que 1, entonces el punto de división exterior queda ubicado en la prolongación de $\overline{AB}$, pero en el sentido de A.

7. Dividamos exteriormente el segmento $\overline{AB}$ en la razón 2 : 5.

Solución:

Procedemos, exactamente como en el caso anterior, copiando desde el punto A, en el rayo $\overrightarrow{AM}$, dos unidades de medida y desde el punto B, en el rayo $\overrightarrow{BN}$, cinco unidades de la misma medida, determinando los puntos C y D, respectivamente. La intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ con $\overleftrightarrow{AB}$ origina el punto Q de división exterior.

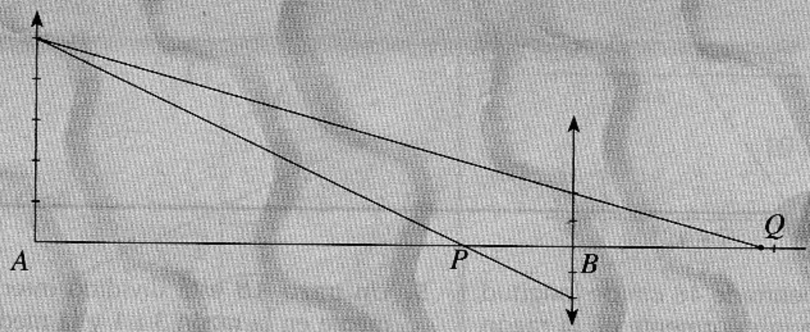


8. Dividamos armónicamente el segmento $\overline{AB}$ en la razón 5 : 2.

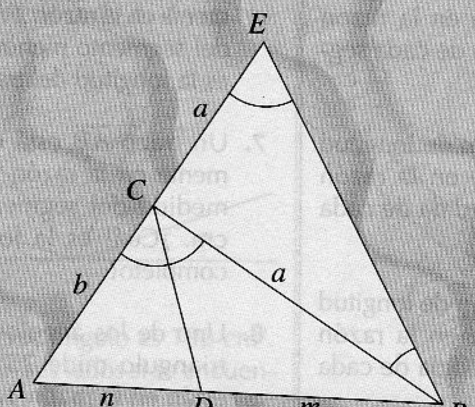
Solución:

Debemos encontrar los dos puntos P y Q, de división interior y exterior respectivamente, en la razón 5 : 2.

Copiamos el trazo $\overline{AB}$ y aplicamos ambos procedimientos para determinar los puntos pedidos.



9. Demostremos el teorema de la bisectriz interior, que dice que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.



Solución:

En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB; $AC = b$; $BC = a$; $AD = n$ y $BD = m$.

Debemos demostrar que:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Trazamos por el vértice B una recta paralela a $\overline{CD}$ que intersecta a la prolongación de $\overline{AC}$ en el punto E.

Se cumple que:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{DB}{AD}$$

El ángulo CBE es congruente con el ángulo DCB por ser ángulos alternos internos entre paralelas, y el ángulo CEB es congruente con el ángulo ACD por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Así, los ángulos CBE y CEB son congruentes por ser $\overline{CD}$ bisectriz.

Entonces, el triángulo ECB es isósceles de base $\overline{BE}$ y $CB = CE = a$.

Reemplazando en la proporción, nos queda:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Ejercicios

1. Un segmento de 48 cm de longitud se divide interiormente en la razón 1 : 3. ¿Cuál es la medida de cada segmento?

2. Un segmento de 90 cm de longitud se divide interiormente en la razón 5: 7. ¿Cuál es la medida de cada segmento?

3. Un segmento de 180 cm de longitud se divide interiormente en la razón 2 : 3 : 4. ¿Cuál es la medida de cada segmento?

4. Un segmento de 10,5 cm de longitud se divide interiormente en la razón 2 : 4 : 9. ¿Cuál es la medida de cada segmento?

5. Un trazo $\overline{AB}$ está dividido interiormente en la razón 3 : 1 y la medida del segmento mayor es 72 cm. ¿Cuál es la longitud del trazo completo?

6. Un trazo $\overline{AB}$ está dividido interiormente en la razón 2 : 3 : 12 y la medida del segmento menor es 21 cm. ¿Cuál es la longitud del trazo completo?

7. Un trazo $\overline{AB}$ está dividido interiormente en la razón 1 : 1 : 2 : 1 y la medida del segmento mayor es 25 cm. ¿Cuál es la longitud del trazo completo?

8. Uno de los ángulos interiores de un triángulo mide 75° y los otros dos están en la razón 1 : 2. Determine la medida de cada uno.

9. Los ángulos interiores de un triángulo están en la razón 2 : 2 : 5. ¿Cuánto mide cada uno?

10. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo están en la razón 1 : 5. ¿Cuánto mide cada uno?

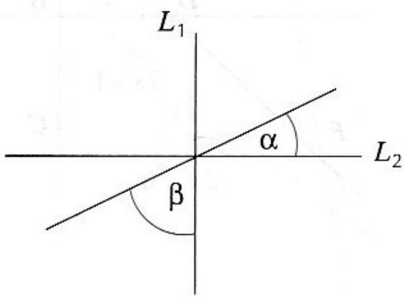
11. ¿Cuál es la medida de un ángulo si su suplemento y su complemento están en la razón 4 : 1?

12. ¿Cuál es la medida de un ángulo si su complemento y su suplemento están en la razón 1 : 7?

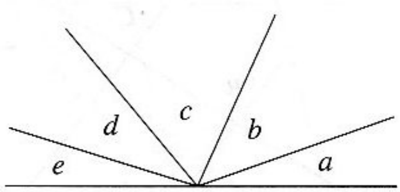
13. Un ángulo y su complemento están en la razón 1 : 3. ¿Cuál es su medida?

14. Un ángulo y su suplemento están en la razón 1 : 1. ¿Cuál es su medida?

15. En la figura, L_1 y L_2 son perpendiculares y $\alpha : \beta = 2 : 3$. ¿Cuáles son los valores de α y β?

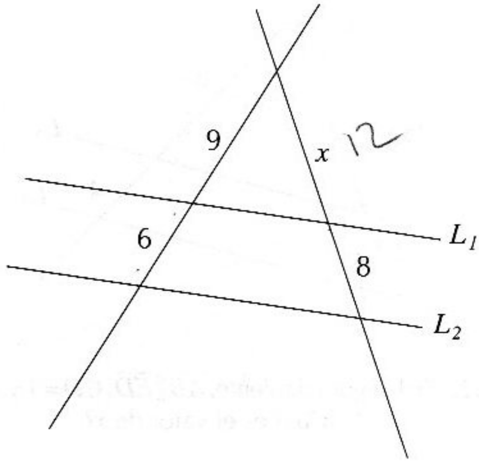


16. En la figura:
$a : b : c : d : e = 2 : 3 : 5 : 4 : 1$. ¿Cuáles son los valores de a, b, c, d y e, respectivamente?

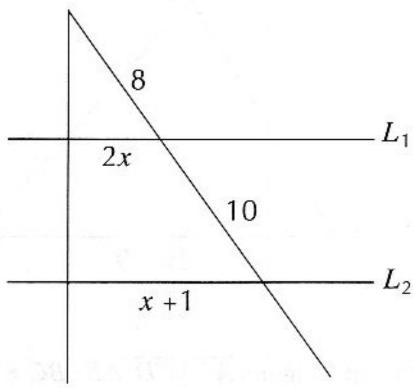


17. El área de un rectángulo es 192 cm². ¿Cuánto miden sus lados si se encuentran en la razón 3 : 4?

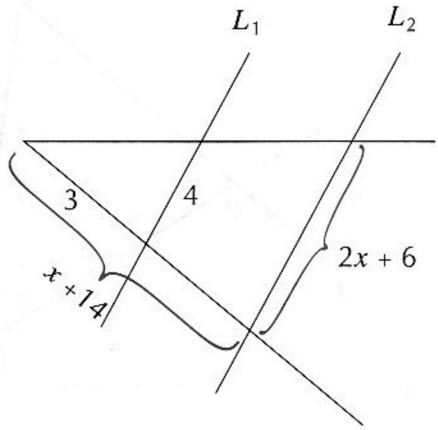
18. En la figura siguiente, $L_1 \parallel L_2$. ¿Cuál es el valor de x?



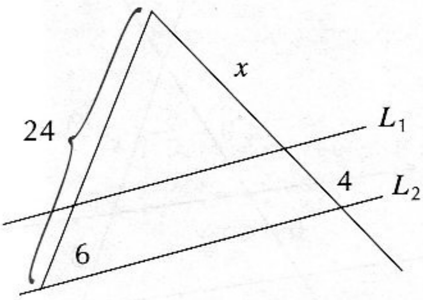
19. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. ¿Cuál es el valor de x?



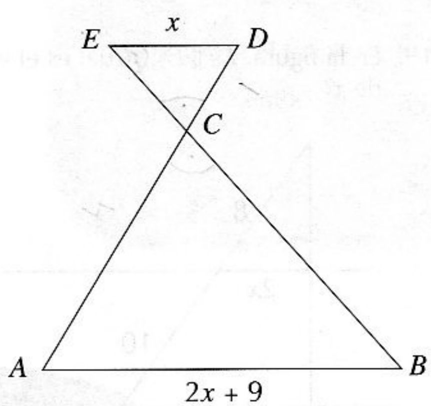
20. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. ¿Cuál es el valor de x?



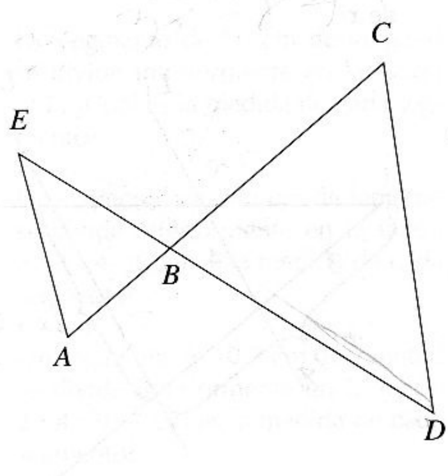
21. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. ¿Cuál es el valor de x?



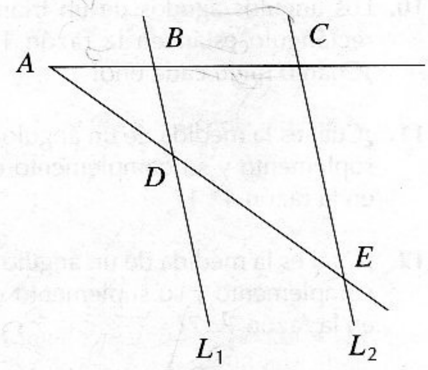
22. En la figura siguiente, $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, $CD = 1$ y $AC = 4$. ¿Cuál es el valor de x?



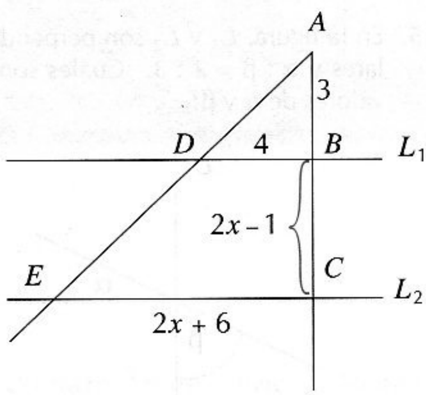
23. En la figura, $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$, $AB : BC = 2 : 3$; $ED = 84$ cm. Determine las medidas de $\overline{EB}$ y $\overline{BD}$.



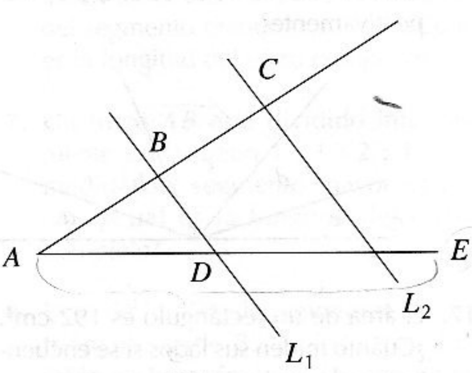
24. Si en la figura $L_1 \parallel L_2$, $AC = 30$ cm y $AD : DE = 2 : 3$, determine las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.



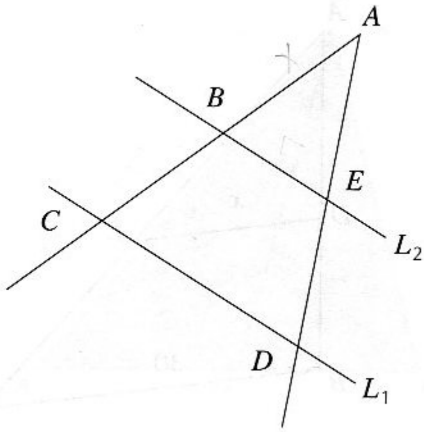
25. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Determine la medida de $\overline{BC}$.



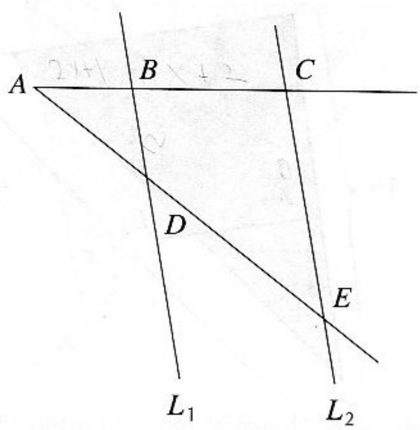
26. En la figura, $L_1 \parallel L_2$, $AB : BC = 1 : 3$ y $AE = 28$ cm. Determine la medida de $\overline{AD}$.



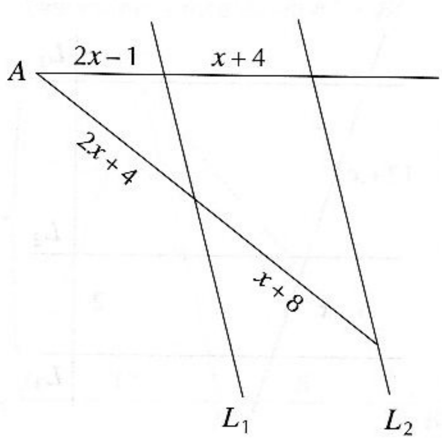
27. En la figura tenemos que $L_1 \parallel L_2$, $AB = x$, $BC = x + 12$, $BE = 5$ y $CD = 30$. Determine la medida de $\overline{AC}$.



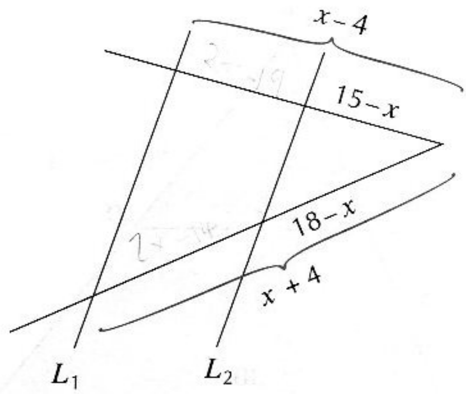
28. En la figura tenemos que $L_1 \parallel L_2$, $AB = 2x + 1$, $BC = x + 2$, $BD = 12$ y $CE = 20$. Determine la medida de $\overline{AC}$.



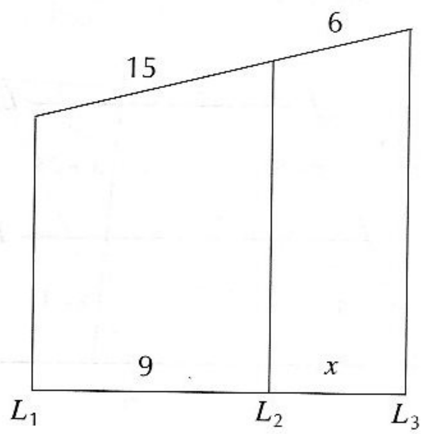
29. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Determine el valor de x.



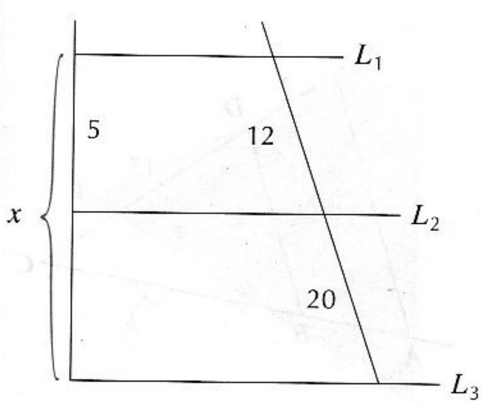
30. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Determine el valor de x.



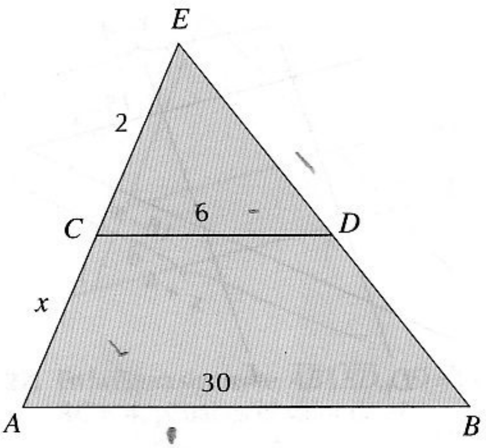
31. En la figura, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determine el valor de x.



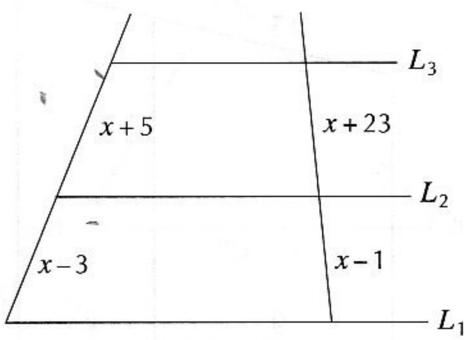
32. En la figura, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determine el valor de x.



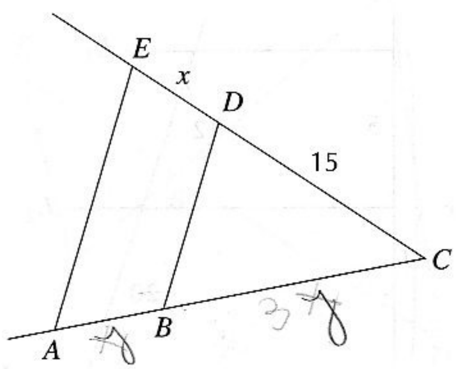
33. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Determine el valor de x.



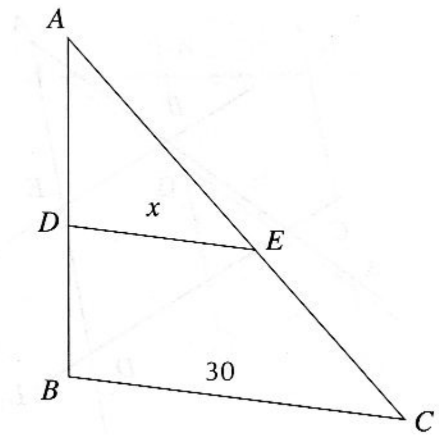
34. En la figura, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determine el valor de x.



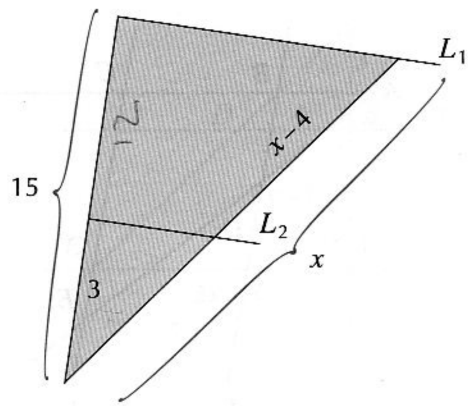
35. En la figura siguiente tenemos: $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ y $AB : BC = 1 : 3$. Determine el valor de x.



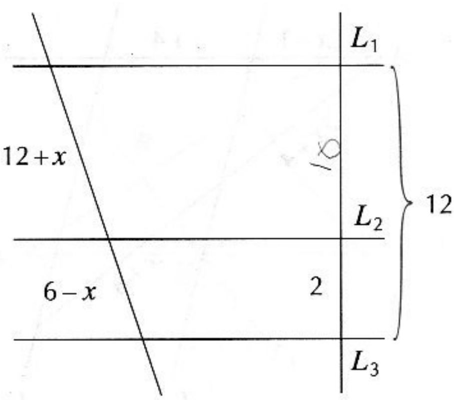
36. En la figura tenemos que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ y $AB : AD = 5 : 4$. Determine el valor de x.



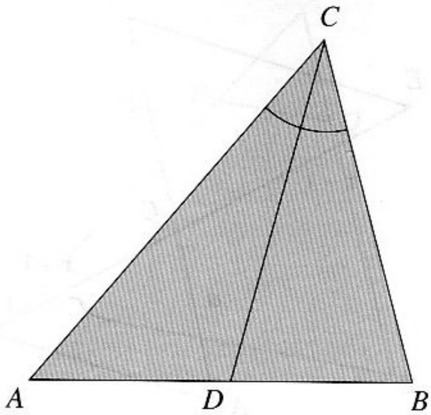
37. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Determine el valor de x.



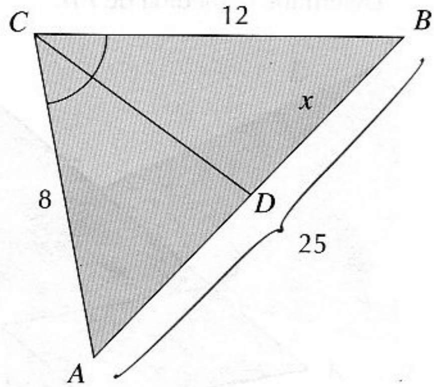
38. En la figura, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. Determine el valor de x.



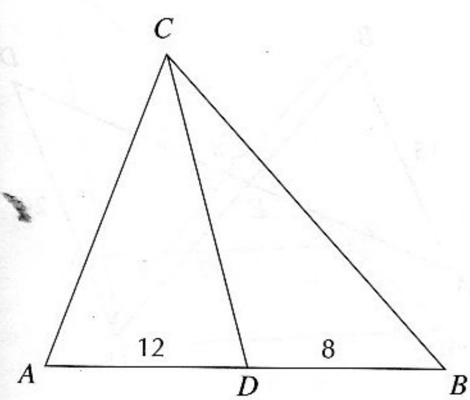
39. En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. $AC = 21$; $BC = 15$ y $BD = 10$. Determine la medida de $\overline{AD}$.



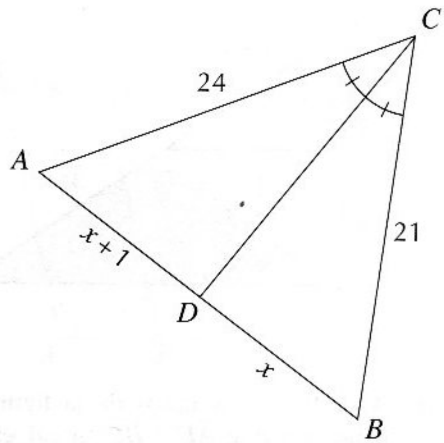
40. En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. ¿Cuál es el valor de x?



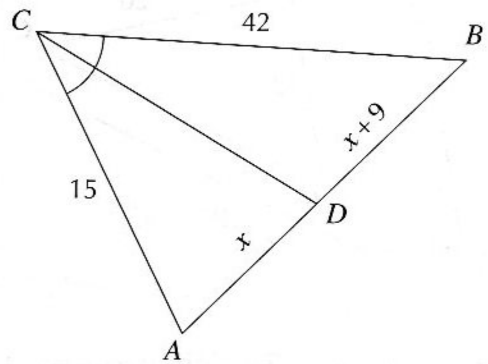
41. El perímetro del triángulo ABC de la figura es 60 cm; $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB; $AD = 12$ y $BD = 8$. Determine la medida de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.



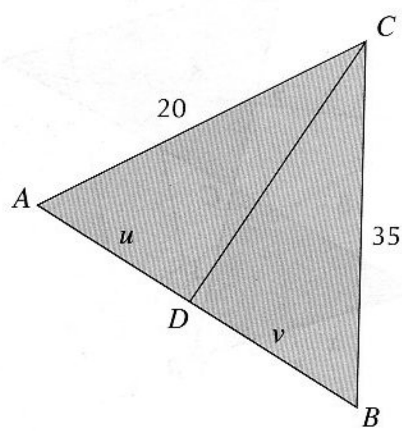
42. En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del triángulo ABC. Determine el perímetro del triángulo ABC.



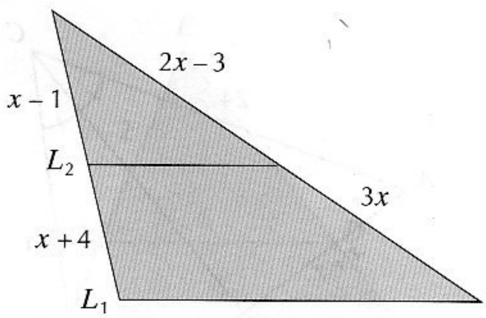
43. En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del triángulo ABC. Determine el perímetro del triángulo ABC.



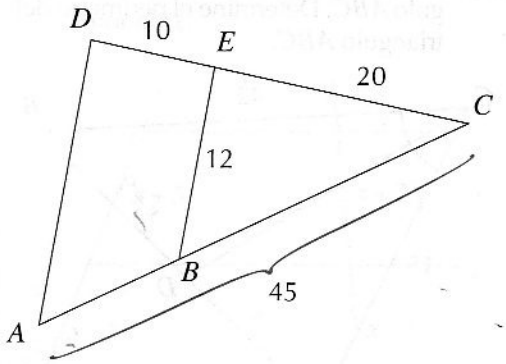
44. En la figura, $\overrightarrow{CD}$ es bisectriz del triángulo ABC y el perímetro del triángulo ABC es 66 cm. Determine $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$.



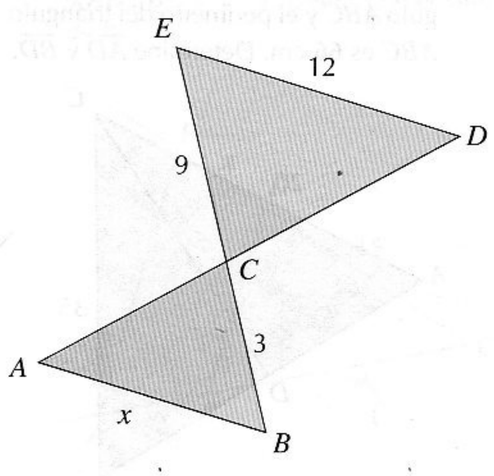
45. En la figura, ¿qué valor debe tener x para que se cumpla que $L_1 \parallel L_2$?



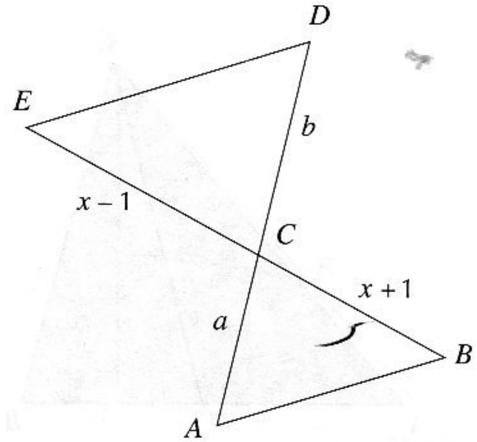
46. A partir de los datos de la figura y sabiendo que $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$, ¿cuál es el perímetro del trapecio $ABED$?



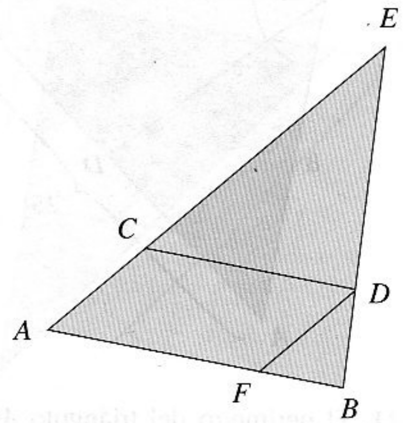
47. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$. Determine el valor de x.



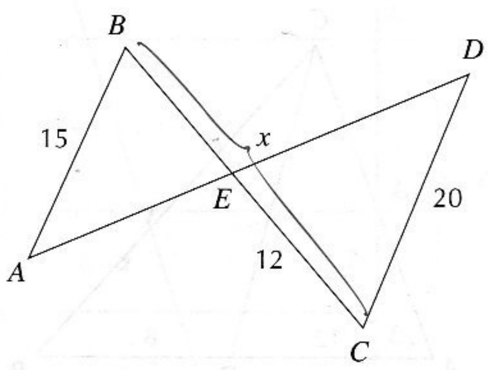
48. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$. Determine el valor de x.



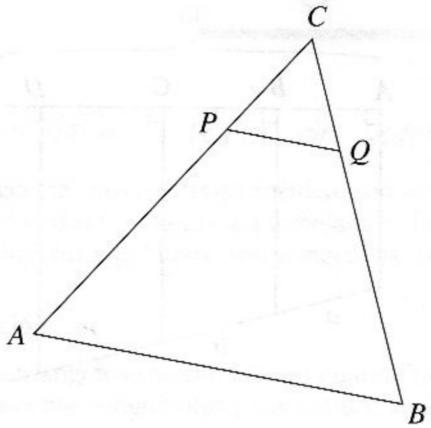
49. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{FD}$. Además, $FD = 2$; $CE = 8$; $AF = 6$. Determine la medida de $\overline{FB}$.



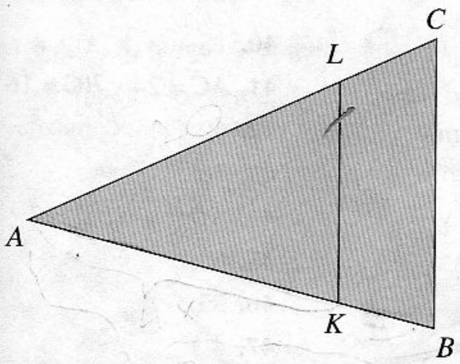
50. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Determine el valor de x.



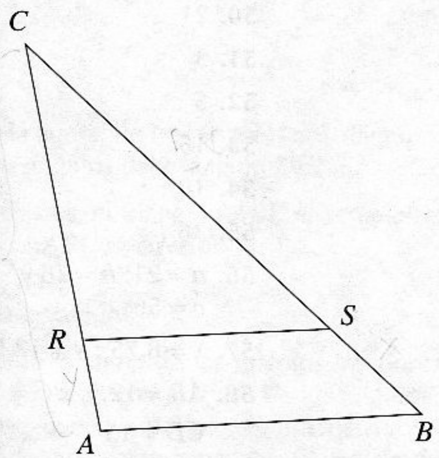
51. En la figura, $AB \parallel PQ$; $AP : PC = 3 : 1$; $BQ = 9$. Determine el valor de $\overline{CQ}$.



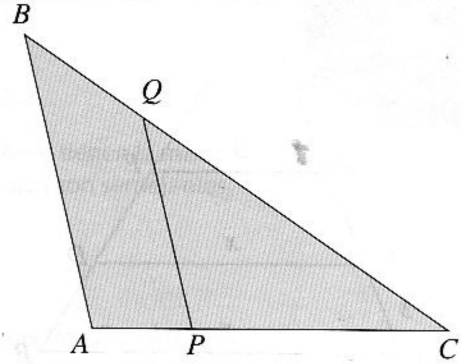
52. En la siguiente figura se tiene: $\overline{BC} \parallel \overline{KL}$. Además, $AB : AK = 5 : 4$; $AL = 20$. Determine la medida de $\overline{LC}$.



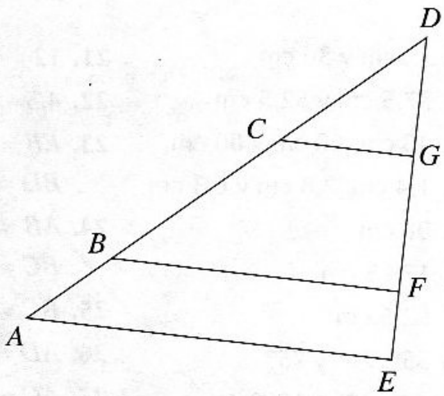
53. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{RS}$ y $AC = 90$. Además, $BS : SC = 1 : 5$. Determine $\overline{AR}$.



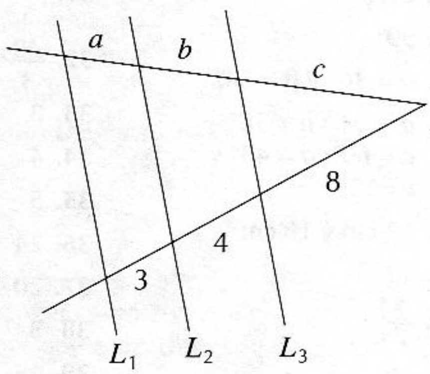
54. En la siguiente figura se tiene: $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$. Además, $BQ : BC = 1 : 4$ y $AC = 24$. Determine $\overline{PC}$.



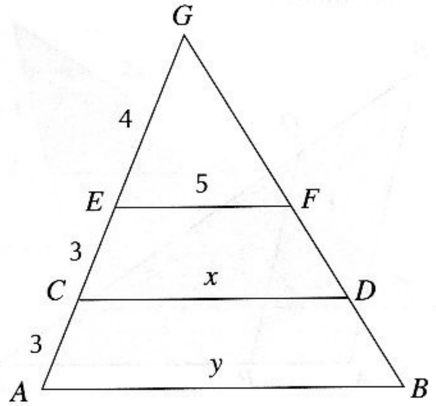
55. En la siguiente figura, $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{CG}$; $AB : BC : CD = 1 : 3 : 2$; $DE = 72$ cm. Determine la medida de $\overline{FG}$.



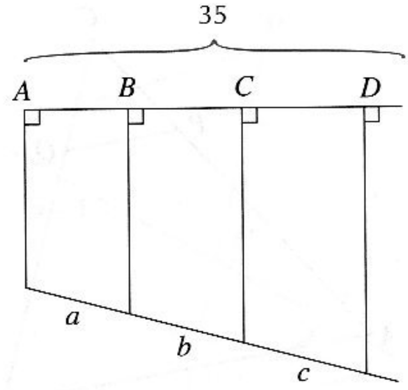
56. En la siguiente figura, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ y $(a + b + c) = 105$. Determine el valor de a, b y c.



57. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$. Determine los valores de x e y.



58. Si $a : b : c = 2{,}5 : 1{,}5 : 3$, determine las medidas de $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.



Soluciones

1. 12 cm y 36 cm
2. 37,5 cm y 52,5 cm
3. 40 cm, 60 cm y 80 cm
4. 1,4 cm; 2,8 cm y 6,3 cm
5. 96 cm
6. 178,5 cm
7. 62,5 cm
8. 35°, 70° y 75°
9. 40°, 40° y 100°
10. 15° y 75°
11. 60°
12. 75°
13. 22,5°
14. 90°
15. $\alpha = 36°$ y $\beta = 54°$
16. $a = 24°$; $b = 36°$; $c = 60°$; $d = 48°$ y $e = 12°$
17. 12 cm y 16 cm
18. 12
19. $\frac{2}{7}$
20. 19
21. 12
22. 4,5
23. $EB = 33{,}6$ cm y $BD = 50{,}4$ cm
24. $AB = 12$ cm y $BC = 18$ cm
25. $BC = 9$
26. $AD = 7$ cm
27. $AC = 18$
28. $AC = 15$
29. 8
30. 12
31. $\frac{18}{5}$
32. $\frac{40}{3}$
33. 8
34. 4
35. 5
36. 24
37. 20
38. 3
39. 14
40. 15
41. $AC = 24$ y $BC = 16$
42. 60
43. 76
44. $AD = 4$ y $BD = 7$
45. 6
46. 55
47. 4
48. $\frac{(a+b)}{(a-b)}$
49. 1,5
50. 21
51. 3
52. 5
53. 15
54. 18
55. 36
56. $a = 21$; $b = 28$ y $c = 56$
57. $x = 8{,}75$; $y = 12{,}5$
58. $AB = 12{,}5$; $BC = 7{,}5$ y $CD = 15$

Semejanza de triángulos 4.2

Definición y criterios de semejanza

En general, dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma. Así, dos cuadrados son semejantes, dos círculos son semejantes, dos triángulos equiláteros son semejantes, etc.

Definición:

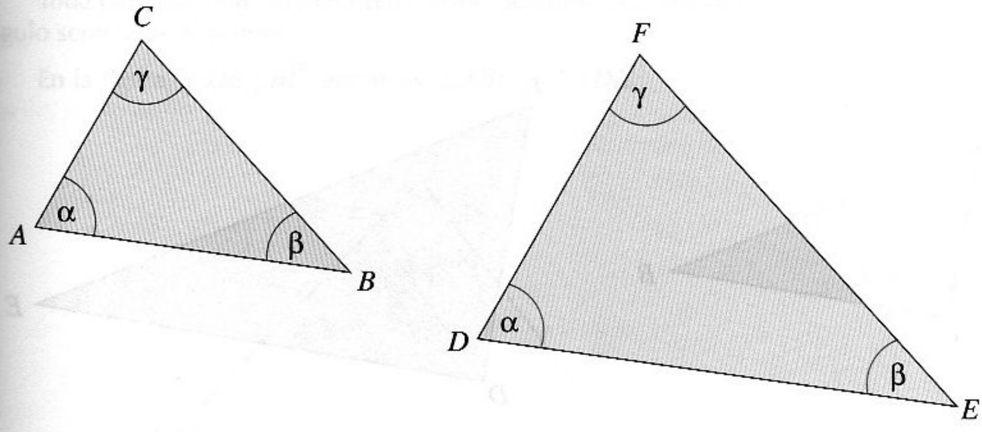
Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres ángulos respectivamente congruentes y sus lados homólogos proporcionales.

Para determinar la semejanza de triángulos no es necesario verificar estas seis relaciones cada vez, sino que aplicamos uno de los siguientes criterios de semejanza.

Criterios de semejanza

Criterio A. A. A. (ángulo - ángulo - ángulo)

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos homólogos respectivamente congruentes.



En la figura, los tres ángulos del triángulo *ABC* son congruentes con los tres ángulos del triángulo *DEF*.

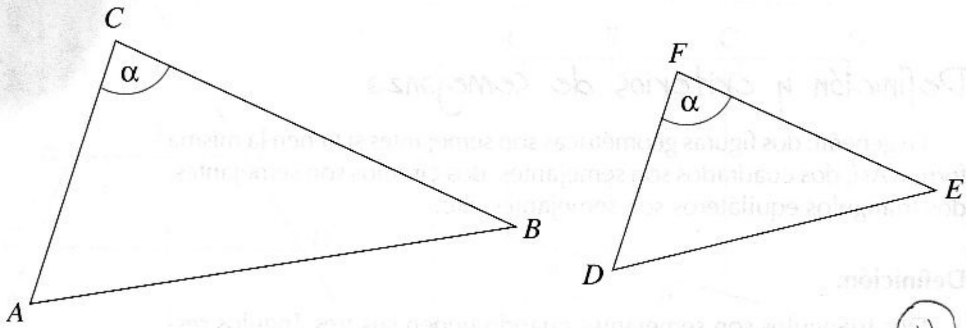
Entonces, el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *DEF* y escribimos: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Observación:

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces basta con que dos de los ángulos de un triángulo sean congruentes con dos de los ángulos de otro para afirmar que estos dos triángulos son semejantes. Así, el criterio A.A.A. se reduce a A.A.

Criterio L. A. L. (lado - ángulo - lado)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos, congruentes.

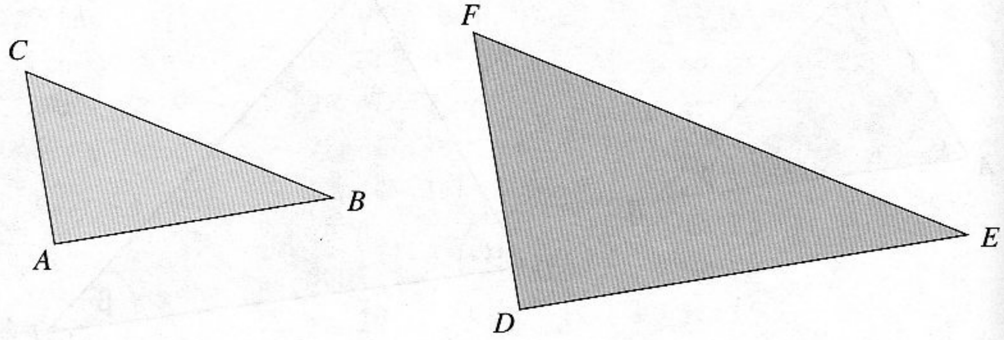


En la figura se cumple que: $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ y $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DFE$

Entonces: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Criterio L. L. L. (lado - lado - lado)

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados homólogos respectivamente proporcionales.

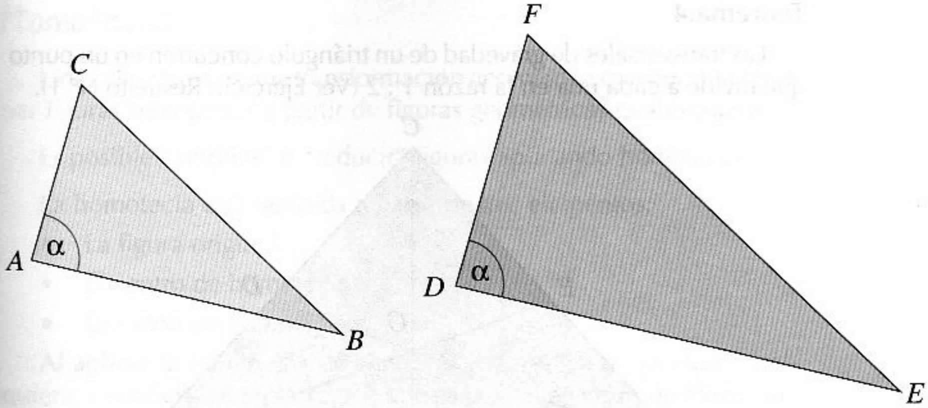


En la figura se cumple que: $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$.

Entonces: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Criterio L. L. A. (lado - lado - ángulo)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos respectivamente proporcionales y los ángulos opuestos al lado mayor, congruentes.



En la figura se cumple que $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ y $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$, siendo $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$ los lados mayores de cada triángulo.

Entonces: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

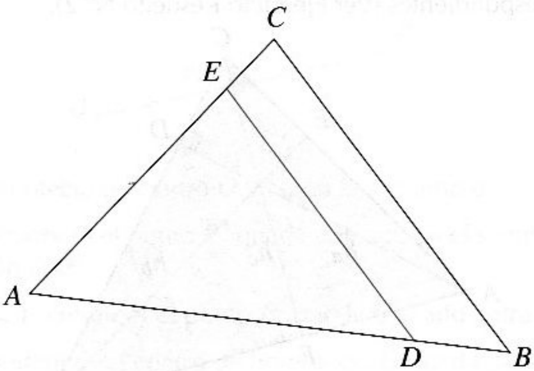
Teoremas relativos a semejanza de triángulos

A partir de la definición de semejanza y de los criterios establecidos se pueden demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 1

Toda paralela a un lado de un triángulo determina un nuevo triángulo semejante al primero.

En la figura, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.



Teorema 2

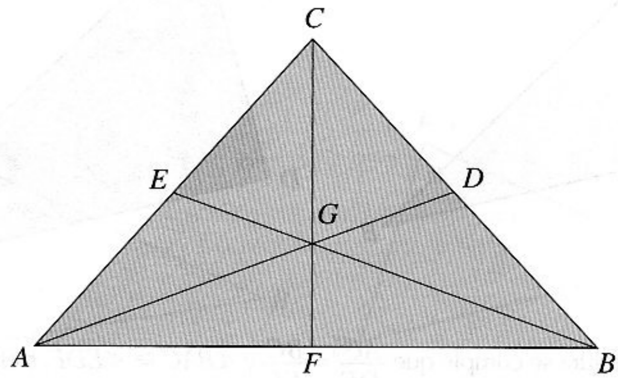
Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos.

Teorema 3

Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Teorema 4

Las transversales de gravedad de un triángulo concurren en un punto que divide a cada una en la razón 1 : 2 (Ver Ejercicio Resuelto N° 1).



En la figura, los puntos D, E y F son puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente, y G es el punto de intersección de las transversales de gravedad. Se cumple: $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{BG}{GE} = \dfrac{CG}{GF} = \dfrac{1}{2}$

Teorema 5

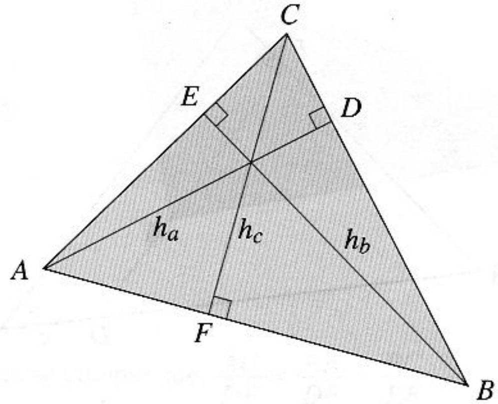
Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre cualquier par de lados homólogos.

Teorema 6

Si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados homólogos son proporcionales a las alturas homólogas, a las bisectrices homólogas, a las transversales de gravedad homólogas, a los radios homólogos, etc.

Teorema 7

En todo triángulo, las alturas son inversamente proporcionales a los lados correspondientes (Ver Ejercicio Resuelto N° 2).



En la figura, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son las alturas correspondientes a los lados de medidas a, b y c, respectivamente. Se cumple que:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

Teorema 8

Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo de igual medida son entre sí como los productos de los lados que forman el ángulo (Ver Ejercicio Resuelto N°3).

Homotecia

Una homotecia es una transformación geométrica que permite obtener figuras semejantes a partir de figuras geométricas cualesquiera.

Es posible "ampliar" o "reducir" figuras aplicando homotecia.

La homotecia está definida a partir de tres elementos:

- La figura original.
- El centro de homotecia
- La razón de homotecia

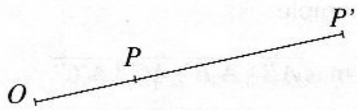
Al aplicar la homotecia de centro O y razón k a un punto P cualquiera, se obtiene otro punto, P', que es la imagen de P, de modo que P, O y P' son colineales y $OP' = kOP$.

Ejemplo 1:

El ejemplo muestra una homotecia de centro O y razón $k = 3$ aplicada al punto P.

Se cumple: $OP' = 3OP$

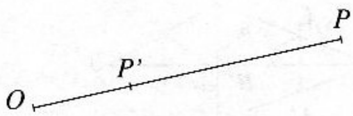
El punto P' es el homólogo de P.



Ejemplo 2:

El siguiente ejemplo muestra una homotecia de centro O y razón $k = \frac{1}{3}$, aplicada al punto P.

Se cumple: $OP' = \frac{1}{3}OP$



En una homotecia de centro O y razón k, se cumple:

Si $k > 1$, entonces el punto P' queda ubicado en el semirrayo $\overrightarrow{OP}$, a continuación de P.

Si $0 < k < 1$, entonces el punto P' queda ubicado entre O y P.

Si $k < 0$, entonces el centro de homotecia O queda ubicado entre P y P'.

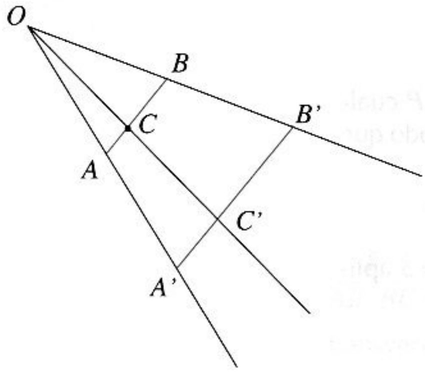
Ejemplo 3:

Al aplicar una homotecia de centro O y razón k a un segmento $\overline{AB}$, obtenemos los puntos A' y B' homotéticos de A y B respectivamente que cumplen:

$$\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = k$$

Esto significa que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son paralelos, por lo tanto, los triángulos $OA'B'$ y OAB son semejantes y la razón de semejanza es k. Así, $\frac{A'B'}{AB} = k$, es decir, $A'B' = kAB$.

Es claro que si tomamos un punto C cualquiera sobre $\overline{AB}$, el punto de intersección C' de $\overline{OC}$ con $\overline{A'B'}$ es tal que $\frac{C'O}{CO} = k$, porque $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{A'B'}$ y por lo tanto C' es el homotético de C.

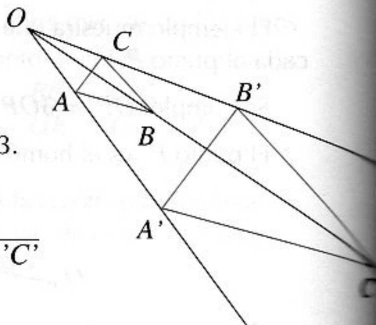


Así, podemos observar que al aplicar una homotecia de centro O y razón k a un segmento $\overline{AB}$ se obtiene otro segmento $\overline{A'B'}$, ya que cada punto de $\overline{AB}$ tiene su homotético en $\overline{A'B'}$ y viceversa.

Además se cumple que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ y $A'B' = kAB$

Ejemplo 4:

Apliquemos al triángulo ABC a una homotecia de centro O y razón 3.

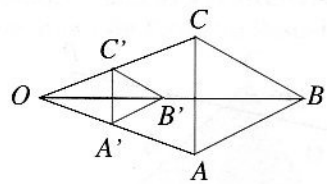


Podemos verificar que se cumple

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB} = 3$ y además $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$.

Ejemplo 5:

También podemos aplicar una homotecia de centro O y razón $\frac{1}{2}$, como en el ejemplo 3.

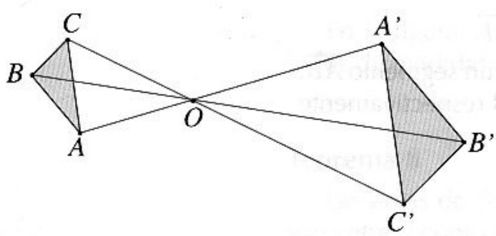


En este caso se obtuvo una "reducción" de la figura original.

Ejemplo 6:

Apliquemos una homotecia de centro O y razón -2.

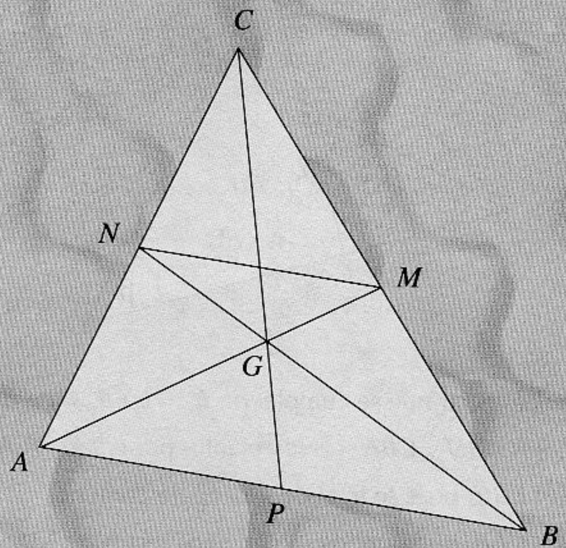
Al aplicar una homotecia de razón negativa se obtiene una imagen "invertida" de la figura orginal.



En general, al aplicar una homotecia a una figura geomética se obtiene una figura semejante a la figura original y por lo tanto se cumplen todas las propiedades de las figuras semejantes.

Ejercicios resueltos

1. Demostremos que las transversales de gravedad de un triángulo concurren en un punto que divide a cada una en la razón 2 : 1.



Solución:

Sean M, N y P los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, y sea G el punto de intersección de las transversales de gravedad.

Debemos demostrar que $\dfrac{AG}{GM} = \dfrac{BG}{GN} = \dfrac{CG}{GP}$.

El segmento $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y mide $\dfrac{1}{2}$ de él, porque es una mediana del triángulo, es decir, $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{2}{1}$.

Entonces, $\triangle ABG$ es semejante a $\triangle MNG$, por criterio A.A., ya que:

$\sphericalangle GAB = \sphericalangle GMN$, por ser ángulos alternos internos entre rectas paralelas.
$\sphericalangle GBA = \sphericalangle GNM$, por la misma razón.

Por lo tanto, se cumple que:

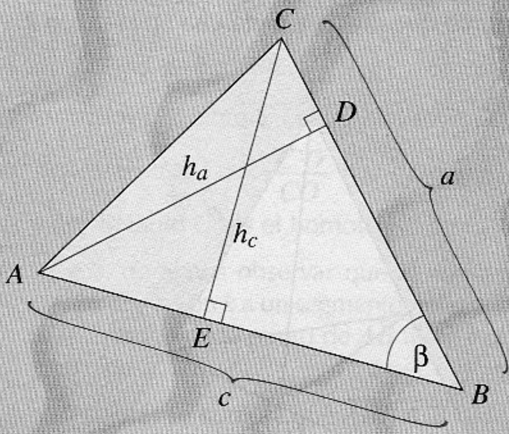
$\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AG}{MG} = \dfrac{BG}{NG} = \dfrac{2}{1}$

De la misma forma, y considerando otra mediana del triángulo, se obtiene: $\dfrac{CG}{GP} = \dfrac{2}{1}$, siendo P el punto medio de $\overline{AB}$.

2. Demostremos que en cualquier triángulo las alturas son inversamente proporcionales a los lados correspondientes.

Solución:

Consideremos el triángulo ABC de la figura y sean $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ las alturas de medidas h_a y h_c, respectivamente.



Debemos demostrar que se cumple: $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

Los triángulos ABD y CBE son semejantes por criterio A.A., ya que:

$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle EBC$, pues se trata de un ángulo común.

$\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle CEB$, pues ambos son ángulos rectos.

Entonces, se cumple que:

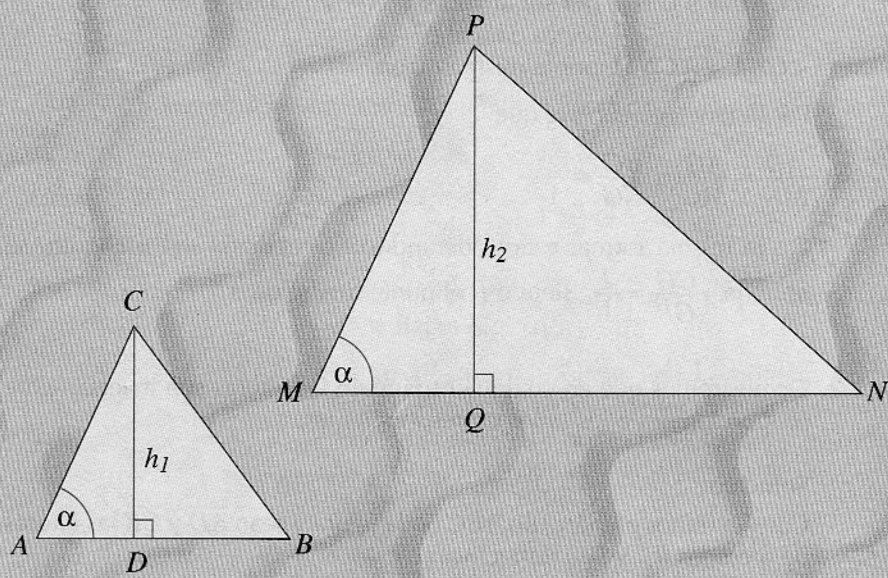
$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CE}$, es decir: $\frac{c}{h_a} = \frac{a}{h_c}$, de donde obtenemos que:

$a \cdot h_a = c \cdot h_c$ es equivalente a: $\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$.

Es decir, las alturas son inversamente proporcionales a los lados.

Procediendo de la misma forma, trazando la altura h_b se obtienen las otras relaciones.

3. Demostremos que las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo de igual medida son entre sí como los productos de los lados que forman el ángulo.



Solución:

En la figura, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle NMP$.

Si A_1 y A_2 representan las áreas de los triángulos ABC y MNP, respectivamente, debemos demostrar que se cumple:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB \cdot AC}{MN \cdot MP}$$

Las áreas de los triángulos ABC y MNP están dadas por:

$$A_1 = \frac{1}{2}AB \cdot h_1 \text{ y } A_2 = \frac{1}{2}MN \cdot h_2$$

Al formar la razón entre ellas, nos queda:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB \cdot h_1}{MN \cdot h_2} \quad (*)$$

Pero, los triángulos ADC y MQP son semejantes por criterio A.A., pues

$\measuredangle CAD \cong \measuredangle QMP$, por hipótesis

$\measuredangle ADC \cong \measuredangle MQP$, son ambos rectos

Entonces se tiene:

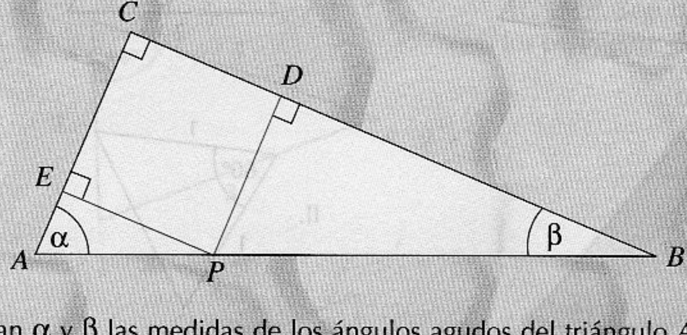
$$\frac{AC}{h_1} = \frac{MP}{h_2}, \text{ de donde: } \frac{h_1}{h_2} = \frac{AC}{MP}$$

y reemplazando en (*) obtenemos: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{AB \cdot AC}{MN \cdot MP}$

4. Sea ABC un triángulo rectángulo en C, y P un punto cualquiera sobre su hipotenusa.
Desde P se trazan perpendiculares a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, determinando sobre ellos los puntos D y E, respectivamente. Demostremos que se cumple: $AE \cdot BD = PD \cdot PE$.

Solución:

El problema se representa a través de la siguiente figura.



Sean α y β las medidas de los ángulos agudos del triángulo ABC. Los triángulos APE y BPD son semejantes por criterio A.A., pues ambos tienen un ángulo recto y uno de los dos ángulos agudos del triángulo original.

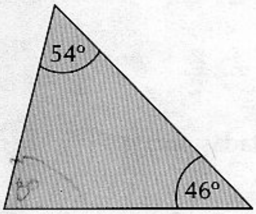
Se cumple: $\dfrac{AE}{PE} = \dfrac{PD}{BD}$

Por lo tanto: $AE \cdot BD = PD \cdot PE$

Ejercicios

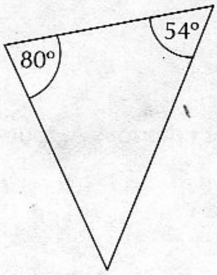
1. En los siguientes ejercicios, determinar triángulos semejantes, indicando el criterio empleado.

a) I.

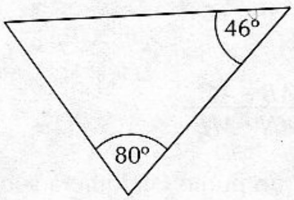


AAA

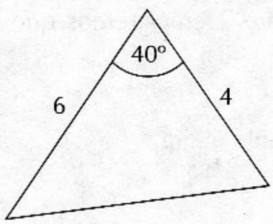
II.



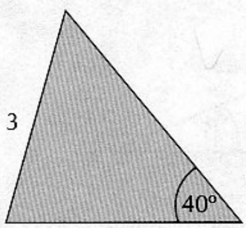
III.



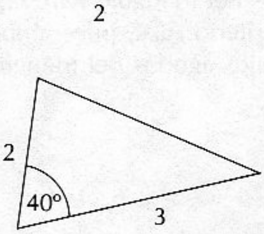
b) I.



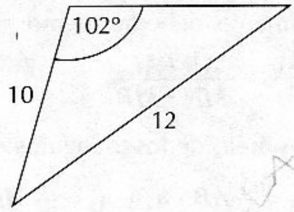
II.



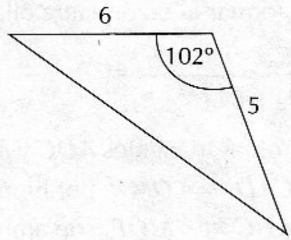
III.



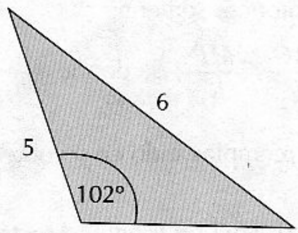
c) I.



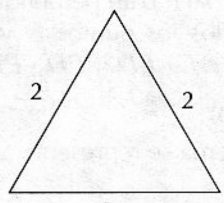
II.



III.

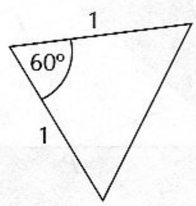


d) I.

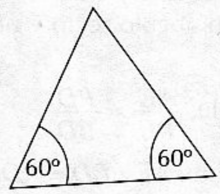


AAA

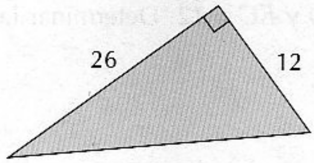
II.



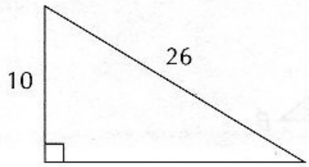
III.



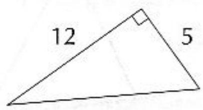
e) I.



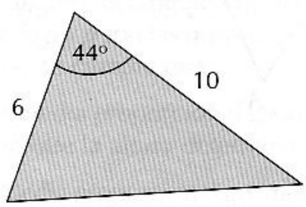
II.



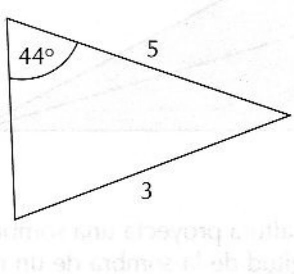
III.



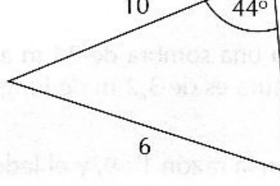
f) I.



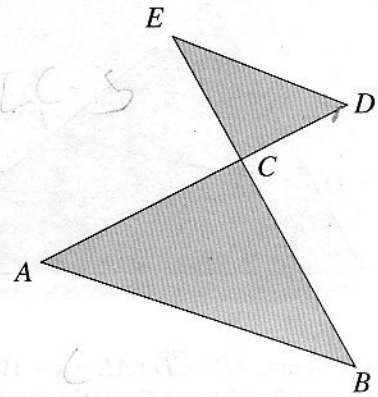
II.



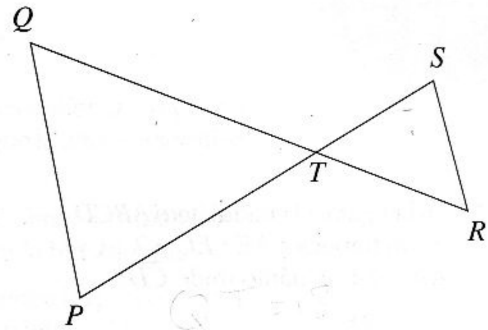
III.



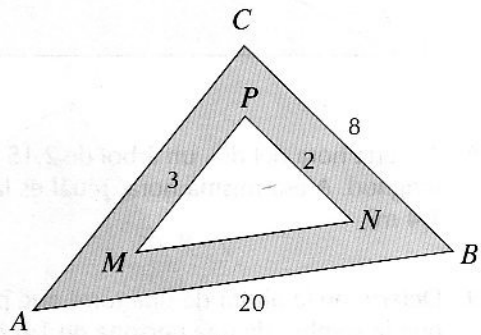
2. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $AB = 2ED$ y $BC = 10$. Determinar la medida de $\overline{EC}$.



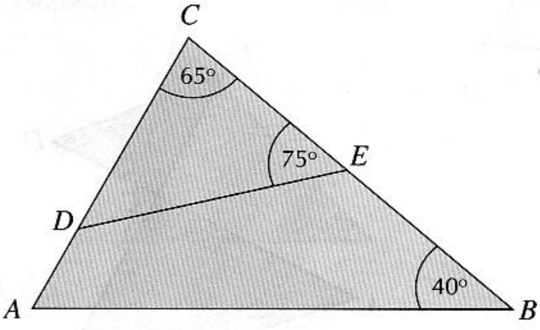
3. En la figura, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$, $PT : TS = 3 : 2$ y $QR = 30$. Determinar la medida de $\overline{QT}$.



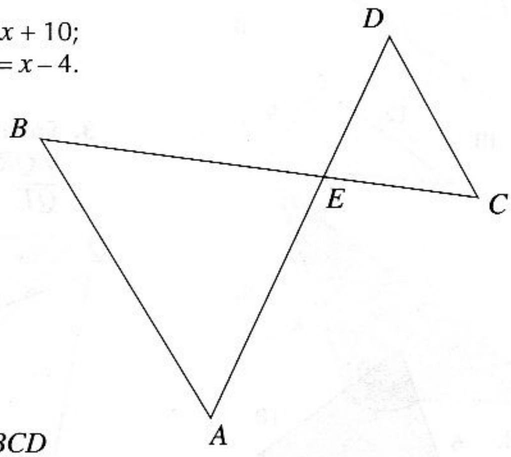
4. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$; $\overline{BC} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{MP}$. Según los datos, determinar los perímetros de ambos triángulos.



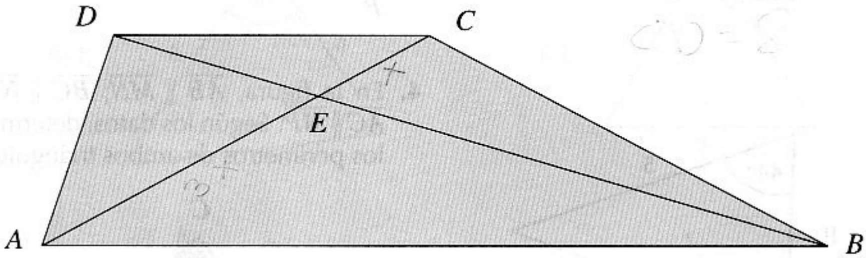
5. En la siguiente figura, $AB = 30$; $AC = 20$ y $EC = 12$. Determinar la longitud de $\overline{ED}$.



6. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $AE = x + 10$; $ED = x - 2$; $BE = x + 5$ y $CE = x - 4$. ¿Cuál es el valor de x?



7. En la figura, el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio; $AE : EC = 3 : 1$ y $AB = 24$. ¿Cuánto mide $\overline{CD}$?



8. A cierta hora del día, un árbol de 2,15 m de altura proyecta una sombra de 1,4 m de longitud. A esa misma hora, ¿cuál es la longitud de la sombra de un niño que mide 1,4 m?

9. Determine la altura de una torre que proyecta una sombra de 24 m al momento en que la sombra de una persona de 1,6 m de altura es de 3,2 m de longitud.

10. Las áreas de dos triángulos equiláteros están en la razón 1 : 9, y el lado del triángulo menor es 2. ¿Cuál es el lado del mayor?

Soluciones

1. a) I, II y III (A. A. A.)
   b) I y III (L.A.L.)
   c) I y III (L.L.A.)
   d) I , II y III (Todos los criterios)
   e) II y III (Todos los criterios)
   f) No hay semejanza
2. $EC = 5$
3. $QT = 18$
4. Perímetro de triángulo $MNP = 10$ y perímetro de triángulo $ABC = 40$
5. $ED = 18$
6. $x = 10$
7. $CD = 8$
8. 0,91 cm
9. 12 m
10. 6 cm

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo 4.3

Teorema de Euclides

Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b y cuya hipotenusa mide c. Si p y q son las proyecciones que la altura determina sobre la hipotenusa, se cumple que:

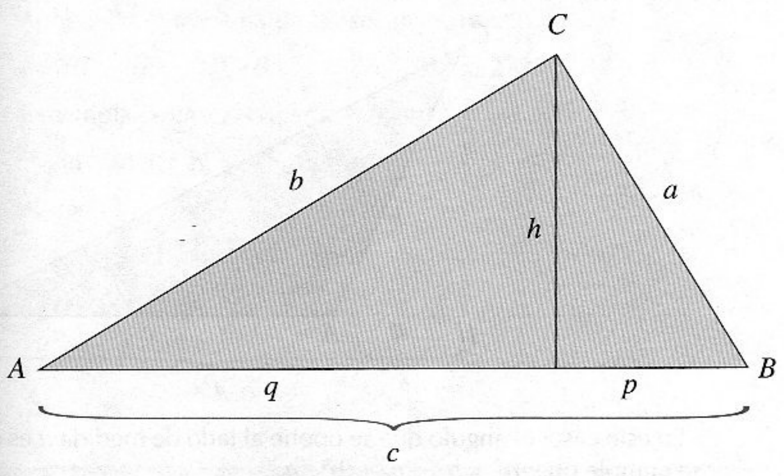
- Cada cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la proyección que la altura determina sobre la hipotenusa.
- La altura es la media proporcional geométrica entre las proyecciones que ésta determina sobre la hipotenusa (Ver página 278).

En otras palabras:

$a^2 = p \cdot c$

$b^2 = q \cdot c$

$h^2 = p \cdot q$



Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. En otras palabras:

$a^2 + b^2 = c^2$

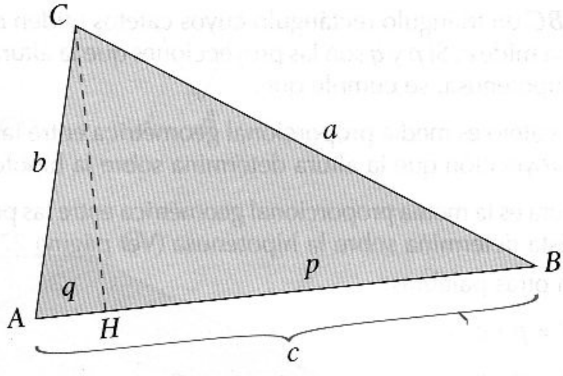
El recíproco también es cierto, es decir, si los lados a, b y c de un triángulo cumplen la condición $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

Si se cumple que $a^2 + b^2 > c^2$, siendo c la medida del lado más largo del triángulo, entonces el triángulo es agudo.

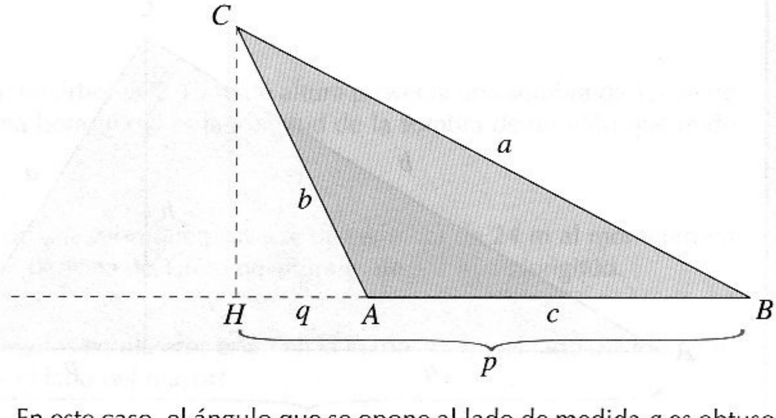
Si se cumple que $a^2 + b^2 < c^2$, siendo c la medida del lado más largo del triángulo, entonces el triángulo es obtuso.

Teorema general de Pitágoras

En todo triángulo se cumple que el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más (o menos) el doble del producto de uno de esos lados por la proyección del otro sobre éste. La suma o diferencia del doble del producto depende de si el lado que se está determinando se opone a un ángulo obtuso o agudo, respectivamente.



En este caso, el ángulo que se opone al lado de medida a es agudo y se cumple: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot q$.

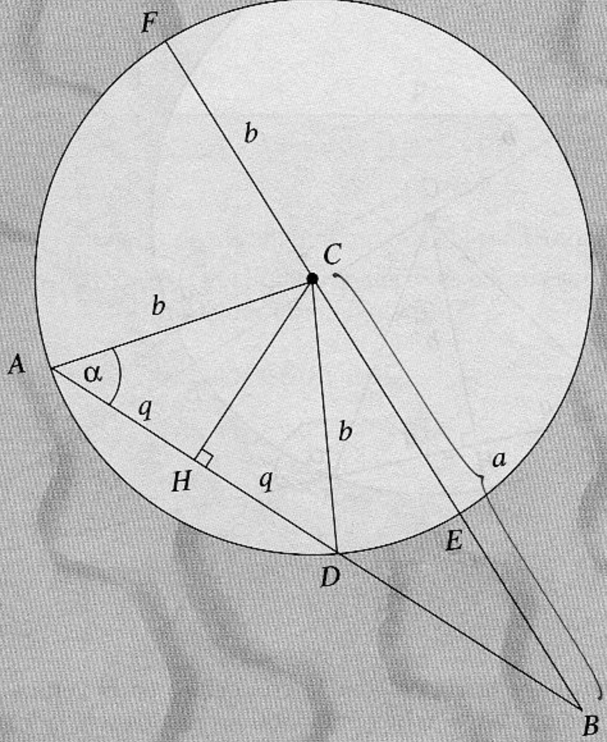


En este caso, el ángulo que se opone al lado de medida a es obtuso y se cumple que: $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot q$.

1. Demostremos el Teorema general de Pitágoras.

Caso 1:

Sea el triángulo ABC con ángulo BAC agudo, y sea $AH = q$ la proyección del lado $\overline{AC}$ sobre el lado $\overline{AB}$.



Construyamos la circunferencia con centro en el vértice C y radio b, como indica la figura, determinando los puntos señalados en ella. CD es igual a b por ser ambos iguales al radio de la circunferencia, y HD es igual a q por ser $\overline{CH}$ la altura de un triángulo isósceles.

Aplicando el teorema de las secantes, tenemos:

$$BE \cdot BF = BD \cdot BA \qquad \text{(Ver página 273)}$$

y reemplazando nos queda:

$$(a - b)(a + b) = (c - 2q) \cdot c$$

es decir:

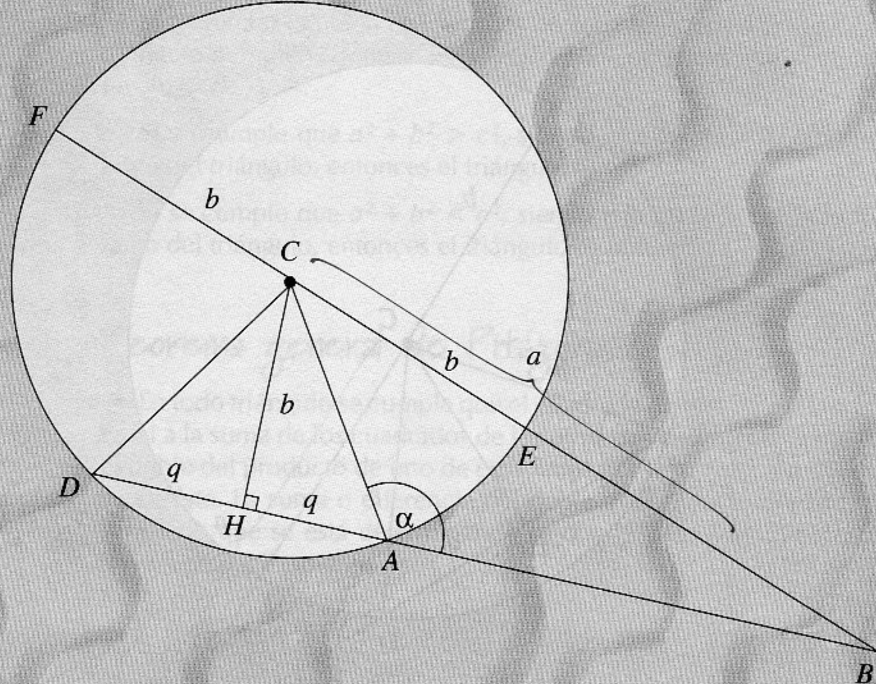
$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cq$$

de donde:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

Caso 2:

Sea el triángulo ABC con ángulo BAC obtuso, y sea $AH = q$ la proyección del lado $\overline{AC}$ sobre la continuación del lado $\overline{AB}$.



Construyamos la circunferencia con centro en el vértice C y radio b, como indica la figura, determinando los puntos señalados en ella.
CD es igual a b por ser ambos iguales al radio de la circunferencia, y HD es igual a q por ser $\overline{CH}$ la altura de un triángulo isósceles.

Aplicando el teorema de las secantes, tenemos:

$BE \cdot BF = BA \cdot BD$ (Ver página 273)

y reemplazando nos queda:

$$(a - b)(a + b) = c \cdot (c + 2q)$$

es decir:

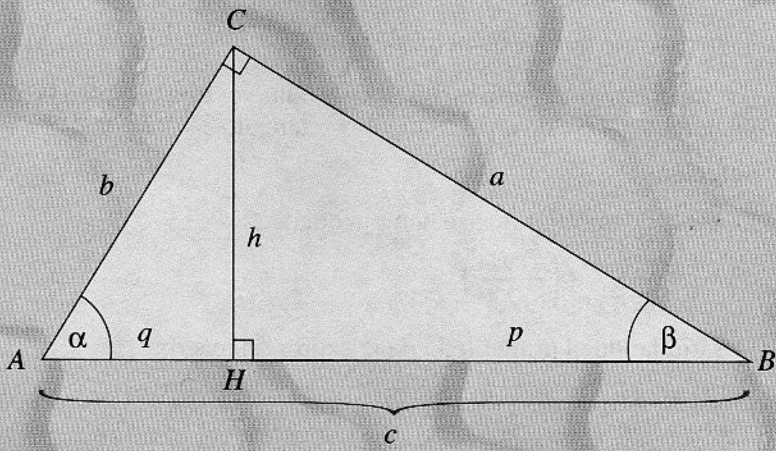
$$a^2 - b^2 = c^2 + 2cq$$

de donde:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cq$$

2. Demostremos el Teorema de Euclides.

Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b y su hipotenusa, c. Sea $\overline{CH}$ la altura h y sean p y q las proyecciones que los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ determinan sobre la hipotenusa, respectivamente, como indica la figura siguiente.



Sean α y β las medidas de los ángulos agudos del triángulo ABC.
Los triángulos ACH, CBH y ABC son semejantes porque son triángulos rectángulos y sus ángulos agudos miden α y β.

- Observemos los triángulos CBH y ABC.
  Tenemos:
  $$\frac{CB}{BH} = \frac{AB}{BC}$$
  y reemplazando nos queda:
  $$\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$$
  de donde obtenemos:
  $$a^2 = p \cdot c$$
- Observemos los triángulos ACH y ABC.
  Tenemos:
  $$\frac{AC}{AH} = \frac{AB}{AC}$$
  y reemplazando nos queda:
  $$\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$$
  de donde obtenemos:
  $$b^2 = q \cdot c$$
- Observemos los triángulos ACH y ABC.
  Tenemos:
  $$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$$
  y reemplazando nos queda:
  $$\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$$
  de donde obtenemos:
  $$h^2 = p \cdot q$$

3. Demostremos que los números de la forma a, $\left(\frac{a^2-1}{2}\right)$ y $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)$ forman un "trío pitagórico", esto es, un "trío de números que cumplen la relación pitagórica que se da en el triángulo rectángulo".

Solución:

Debemos demostrar que se cumple que:

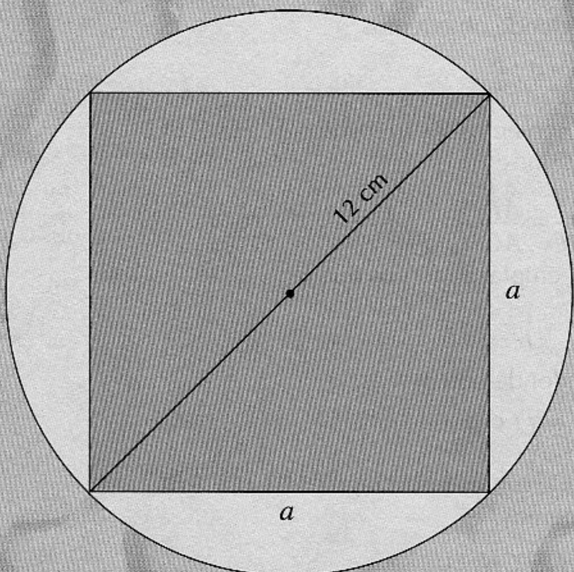
$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$$

Desarrollando el primer lado de la expresión tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 &= a^2 + \frac{1}{4}(a^4 - 2a^2 + 1) \\ &= \frac{1}{4}(4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1) \\ &= \frac{1}{4}(a^4 + 2a^2 + 1) \\ &= \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

que es equivalente a la segunda expresión, con lo cual queda demostrada la proposición.

4. Determinemos la medida del lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 12 cm.



Solución:

El diámetro de la circunferencia corresponde a la diagonal del cuadrado, como se observa en la figura; por lo tanto, el problema se reduce a determinar la medida ***a*** del lado de un cuadrado, conocida su diagonal, que es 24 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$a^2 + a^2 = 24^2$

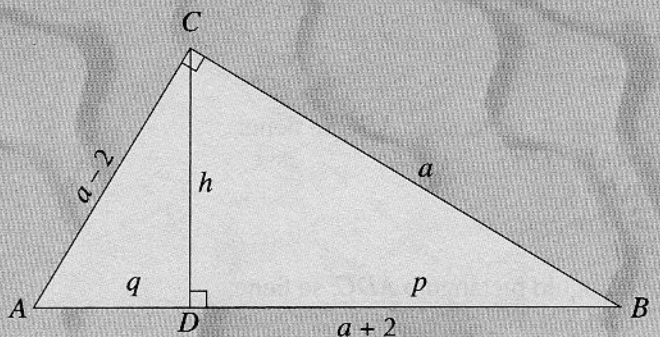
$2a^2 = 24^2$

$a = \dfrac{24}{\sqrt{2}}$

$a = 12\sqrt{2}$, es la medida del lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 12 cm de radio.

En general, el lado a de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r es: $a = r\sqrt{2}$.

5. Determinemos la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados miden $(a - 2)$ cm, a cm y $(a + 2)$ cm.



Solución:

En primer lugar, determinemos la medida de los lados del triángulo. Si ellos son $a - 2$; a y $a + 2$ y el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$a^2 + (a - 2)^2 = (a + 2)^2$

$a^2 + a^2 - 4a + 4 = a^2 + 4a + 4$

$a^2 - 8a = 0$

$a(a - 8) = 0$

$a = 0$

$a = 8$

De aquí obtenemos que los lados del triángulo miden 6 cm, 8 cm y 10 cm.

Para determinar la medida de la altura, aplicamos el teorema de Euclides al triángulo ABC de la figura: $a^2 = p \cdot c$; $b^2 = q \cdot c$ y $h^2 = p \cdot q$,

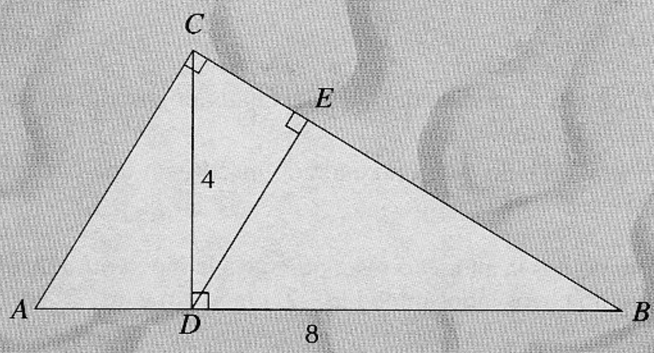
$8^2 = 10p$, de donde, $p = \dfrac{8^2}{10}$

$6^2 = 10q$, de donde, $q = \dfrac{6^2}{10}$

$h^2 = \dfrac{8^2}{10} \cdot \dfrac{6^2}{10}$

Por lo tanto, obtenemos que la altura mide 4,8 cm.

6. En la figura siguiente, el triángulo ABC es rectángulo en C; $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. $\overline{CD}$ mide 4 cm y $\overline{DB}$ mide 8 cm. Determinemos la medida de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BE}$, $\overline{EC}$ y $\overline{DE}$.



Solución:

En el triángulo rectángulo ABC se tiene:

$CD^2 = AD \cdot DB$

$16 = AD \cdot 8$

$AD = 2$ cm

En el triángulo rectángulo ADC, se tiene:

$AD^2 + DC^2 = AC^2$

$4 + 16 = AC^2$

$AC = 2\sqrt{5}$

En el triángulo rectángulo BCD se tiene:

$BD^2 + DC^2 = BC^2$

$64 + 16 = BC^2$

$BC = 4\sqrt{5}$

En el triángulo rectángulo BCD se tiene:

$DB^2 = BE \cdot BC$

$64 = BE \cdot 4\sqrt{5}$

$BE = \dfrac{64}{4\sqrt{5}}$

$BE = \dfrac{16\sqrt{5}}{5}$

$EC = \mathrm{BC} - BE$

$EC = 4\sqrt{5} - \dfrac{16\sqrt{5}}{5}$

$EC = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

En el triángulo rectángulo BCD se tiene:

$DE^2 = EB \cdot EC$

$DE^2 = \dfrac{16\sqrt{5}}{5} \cdot \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$DE = 12{,}8$

7. Demostremos que la suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

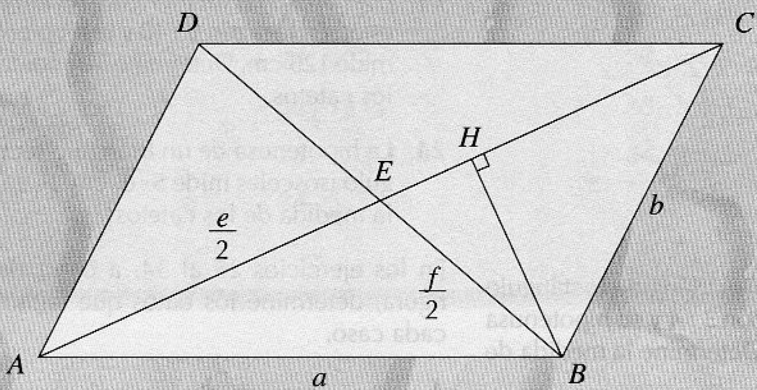
Solución:

Sea $ABCD$ un paralelogramo de lados a y b y de diagonales $AC = e$ y $DE = f$.

Debemos demostrar que:

$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

Aplicamos el teorema general de Pitágoras a los triángulos ABE y BCE de la figura.



En triángulo ABE tenemos:

$$a^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{e}{2}\right)EH$$

En triángulo BCE tenemos:

$$b^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{e}{2}\right)EH$$

Sumando término a término y multiplicando por 2, tenemos:

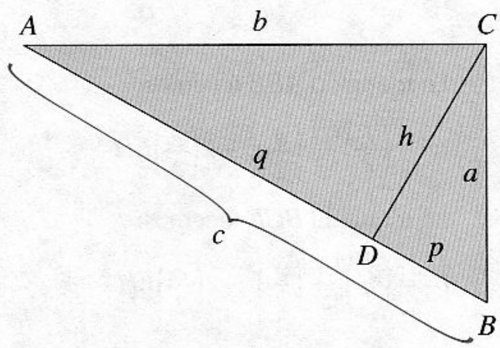
$$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$$

Ejercicios

En el triángulo rectángulo ABC de catetos a y b, determine en cada caso el lado que falta si se conocen:

1. $a = 9$ $\quad b = 4$
2. $a = 15$ $\quad c = 20$
3. $b = 8$ $\quad c = 14$
4. $a = 2$ $\quad b = 2$
5. $a = 3\sqrt{3}$ $\quad b = 1$
6. $a = 2\sqrt{3}$ $\quad b = 3\sqrt{2}$
7. $b = \sqrt{6}$ $\quad c = 2\sqrt{2}$
8. $a = 1$ $\quad c = \sqrt{2}$
9. $b = \frac{1}{4}$ $\quad c = \frac{1}{2}$
10. $b = 5$ $\quad c = 9$
11. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón 3 : 4 y su hipotenusa mide 25 cm. Determine la medida de los catetos.
12. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón 1 : 2 y su hipotenusa mide 15 cm. Determine la medida de los catetos.
13. Determine la altura basal de un triángulo isósceles si sus lados congruentes miden 16 cm y su base mide 10 cm.
14. Determine la altura basal de un triángulo isósceles si sus lados congruentes miden 25 cm y su base mide 40 cm.
15. Determine la base de un triángulo isósceles si sus lados congruentes miden 15 cm y la altura mide 12 cm.
16. Determine la base de un triángulo isósceles si sus lados congruentes miden 40 cm y la altura mide 20 cm.
17. Determine la medida de los lados iguales de un triángulo isósceles si la altura mide 16 cm y la base mide 4 cm.
18. Determine la medida de los lados congruentes de un triángulo isósceles si la altura mide 30 cm y la base mide 80 cm.
19. Determine la altura de un triángulo equilátero de lado 30 cm.
20. Determine la altura de un triángulo equilátero de lado $4\sqrt{3}$ cm.
21. Determine el lado de un triángulo equilátero si su altura mide $10\sqrt{3}$ cm.
22. Determine el lado de un triángulo equilátero si su altura mide 18 cm.
23. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la razón 9 : 40 y la hipotenusa mide 123 cm. Determine la medida de los catetos.
24. La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide $5\sqrt{6}$ cm. ¿Cuál es la medida de los catetos?

En los ejercicios 25 al 34, a partir de la figura, determine los datos que faltan en cada caso.



25. $c = 9$; $a = 5$. Determine b y h.
26. $p = 8$; $q = 4$. Determine h y a.
27. $b = 5$; $q = 3$. Determine a y p.
28. $q = 5$; $a = 6$. Determine h y p.
29. $q = 10$; $h = 12$. Determine b y p.
30. $b = 4$; $p = 8$. Determine h y c.
31. $c = 25$; $h = 10$. Determine p y q.
32. $a = 20$; $p = 8$. Determine b y c.
33. $h = 4$; $a = 12$. Determine q y b.
34. $a = 4$; $b = 4$. Determine h y q.

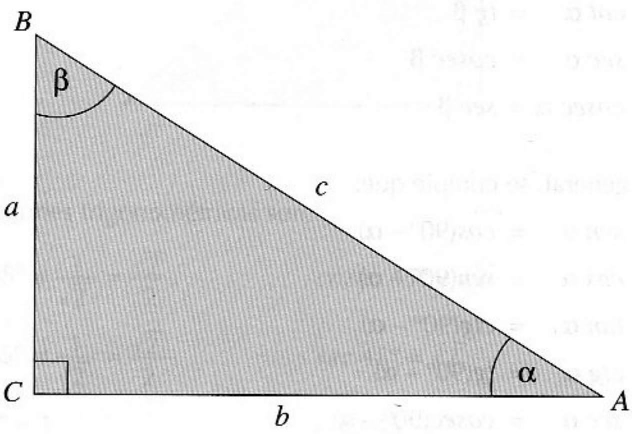
Soluciones

1. $c = \sqrt{97}$
2. $b = 5\sqrt{7}$
3. $a = 2\sqrt{33}$
4. $c = 2\sqrt{2}$
5. $c = 2\sqrt{7}$
6. $c = \sqrt{30}$
7. $a = \sqrt{2}$
8. $b = \sqrt{3}$
9. $a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
10. $a = 2\sqrt{14}$
11. 15 y 20
12. $3\sqrt{5}$ y $6\sqrt{5}$
13. $h = \sqrt{231}$
14. $h = 15$
15. 18
16. $40\sqrt{3}$
17. $2\sqrt{65}$
18. 50
19. $h = 15\sqrt{3}$
20. 6
21. 20
22. $12\sqrt{3}$
23. 27 y 120
24. $5\sqrt{3}$
25. $b = 2\sqrt{14}$; $h = \dfrac{10\sqrt{14}}{9}$
26. $h = 4\sqrt{2}$; $a = 4\sqrt{6}$
27. $p = \dfrac{16}{3}$; $a = \dfrac{20}{3}$
28. $p = 4$; $h = 2\sqrt{5}$
29. $p = 14{,}4$; $b = 2\sqrt{61}$
30. $c = 8$; $h = 2\sqrt{3}$
31. $p = 20$; $q = 5$
32. $c = 50$; $b = 10\sqrt{21}$
33. $b = 3\sqrt{2}$; $q = \sqrt{2}$
34. $q = 2\sqrt{2}$; $h = 2\sqrt{2}$

Elementos de trigonometría en el triángulo rectángulo 4.4

Razones trigonométricas

Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b y cuya hipotenusa mide c. Sean α y β las medidas de sus ángulos agudos.



Se definen las siguientes razones trigonométricas:

Seno de $\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Coseno de $\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Tangente de $\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

Cotangente de $\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

Secante de $\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

Cosecante de $\alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

De la figura, tenemos:

- $sen\ \alpha = \dfrac{a}{c}$
- $cos\ \alpha = \dfrac{b}{c}$
- $tg\ \alpha = \dfrac{a}{b}$
- $cotg\ \alpha = \dfrac{b}{a}$
- $sec\ \alpha = \dfrac{c}{b}$
- $cosec\ \alpha = \dfrac{c}{a}$

También se puede verificar fácilmente:

- $sen\ \alpha = cos\ \beta$
- $cos\ \alpha = sen\ \beta$
- $tg\ \alpha = cotg\ \beta$
- $cot\ \alpha = tg\ \beta$
- $sec\ \alpha = cosec\ \beta$
- $cosec\ \alpha = sec\ \beta$

En general, se cumple que:

- $sen\ \alpha = cos(90° - \alpha)$
- $cos\ \alpha = sen(90° - \alpha)$
- $tan\ \alpha = ctg(90° - \alpha)$
- $ctg\ \alpha = tg(90° - \alpha)$
- $sec\ \alpha = cosec(90° - \alpha)$
- $cosec\ \alpha = sec(90° - \alpha)$

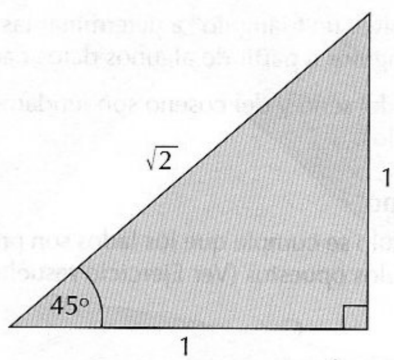
Identidades trigonométricas

A partir de las definiciones de las razones trigonométricas se verifican las siguientes identidades:

- $sen\ \alpha = \dfrac{1}{cosec\ \alpha}$
- $cos\ \alpha = \dfrac{1}{sec\ \alpha}$
- $tg\ \alpha = \dfrac{1}{cotg\ \alpha}$
- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$
- $cotg\ \alpha = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$
- $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$
- $1 + tg^2\ \alpha = sec^2\ \alpha$
- $1 + cotg^2\ \alpha = cosec^2\ \alpha$

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Para determinar las razones trigonométricas de 45° consideramos el triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1. Por teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.



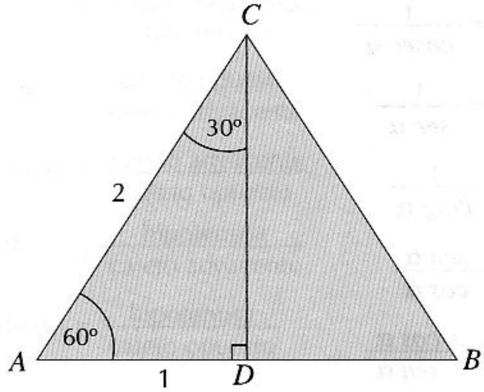
Las razones trigonométricas son:

$sen\ 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad cosec\ 45° = \sqrt{2}$

$cos\ 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad sec\ 45° = \sqrt{2}$

$tg\ 45° = 1$ $\qquad cotg\ 45° = 1$

Para determinar las razones trigonométricas de 30º y 60º consideremos un triángulo equilátero de lado igual a 2 unidades; trazamos la altura $\overline{CD}$ y construimos el triángulo rectángulo ACD. Los catetos de este triángulo miden 1 y $\sqrt{3}$.



Las razones trigonométricas son:

$sen\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = cos\ 30°$ $\qquad$ $cosec\ 60° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = sec\ 30°$

$cos\ 60° = \dfrac{1}{2} = sen\ 30°$ $\qquad$ $sec\ 60° = 2 = cosec\ 30°$

$tg\ 60° = \sqrt{3} = cotg\ 30°$ $\qquad$ $cotg\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = tg\ 30°$

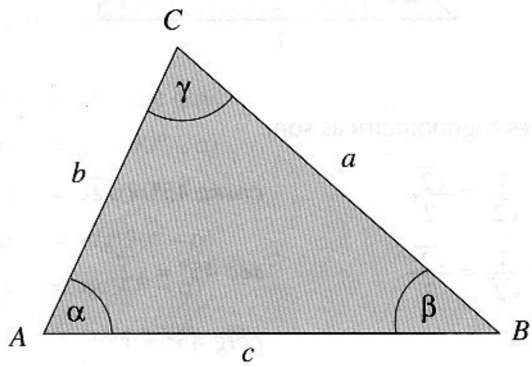
Triángulos no rectángulos. Resolución de triángulos

Se llama "resolver un triángulo" a determinar las medidas de todos sus lados y sus ángulos a partir de algunos datos dados.

Los teoremas del seno y del coseno son fundamentales en la resolución de triángulos.

Teorema del seno

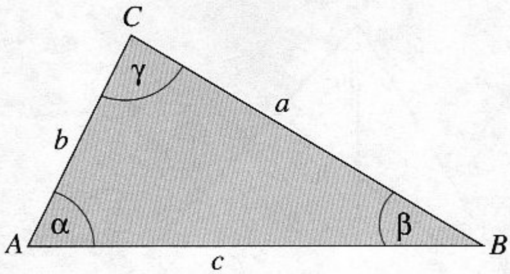
En todo triángulo se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos (Ver Ejercicio resuelto Nº 2).



$$a : b : c = sen\ \alpha : sen\ \beta : sen\ \gamma \quad \text{o} \quad \frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Teorema del coseno

En todo triángulo se cumple que el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de estos lados multiplicado por el coseno del ángulo comprendido entre ellos, es decir:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

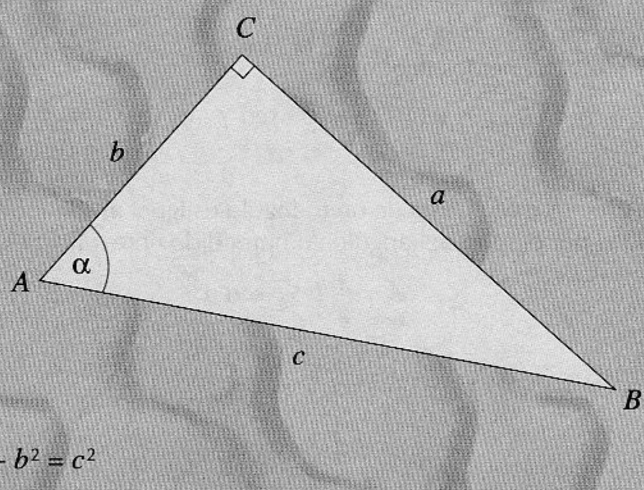
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Ejercicios resueltos

1. Demostremos la identidad $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

Solución:

En el triángulo rectángulo ABC de la figura tenemos:



$a^2 + b^2 = c^2$

Dividiendo ambos miembros por c^2 tenemos:

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 = 1$

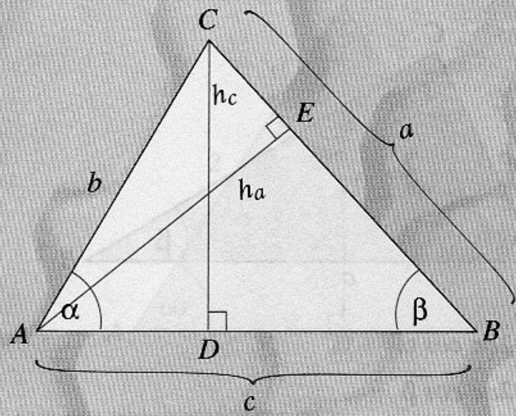
Y aplicando la definición de las razones trigonométricas, tenemos:

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

2. Demostremos el teorema del seno.

Solución:

Consideremos el triángulo ABC de la figura.



Trazamos la altura $CD = h_c$ y tenemos:

$$sen\ \alpha = \frac{h_c}{b} \text{ y } sen\ \beta = \frac{h_c}{a}$$

Es decir, $h_c = b\ sen\ \alpha = a\ sen\ \beta$

De donde: $\dfrac{sen\ \alpha}{sen\ \beta} = \dfrac{a}{b}$ (1)

De la misma forma, trazamos altura $AE = h_a$ y tenemos:

$$sen\ \beta = \frac{h_a}{c} \text{ y } sen\ \gamma = \frac{h_a}{b}$$

Es decir, $h_a = c\ sen\ \beta = b\ sen\ \gamma$

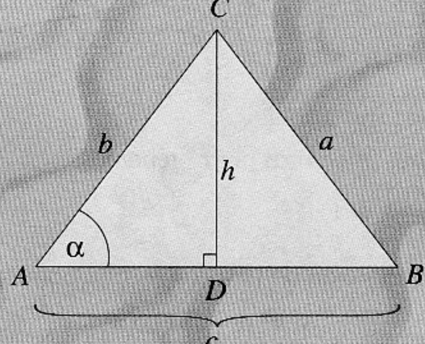
De donde: $\dfrac{sen\ \beta}{sen\ \gamma} = \dfrac{b}{c}$ (2)

De (1) y (2) obtenemos finalmente:

$$a : b : c = \text{sen } \alpha : \text{sen } \beta : \text{sen } \gamma$$

3. Demostremos que el área de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos, es decir:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot c \text{ sen } \alpha$$



Solución:

Consideremos un triángulo ABC cualquiera y sea $\overline{CD}$ su altura.

El área del triángulo es $A = \frac{1}{2} c \cdot h$ (*)

Pero sabemos que: $sen\ \alpha = \frac{h}{b}$

De donde $h = b\ sen\ \alpha$

Y reemplazando en (*) tenemos:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sen\ \alpha$$

En la misma forma se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sen\ \beta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\ \gamma$$

4. Resolvamos el triángulo ABC sabiendo que $a = 12$ cm; $b = 20$ cm y $\gamma = 40°$.

Solución:

Conociendo dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, podemos determinar el tercer lado aplicando el teorema del coseno. En efecto:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \gamma$

$c^2 = 144 + 400 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 0{,}76$

$c^2 = 179{,}2$

$c = 13{,}4$

Para determinar los ángulos α y β aplicamos el teorema del seno:

$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{c}{sen\ \gamma}$

$\frac{12}{sen\ \alpha} = \frac{13{,}4}{sen\ 40°}$

$\frac{12}{sen\ \alpha} = \frac{13{,}4}{0{,}64}$

$sen\ \alpha = 0{,}57$

$\alpha = 35°$

Conocidos α y γ, determinamos β, que es el suplemento de la suma de α y γ.

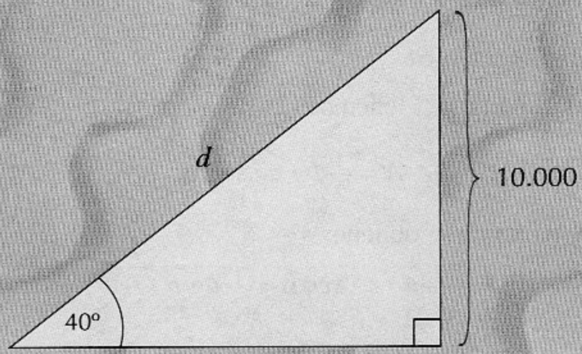
$\beta = 180° - (35° + 40°)$

$\beta = 105°$

5. Un avión asciende con un ángulo de 40º mientras viaja a la velocidad de 800 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a una altura de 10.000 m?

Solución:

La situación está representada en la siguiente figura.



Primero, determinaremos la distancia que debe recorrer para alcanzar la altura. Esta distancia es d.

Tenemos: $sen\ 40º = \dfrac{10.000}{d}$

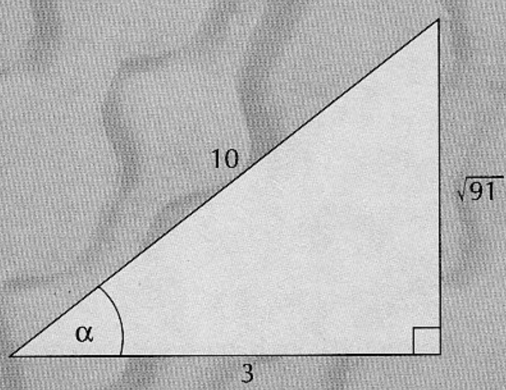
De donde: $d = 15.557$

El avión debe recorrer 15.557 metros, y a una velocidad de 800 km/h tardará 1,16 minutos.

6. Determinemos las razones trigonométricas del ángulo α si sabemos que cos α = 0,3.

Solución:

La situación está representada en la siguiente figura.



Aplicando al definición de las razones trigonométricas tenemos:

$sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$

$$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

$$cosec\ \alpha = \frac{10}{\sqrt{91}}$$

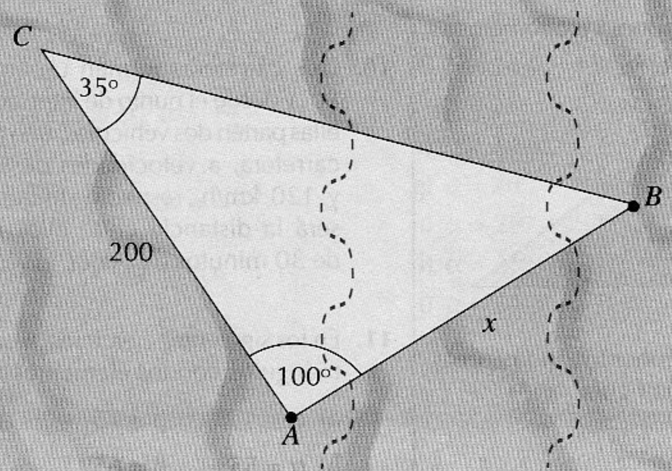
$$sec\ \alpha = \frac{10}{3}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{91}}$$

7. Para determinar la distancia entre dos puntos A y B que se encuentran en lados opuestos de un río, se escoge un punto C, que está ubicado a 200 metros de A y se encuentra al mismo lado respecto del río. Los ángulos BAC y BCA miden 100° y 35°, respectivamente. Determinemos la distancia entre A y B.

Solución:

La figura ilustra el problema.



El ángulo ABC se puede determinar directamente, ya que es el suplemento de la suma de los otros dos. Así, $\measuredangle ABC = 45°$.

$$\frac{x}{sen\ 35°} = \frac{200}{sen\ 45°}$$

$$x = 162{,}2$$

Por lo tanto, la distancia entre A y B es 162,2 metros, aproximadamente.

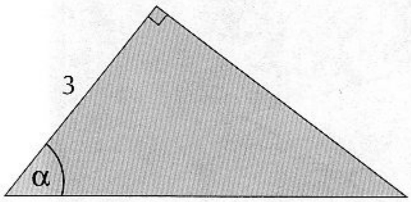
Ejercicios

1. En un $\triangle ABC$, las medidas de sus ángulos son α, β y γ. Además, se cumple que $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$. Determine las demás razones.

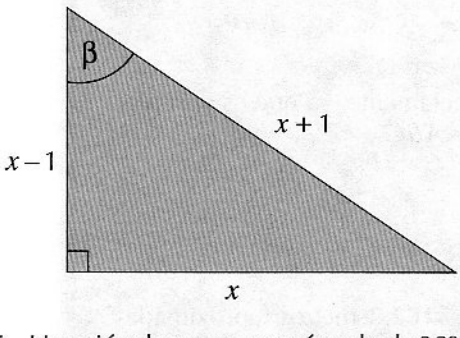
2. En un $\triangle ABC$, las medidas de sus ángulos son α, β y γ. Además, se cumple que $tg\ \alpha = \frac{1}{2}$. Determine las demás razones.

3. En un $\triangle ABC$, las medidas de sus ángulos son α, β y γ. Además, se cumple que $cosec\ \alpha = 1{,}2$. Determine las demás razones.

4. Determine las razones trigonométricas del ángulo α de la figura.



5. Determine las razones trigonométricas del ángulo β de la figura.



6. Un avión despega en un ángulo de 30° y viaja a una velocidad de 600 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzar una altura de 15.000 metros?

7. Desde un punto P situado a nivel del suelo, se observa el extremo superior de un edificio con un ángulo de elevación de 35°, y acercándose 6 metros, el ángulo de elevación es de 45°. ¿Cuál es la altura del edificio?

8. Desde la cumbre de un acantilado de 120 metros de altura se observa un barco bajo un ángulo de depresión de 20°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de la base del acantilado?

9. Los lados de un triángulo miden 12 cm, 16 cm y 18 cm. ¿Cuánto mide el mayor de los ángulos?

10. Dos carreteras forman un ángulo de 80° y desde el punto de intersección de ellas parten dos vehículos, uno por cada carretera, a velocidades de 90 km/h y 120 km/h, respectivamente. ¿Cuál será la distancia entre ellos después de 30 minutos de viaje?

11. En los siguientes ejercicios, resolver los triángulos con los elementos dados:

a) $\alpha = 40°$	$\beta = 75°$	$a = 15$
b) $\alpha = 55°$	$\beta = 65°$	$c = 40$
c) $\alpha = 102°$	$\gamma = 18°$	$c = 12$
d) $\beta = 48°$	$a = 30$	$\gamma = 92°$
e) $\beta = 25{,}1°$	$a = 60$	$c = 50$
f) $\gamma = 45°$	$b = 10$	$a = 15$
g) $\alpha = 60°$	$b = 20$	$c = 30$
h) $a = 2$	$b = 3$	$c = 4$
i) $\beta = 150°$	$a = 150$	$c = 30$
j) $a = 40$	$b = 50$	$c = 40$

Soluciones

1. $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad cosec\ \alpha = \frac{5}{4}$

   $cos\ \alpha = \frac{3}{5}$ $\quad sec\ \alpha = \frac{5}{3}$

   $tan\ \alpha = \frac{4}{3}$ $\quad ctg\ \alpha = \frac{3}{4}$

2. $sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad cosec\ \alpha = \sqrt{5}$

   $cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad sec\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

   $tg\ \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad ctg\ \alpha = 2$

3. $sen\ \alpha = \frac{5}{6}$ $\quad cosec\ \alpha = \frac{6}{5}$

   $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$ $\quad sec\ \alpha = \frac{6}{\sqrt{11}}$

   $tg\ \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$ $\quad ctg\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$

4. $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad cosec\ \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$

   $cos\ \alpha = \frac{1}{2}$ $\quad sec\ \alpha = 2$

   $tg\ \alpha = \sqrt{5}$ $\quad ctg\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

5. $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad cosec\ \alpha = \frac{5}{4}$

   $cos\ \alpha = \frac{3}{5}$ $\quad sec\ \alpha = \frac{5}{3}$

   $tg\ \alpha = \frac{4}{3}$ $\quad ctg\ \alpha = \frac{3}{4}$

6. 3 minutos
7. 14 metros
8. 329,96 metros
9. 78,58°
10. 68,5 kilómetros
11.

a)	$b = 22{,}4$	$c = 21{,}15$	$\gamma = 65°$
b)	$a = 37{,}7$	$b = 41{,}8$	$\gamma = 60°$
c)	$a = 37{,}98$	$b = 33{,}6$	$\beta = 60°$
d)	$b = 34{,}68$	$c = 46{,}6$	$\alpha = 40°$
e)	$b = 25{,}7$	$\alpha = 80{,}6°$	$\gamma = 74{,}3°$
f)	$c = 10{,}6$	$\alpha = 93{,}15$	$\beta = 41{,}8$
g)	$a = 26$	$\beta = 41°$	$\gamma = 79°$
h)	$\alpha = 29°$	$\beta = 47°$	$\gamma = 104°$
i)	$\alpha = 25°$	$\gamma = 5°$	$b = 180$
j)	$\alpha = 51{,}3°$	$\beta = 77{,}36°$	$\gamma = 51{,}3$

THALES DE MILETO

(Mileto, actual Grecia, 624 a.C.-?, 548 a.C.)

Filosófo y matemático griego. Ninguno de sus escritos ha llegado hasta nuestros días; a pesar de ello, son numerosas las aportaciones que a lo largo de la historia, desde Herodoto, Jenófanes o Aristóteles, se le han atribuido. Entre las mismas cabe citar los cinco teoremas geométricos que llevan su nombre (todos ellos con resultados fundamentales), o la noción de que la esencia material del universo era el agua o humedad. Aristóteles consideró a Thales como el primero en sugerir un único sustrato formativo de la materia; además, en su intención de explicar la naturaleza por medio de la simplificación de los fenómenos observables y la búsqueda de causas en el mismo entorno natural, Thales fue uno de los primeros en trascender el tradicional enfoque mitológico que había caracterizado a la filosofía griega de siglos anteriores.

Prueba de selección múltiple

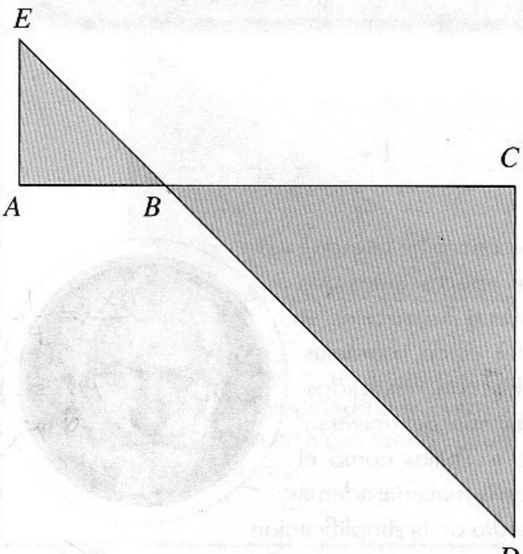
1. Un trazo de 42 cm de longitud se divide en tres segmentos en la razón 2 : 3 : 2. ¿Cuál es la medida del segmento mayor?

A. 6 cm
B. 7 cm
C. 14 cm
D. 18 cm
E. 21 cm

2. Un trazo $\overline{AB}$ se divide en tres segmentos en la razón 3 : 4 : 5. Si el segmento menor mide 21 cm, ¿cuál es la medida del trazo $\overline{AB}$?

A. 28 cm
B. 35 cm
C. 84 cm
D. 48 cm
E. 252 cm

3. En la figura, $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{CD}$ mide 24 cm y $AB : AC = 1 : 4$.
¿Cuánto mide el segmento $\overline{AE}$?

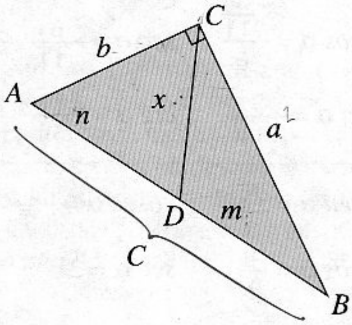


A. 6 cm
B. 8 cm
C. 12 cm
D. 15 cm
E. 45 cm

4. ¿Cuál es la medida α de un ángulo si se sabe que su complemento y su suplemento están en la razón 1 : 4?

A. 15°
B. 30°
C. 45°
D. 60°
E. 75°

5. En la figura siguiente, el triángulo ABC es rectángulo en C; $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera?



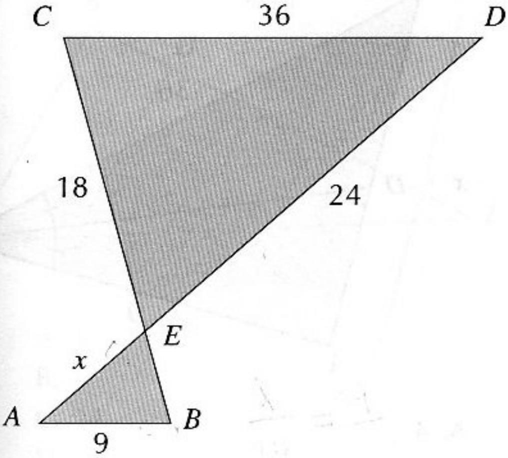
A. $a^2 = m \cdot c$
B. $x^2 + m^2 = a^2$
C. $x^2 = m \cdot n$
D. $a \cdot b = m \cdot n$
E. $a \cdot n = b \cdot m$

6. Si dos triángulos son semejantes, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. Tienen igual área.
II. Tienen igual perímetro.
III. Tienen sus lados homólogos respectivamente proporcionales.
IV. Tienen sus ángulos proporcionales en razón distinta de 1.

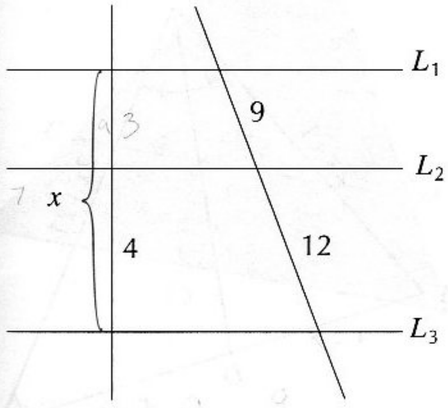
A. Sólo I
B. Sólo III
C. Sólo II y III
D. Sólo III y IV
E. Sólo I, III y IV

7. En la figura siguiente, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = 9$ cm, $CD = 36$ cm, $CE = 18$ cm y $DE = 24$ cm. ¿Cuánto mide el trazo $\overline{AE}$?



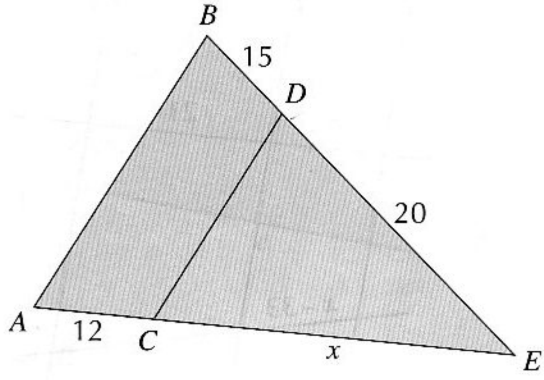
A. 6 cm
B. 9 cm
C. 12 cm
D. 4,5 cm
E. 13,5 cm

8. En la figura siguiente, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. ¿Cuál es el valor de x?



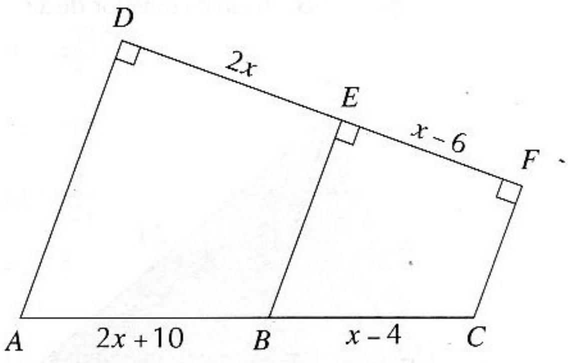
A. 3 cm
B. 7 cm
C. 27 cm
D. $\frac{16}{3}$ cm
E. $\frac{16}{7}$ cm

9. En la figura siguiente, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AC = 12$ cm, $BD = 15$ cm y $DE = 20$ cm. ¿Cuánto mide el trazo $\overline{CE}$?



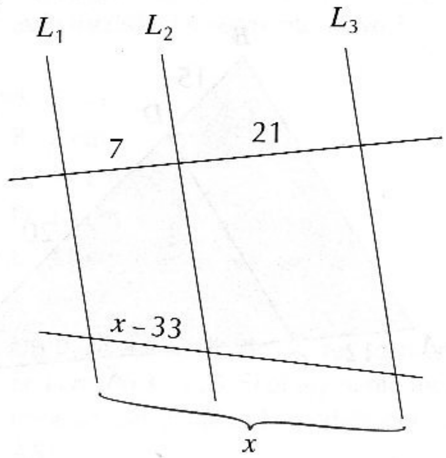
A. 7 cm
B. 8 cm
C. 10 cm
D. 15 cm
E. 16 cm

10. A partir de los datos de la figura siguiente, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?



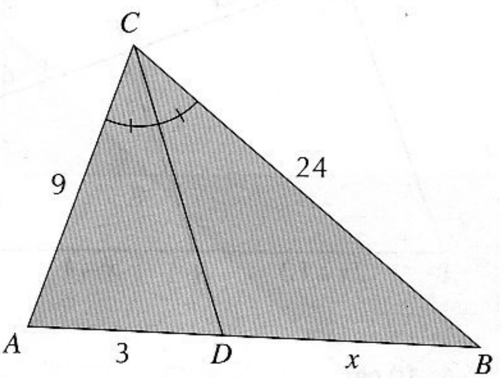
A. 10 cm
B. 12 cm
C. 20 cm
D. 24 cm
E. 30 cm

11. A partir de los datos de la figura siguiente, ¿qué valor debe tener x para que se cumpla $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$.



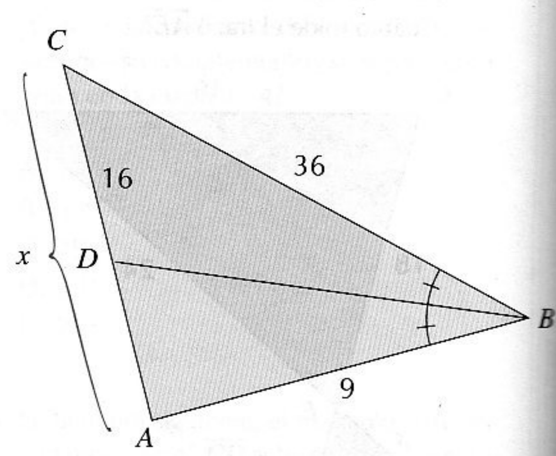
A. 40
B. 44
C. 56
D. 66
E. 99

12. En la figura siguiente, $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. ¿Cuál es el valor de x?



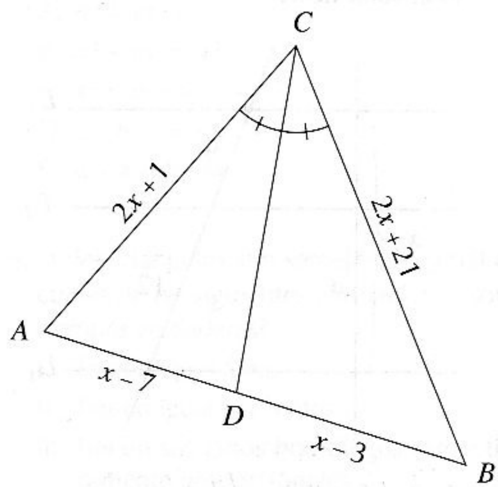
A. 3
B. 6
C. 8
D. 9
E. 12

13. En la figura siguiente, $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC. ¿Cuál es el valor de x?



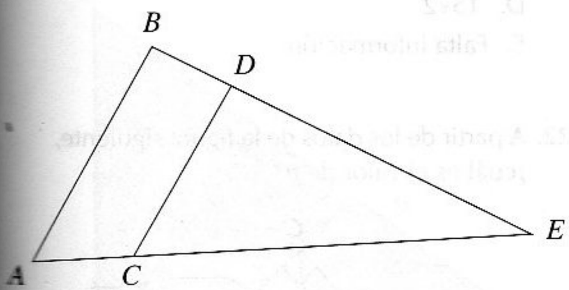
A. 4
B. 12
C. 20
D. 64
E. $\dfrac{81}{4}$

14. En la figura siguiente, $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. ¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?



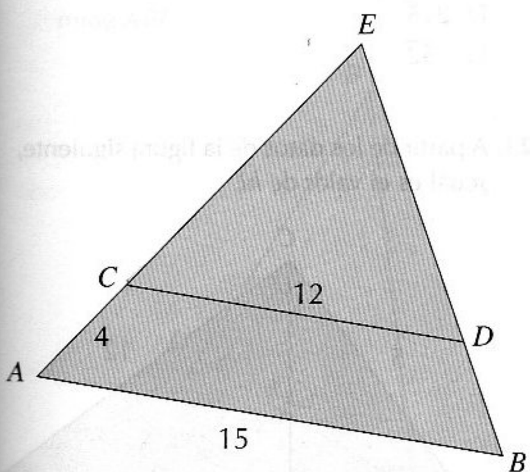
A. 12
B. 39
C. 79
D. 84
E. 144

15. En la figura siguiente, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AE}$ mide 30 cm y $BD : DE = 1 : 5$. ¿Cuánto mide $\overline{CE}$?



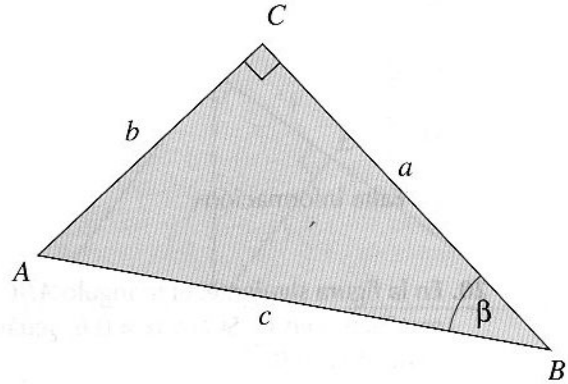
A. 5
B. 6
C. 24
D. 25
E. Falta información

16. A partir de los datos de la figura siguiente y sabiendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, ¿cuánto mide $\overline{CE}$?



A. 5
B. 9
C. 16
D. 20
E. $\frac{16}{5}$

17. A partir de los datos de la figura siguiente, ¿cuál es el valor de $tg\ \beta$?



A. $\frac{b}{c}$

B. $\frac{a}{c}$

C. $\frac{b}{a}$

D. $\frac{a}{b}$

E. $\frac{c}{a}$

18. Si $cos\ \alpha = 0{,}4$, ¿cuál es el valor de $ctg\ \alpha$?

A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$

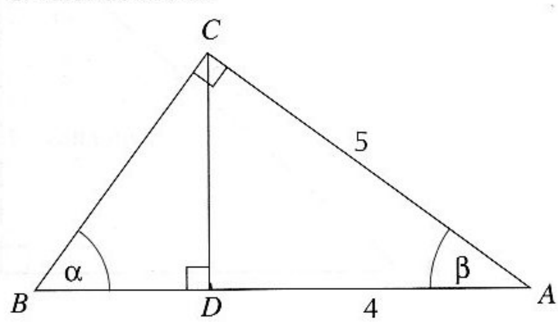
B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

C. $\frac{2}{\sqrt{21}}$

D. $\frac{5}{\sqrt{21}}$

E. $\frac{5}{2}$

19. En la figura siguiente, el triángulo ABC es rectángulo en C y $\overline{CD}$ es altura. ¿Cuál es el valor de $cos\ \alpha$?



A. $\frac{3}{5}$

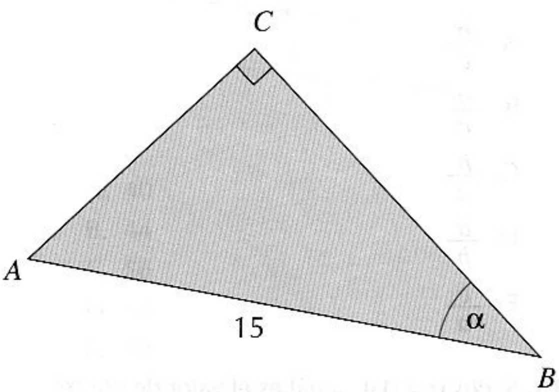
B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{5}{4}$

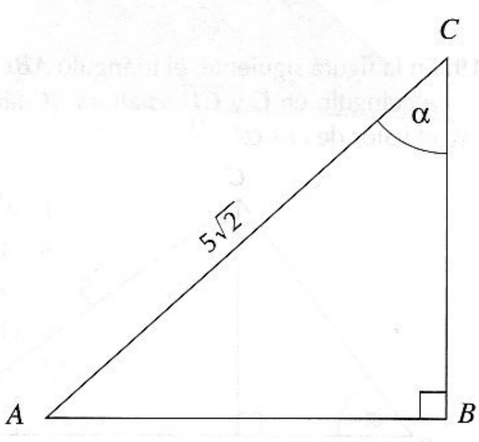
E. Falta información

20. En la figura siguiente, el triángulo ABC es rectángulo en C. Si $sen\ \alpha = 0{,}6$, ¿cuánto mide el lado $\overline{BC}$?



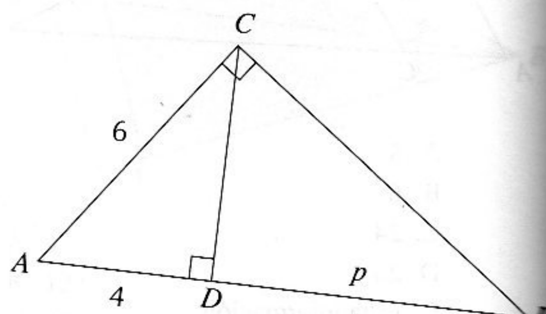
A. 8
B. 9
C. 10
D. 12
E. Falta información

21. Si $tg\ \alpha = 1$, ¿cuál es el perímetro del triángulo rectángulo de la figura?



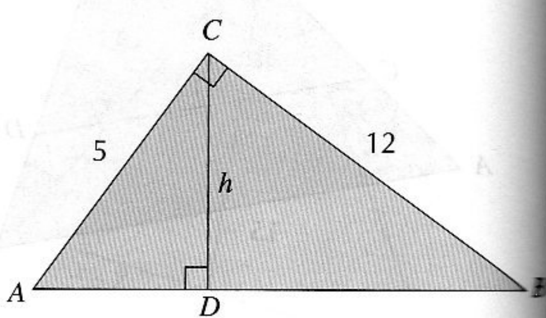
A. $10\sqrt{2}$
B. $5 + 5\sqrt{2}$
C. $10 + 5\sqrt{2}$
D. $15\sqrt{2}$
E. Falta información.

22. A partir de los datos de la figura siguiente, ¿cuál es el valor de p?



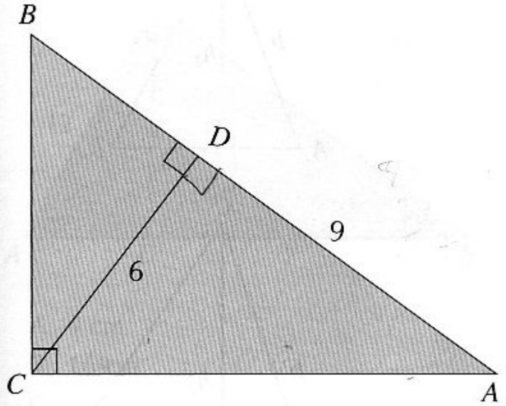
A. 4
B. 5
C. 6
D. $2\sqrt{5}$
E. $\sqrt{52}$

23. A partir de los datos de la figura siguiente, ¿cuál es el valor de h?



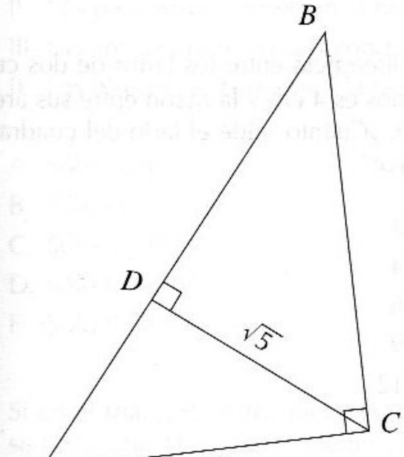
A. 60
B. 65
C. $2\sqrt{15}$
D. $\frac{60}{13}$
E. $\frac{60}{169}$

24. En la figura, la altura CD mide 6 cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo BCD?



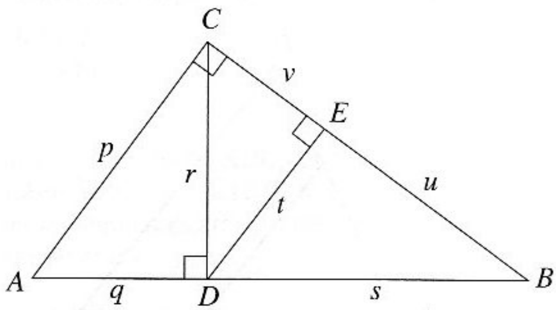
A. 18
B. 19
C. $12\sqrt{13}$
D. $10 + 2\sqrt{13}$
E. $12 + 2\sqrt{3}$

25. A partir de los datos de la figura, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?



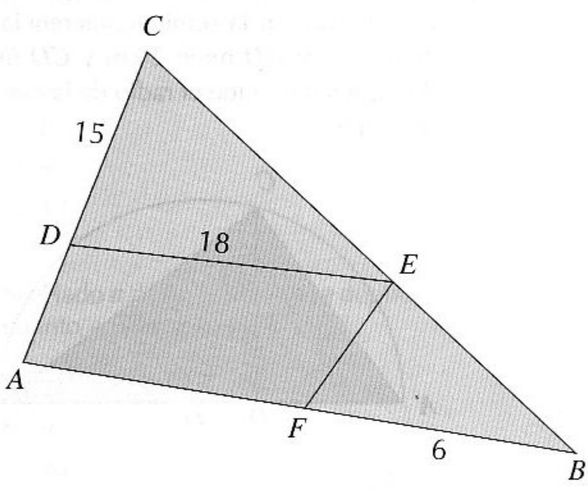
A. 5
B. $\sqrt{5}$
C. 6
D. $\sqrt{6}$
E. 30

26. A partir de los datos de la figura, ¿cuál de las siguientes relaciones es FALSA?



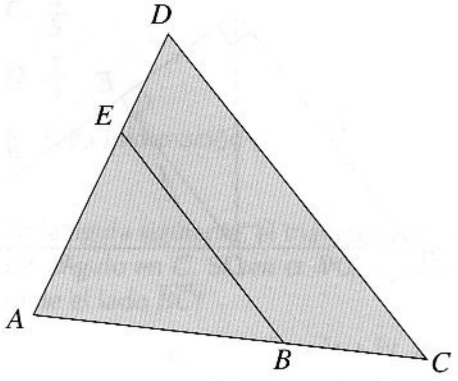
A. $v^2 + t^2 = r^2$
B. $r^2 + s^2 = (v + u)^2$
C. $r^2 = q \cdot s$
D. $u^2 = s^2 - t^2$
E. $(v + u)^2 = s(s + t)$

27. En la figura, $AFED$ es un paralelogramo. ¿Cuál es su perímetro?



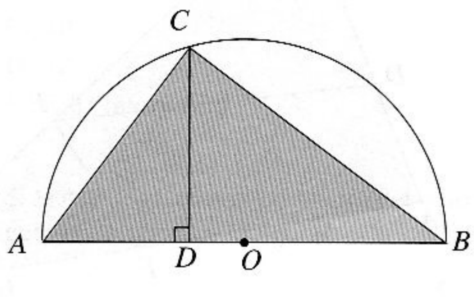
A. 66
B. 46
C. 56
D. 72
E. Falta información.

28. Según la figura, $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ y $AB : BC = 3 : 2$. ¿En qué razón están las áreas de los triángulos ABE y ACD, respectivamente?



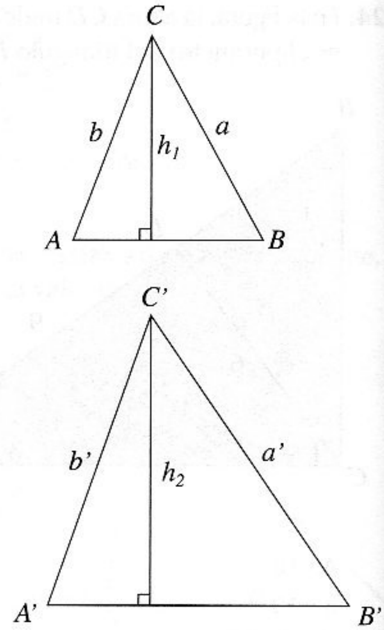
A. 2 : 3
B. 2 : 5
C. 3 : 5
D. 4 : 9
E. 9 : 25

29. En la figura siguiente, el triángulo ABC está inscrito en la semicircunferencia de centro O. Si AD mide 2 cm y CD mide 4 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?



A. 4 cm
B. 5 cm
C. 8 cm
D. 10 cm
E. $2\sqrt{5}$ cm

30. En la figura siguiente, el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$ y sus lados están en la razón 2 : 3. ¿Cuál de las siguientes opciones es FALSA?



A. $(a + b) : (h_1 : h_2) = 4 : 6$
B. $(a + b) : (a' + b') = 2 : 3$
C. $(h_1 : h_2) = 2 : 3$
D. perímetro (ABC) : perímetro $(A'B'C')$ $= 2 : 3$
E. área $(\triangle ABC)$: área $(\triangle A'B'C') = 4 : 9$

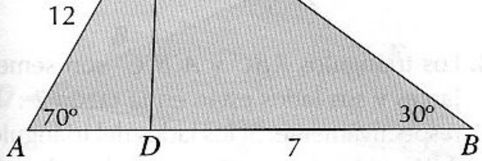
31. La diferencia entre los lados de dos cuadrados es 4 cm y la razón entre sus áreas es 9. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado mayor?

A. 3
B. 4
C. 6
D. 9
E. 12

32. Si a y b son tales que $\frac{a+b}{a-b} = \frac{5}{1}$, ¿en qué razón están a y b?

A. 3 : 1
B. 3 : 2
C. 5 : 1
D. 6 : 1
E. 2 : 3

33. ¿Cuál es la medida de AD en la figura?



A. 9 cm
B. 16 cm
C. 5 cm
D. $5\sqrt{7}$ cm
E. No se puede calcular.

34. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y se cumple que $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=r$. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son siempre verdaderas?

I. Las alturas conservan la razón r.
II. Los perímetros conservan la razón r.
III. Las áreas conservan la razón r.
IV. Las bisectrices conservan la razón r.

A. Sólo I y II
B. Sólo I y III
C. Sólo II y III
D. Sólo I, II y IV
E. Sólo II, III y IV

35. Si en el triángulo ABC, rectángulo en C, se tiene que D es punto medio del lado AB, ¿cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

I. D es centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.
II. D es centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.
III. Los triángulos ADC y BDC son isósceles.

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. I y II
E. I y III

36. Si en el triángulo ABC, D es un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BCD$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

A. $(CD)^2 = AD \cdot BD$
B. $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$
C. $(AC)^2 = AD \cdot AB$
D. D es el incentro del triángulo ABC
E. D es el circuncentro del triángulo ABC

37. La razón entre las áreas de dos triángulos equiláteros es 1 : 9 y la diferencia entre sus lados es 4. ¿Cuánto mide el lado del mayor?

A. 4
B. 6
C. 8
D. 9
E. 12

38. Si el lado a de un cuadrado se duplica, ¿en cuánto aumenta su perímetro?

A. $2a$
B. a^2
C. $2a^2$
D. $4a$
E. $8a$

39. Si el lado a de un cuadrado se duplica, ¿en cuánto aumenta su área?

A. a^2
B. $2a^2$
C. $3a^2$
D. $4a^2$
E. $8a^2$

40. Sea ABC un triángulo cualquiera y sean M y N los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Sea P el punto de intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$
II. $\overline{AP} = 2\ \overline{PM}$
III. P es el incentro del triángulo ABC
IV P es el circuncentro del triángulo ABC

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo II y III
D. Sólo I, II y IV
E. Sólo II, III y IV

41. Sean $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$ las alturas respectivas de los triángulos ABC y ABD. Si $CE = 3DF$, ¿en qué razón están las áreas de dichos triángulos?

A. 3 : 1
B. 3 : 2
C. 6 : 1
D. 9 : 1
E. Falta información

42. ¿Cuáles de las siguientes figuras no son semejantes?

A. Los triángulos con ángulos correspondientes congruentes.
B. Los triángulos rectángulos isósceles.
C. Los polígonos con lados correspondientes proporcionales.
D. Los pentágonos regulares.
E. Los polígonos con ángulos correspondientes congruentes.

43. Las áreas de dos rectángulos semejantes están en la razón 1 : 4. Si los lados del rectángulo menor miden 5 y 6 cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo mayor?

A. 22 cm
B. 24 cm
C. 30 cm
D. 44 cm
E. 60 cm

44. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y sus lados están en la razón 2 : 3, respectivamente. Si los lados del triángulo ABC miden 6, 6 y 10 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo $A'B'C'$?

A. 22 cm
B. 33 cm
C. 36 cm
D. 44 cm
E. 45 cm

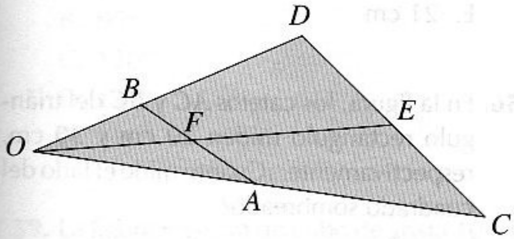
45. Si dos triángulos son tales que comparten un mismo lado y el tercer vértice de ambos está sobre la recta paralela al lado común, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto de ambos triángulos?

A. Tienen igual área
B. Tienen igual perímetro
C. Son semejantes
D. Son congruentes
E. Ninguna de las anteriores

46. Si las alturas de dos triángulos están en la razón 2 : 5 y sus bases respectivas están en la razón 5 : 2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto de ambos triángulos?

A. Tienen igual área
B. Tienen igual perímetro
C. Son semejantes
D. Son congruentes
E. Ninguna de las anteriores

47. En la figura, $AB \parallel CD$ y OE es bisectriz del ángulo AOB. Si $OF : FE = 2 : 3$, ¿en qué razón están los perímetros de los triángulos AOB y COD, respectivamente?



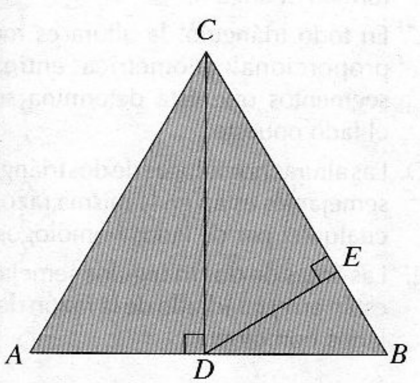
A. 2 : 3
B. 2 : 5
C. 4 : 9
D. 4 : 25
E. No se puede determinar

48. El triángulo ABC es rectángulo en C y sea D el punto medio de $\overline{AB}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. C es el ortocentro del triángulo
II. D es el circuncentro del triángulo
III. $\overline{CD}$ es simetral de $\overline{AB}$

A. Sólo I
B. Sólo II
C. I y II
D. II y III
E. I, II y III

49. En la figura, ABC es un triángulo equilátero de lado 12 cm; $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. ¿Cuánto mide $\overline{ED}$?



A. 2
B. 3
C. $3\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{3}$
E. $3\sqrt{3}$

50. Si a y b son tales que $4a - 3b = 3a + 4b$, ¿en qué razón están a y b?

A. 1 : 1
B. 1 : 3
C. 4 : 3
D. 1 : 7
E. 3 : 4

51. Si a, b, c, x e y son números tales que: $\frac{5a}{6b} = \frac{2c}{x}$ y $\frac{2a}{3b} = \frac{c}{y}$, ¿en qué razón están x e y?

A. 3 : 2
B. 8 : 3
C. 8 : 5
D. 12 : 5
E. 5 : 3

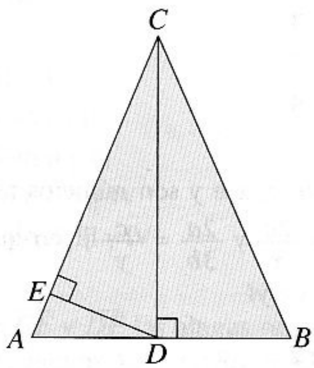
52. Los lados de un cuadrilátero miden 3, 6, 5 y 8 cm, respectivamente, y el lado mayor de un cuadrilátero semejante mide 12 cm. ¿Cuál es el perímetro del segundo cuadrilátero?

A. 33 cm
B. 36 cm
C. 28 cm
D. 24 cm
E. 30 cm

53. Un par de lados homólogos de dos polígonos semejantes miden 12 cm y 18 cm, respectivamente. Si el perímetro del polígono mayor mide 54 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono menor?

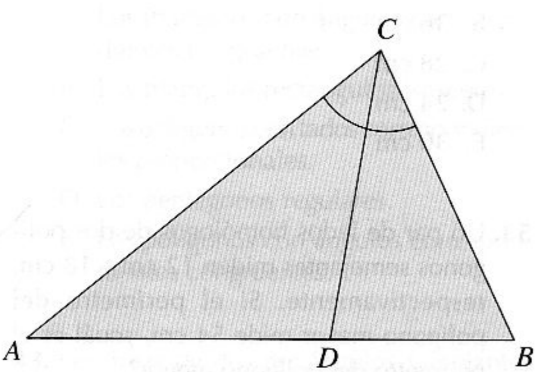
A. 24 cm
B. 27 cm
C. 30 cm
D. 36 cm
E. 48 cm

54. En la figura, ABC es un triángulo isósceles de base $AB = 12$ cm y altura 8 cm. $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{AC}$. ¿Cuánto mide $\overline{AE}$?



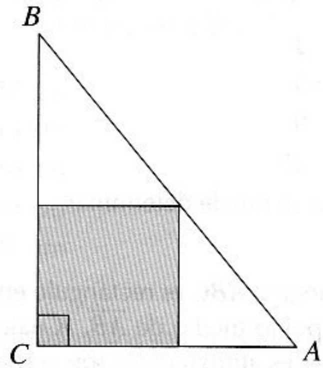
A. 3,6 cm
B. 6,4 cm
C. 4,8 cm
D. 4 cm
E. 6 cm

55. En la figura, $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo ACB. El perímetro del triángulo mide 44 cm, $AD = 6$ cm y $BD = 5$ cm. ¿Cuánto mide AC?



A. 10 cm
B. 12 cm
C. 15 cm
D. 18 cm
E. 21 cm

56. En la figura, los catetos AC y BC del triángulo rectángulo miden 20 cm y 30 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado sombreado?



A. 8 cm
B. 10 cm
C. 12 cm
D. 15 cm
E. 18 cm

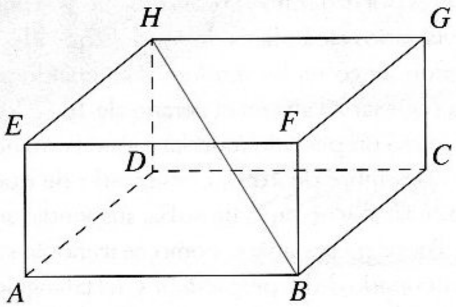
57. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A. En todo triángulo, una recta paralela a uno de sus lados divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.
B. En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en la misma razón de los lados que forman el ángulo,
C. En todo triángulo, la altura es media proporcional geométrica entre los segmentos que ésta determina sobre el lado opuesto.
D. Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes están en la misma razón de cualquier par de lados homólogos.
E. Las áreas de dos triángulos semejantes están en el cuadrado de la razón de dos lados homólogos.

58. Las medidas de los ángulos interiores de un pentágono están en la razón 4 : 4 : 2 : 3 : 5. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

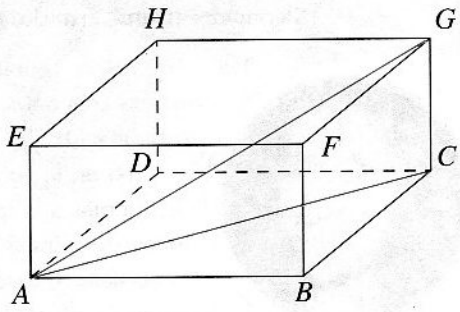
A. 60°
B. 90°
C. 120°
D. 135°
E. 150°

59. La figura muestra un cubo de arista 10 cm. ¿Cuánto mide la diagonal $\overline{BH}$?



A. $10\sqrt{2}$ cm
B. $10\sqrt{3}$ cm
C. $10\sqrt{5}$ cm
D. 20 cm
E. 30 cm

60. La figura muestra un cubo de arista a. ¿En qué razón están las diagonales AC y AG?



A. 1 . 2
B. 1 . 3
C. $1 : \sqrt{2}$
D. $1 : \sqrt{3}$
E. $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

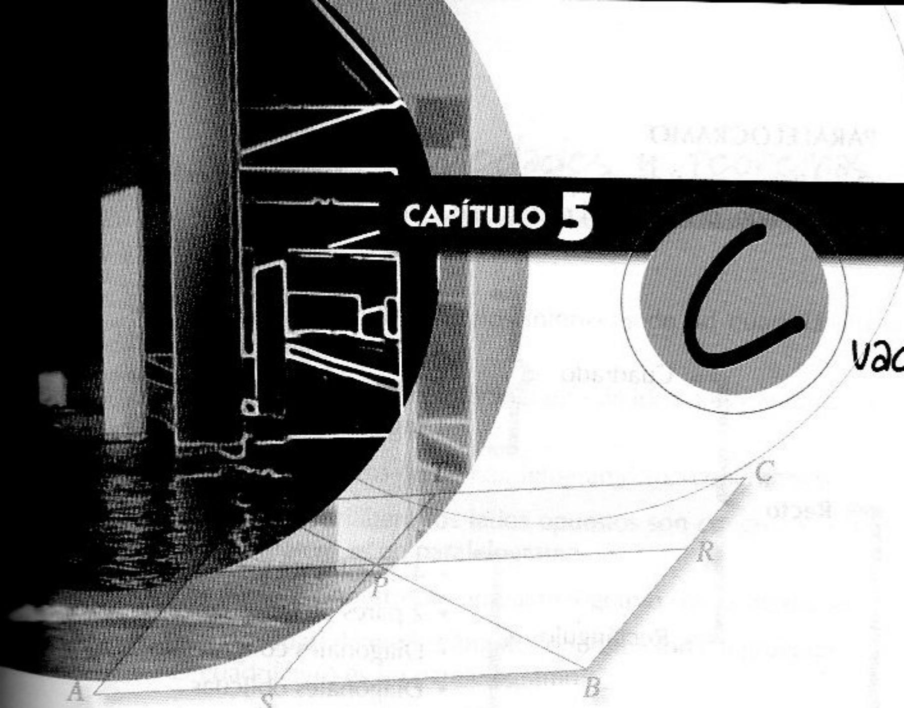
Soluciones

1. D	**13.** C	**25.** C	**37.** B	**49.** E
2. C	**14.** D	**26.** E	**38.** D	**50.** D
3. A	**15.** D	**27.** B	**39.** C	**51.** C
4. D	**16.** C	**28.** E	**40.** B	**52.** A
5. E	**17.** C	**29.** B	**41.** A	**53.** D
6. B	**18.** C	**30.** A	**42.** E	**54.** A
7. A	**19.** A	**31.** C	**43.** D	**55.** D
8. B	**20.** D	**32.** B	**44.** B	**56.** C
9. E	**21.** C	**33.** B	**45.** A	**57.** C
10. E	**22.** B	**34.** D	**46.** A	**58.** E
11. B	**23.** D	**35.** E	**47.** B	**59.** B
12. C	**24.** D	**36.** B	**48.** C	**60.** E

BLAISE PASCAL

(Clermont-Ferrand, Francia, 1623-París, 1662)

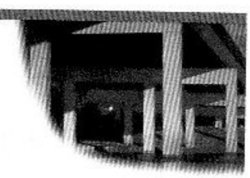
Filósofo, físico y matemático francés. Su madre falleció cuando él contaba tres años, a raíz de lo cual su padre se trasladó a París con su familia (1630). Fue un genio precoz a quien su padre inició muy pronto en la geometría e introdujo en el círculo de Mersenne, la Academia, a la que él mismo pertenecía. Allí se familiarizó con las ideas de Girard Desargues, y en 1640 redactó su "Ensayo sobre las cónicas" ("Essai pour les coniques"), que contenía lo que hoy se conoce como teorema del hexágono de Pascal. La designación de su padre como comisario del impuesto real supuso el traslado a Ruán, donde Pascal desarrolló un nuevo interés por el diseño y la construcción de una máquina de sumar; se conservan todavía varios ejemplares del modelo que ideó, algunos de cuyos principios se utilizaron luego en las modernas calculadoras mecánicas. La enfermedad lo indujo a regresar a París en el verano de 1647; los médicos le aconsejaron distracción e inició un período mundano que terminó con su experiencia mística del 23 de noviembre de 1654; convencido de que el camino hacia Dios estaba en el cristianismo y no en la filosofía, suspendió su trabajo científico casi por completo. Pocos meses antes, como testimonia su correspondencia con Fermat, se había ocupado de las propiedades del triángulo aritmético hoy llamado de Pascal y que da los coeficientes de los desarrollos de las sucesivas potencias de un binomio; su tratamiento de dicho triángulo en términos de una «geometría del azar» lo convirtió en uno de los fundadores del cálculo matemático de probabilidades. En 1658, al parecer con el objeto de olvidarse de un dolor de muelas, elaboró su estudio de la cicloide, que resultó un importante estímulo en el desarrollo del cálculo diferencial. Desde 1655 frecuentó Port-Royal, donde se había retirado su hermana Jacqueline en 1652. Tomó partido en favor de Arnauld, el general de los jansenistas, y publicó anónimamente sus Provinciales. El éxito de las cartas lo llevó a proyectar una apología de la religión cristiana; el deterioro de su salud a partir de 1658 frustró, sin embargo, el proyecto, y las notas dispersas relativas a él quedaron más tarde recogidas en sus famosos Pensamientos (Pensées sur la religion, 1669). Aunque rechazó siempre la posibilidad de establecer pruebas racionales de la existencia de Dios, cuya infinitud consideró inabarcable para la razón, admitió no obstante que esta última podía preparar el camino de la fe para combatir el escepticismo. La famosa apuesta de Pascal analiza la creencia en Dios en términos de apuesta sobre su existencia, pues si el hombre cree y finalmente Dios no existe, nada se pierde en realidad. La tensión de su pensamiento entre la ciencia y la religión quedó reflejada en su admisión de dos principios del conocimiento: la razón (esprit géométrique), orientada hacia las verdades científicas y que procede sistemáticamente a partir de definiciones e hipótesis para avanzar demostrativamente hacia nuevas proposiciones, y el corazón (esprit de finesse), que no se sirve de procedimientos sistemáticos porque posee un poder de comprensión inmediata, repentina y total, en términos de intuición. En esta última se halla la fuente del discernimiento necesario para elegir los valores en que la razón debe cimentar su labor.



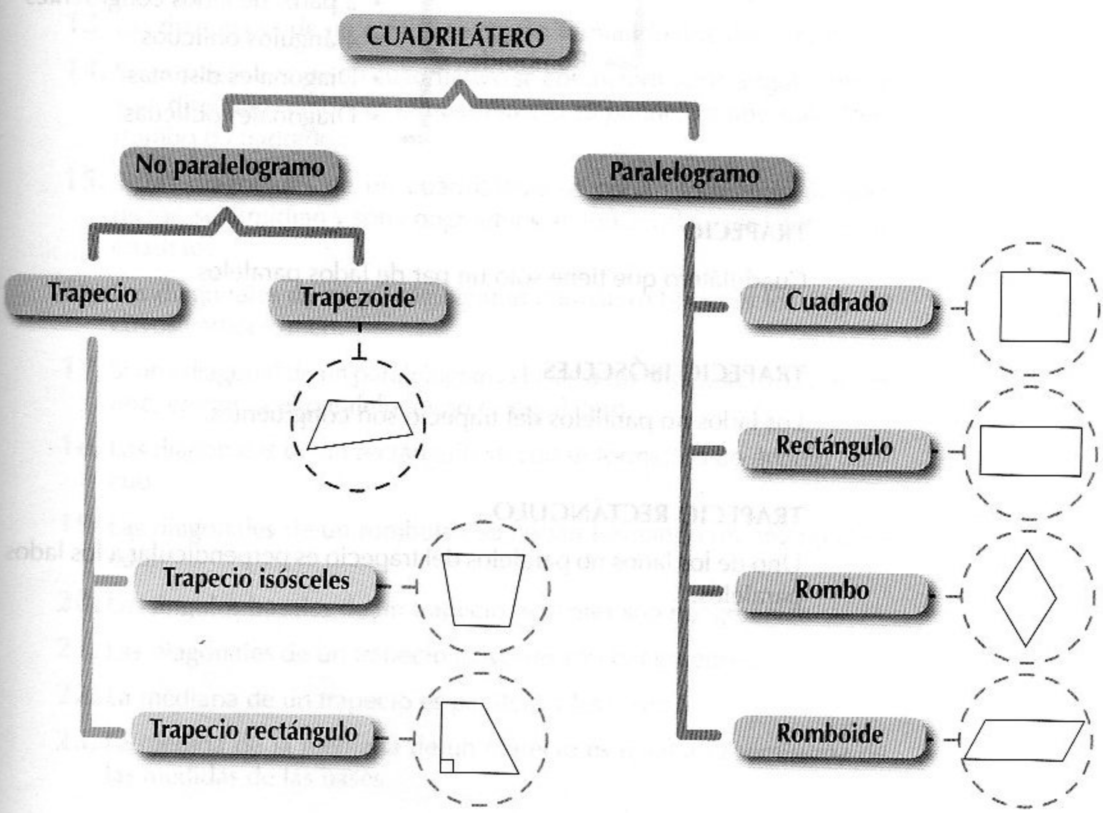
CAPÍTULO 5

Cuadriláteros

Definición y clasificación 5.1



Llamaremos cuadrilátero a una figura plana, cerrada y limitada por cuatro segmentos. Los segmentos se llaman lados del cuadrilátero, y sus intersecciones son los vértices. Cada cuadrilátero tiene dos diagonales, que son segmentos que unen dos vértices no consecutivos.



PARALELOGRAMO

Cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos. Son paralelogramos el romboide, el rombo, el rectángulo y el cuadrado.

PARALELOGRAMO

- **Recto**
  - Cuadrado
    - 4 ángulos rectos
    - 4 lados congruentes
    - Diagonales congruentes
    - Diagonales perpendiculares
  - Rectángulo
    - 4 ángulos rectos
    - 2 pares de lados congruentes
    - Diagonales congruentes
    - Diagonales oblicuas
- **Oblicuo**
  - Rombo
    - 4 lados congruentes
    - 4 ángulos oblicuos
    - Diagonales distintas
    - Diagonales perpendiculares
  - Romboide
    - 2 pares de lados congruentes
    - 4 ángulos oblicuos
    - Diagonales distintas
    - Diagonales oblicuas

TRAPECIO

Cuadrilátero que tiene sólo un par de lados paralelos.

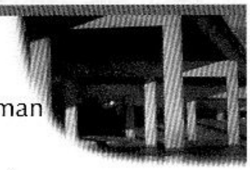
TRAPECIO ISÓSCELES

Los lados no paralelos del trapecio son congruentes.

TRAPECIO RECTÁNGULO

Uno de los lados no paralelos del trapecio es perpendicular a los lados paralelos.

Propiedades y teoremas 5.2



1. Las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°.
2. Las diagonales de un paralelogramo dividen a éste en dos triángulos congruentes.
3. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
4. Si en un cuadrilátero los lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
5. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
6. Si en un cuadrilátero los ángulos opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
7. Si un cuadrilátero tiene dos lados congruentes y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
8. Las diagonales de un paralelogramo se dimidian.
9. Si en un cuadrilátero las diagonales se dimidian, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
10. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
11. Si en un cuadrilátero las diagonales son congruentes y se dimidian, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.
12. Las diagonales de un cuadrado se cortan formando ángulos rectos.
13. Las diagonales de un rombo se cortan formando ángulos rectos.
14. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan formando ángulos rectos y se dimidian, entonces el cuadrilátero es paralelogramo equilátero (rombo o cuadrado).
15. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan formando ángulos rectos, se dimidian y son congruentes, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.
16. Las diagonales de un paralelogramo equilátero bisectan los ángulos cuyos vértices unen.
17. Si una diagonal de un paralelogramo bisecta los ángulos cuyos vértices une, entonces el paralelogramo es equilátero.
18. Las diagonales de un rectángulo se cortan formando un ángulo oblicuo.
19. Las diagonales de un romboide se cortan formando un ángulo oblicuo.
20. Los ángulos basales de un trapecio isósceles son congruentes.
21. Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.
22. La mediana de un trapecio es paralela a las bases.
23. La medida de la mediana de un trapecio es igual a la semisuma de las medidas de las bases.

5.3 Perímetro y áreas

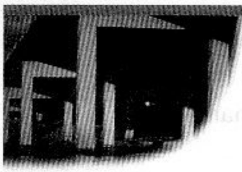
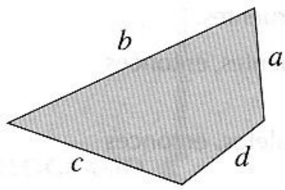
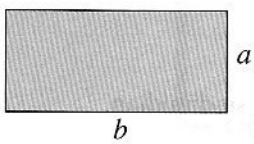
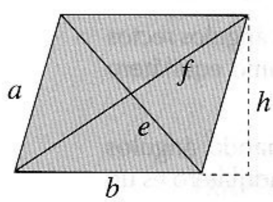
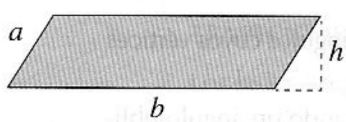
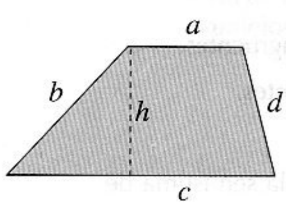


FIGURA	PERÍMETRO Suma de las medidas de los lados	ÁREA Medida de la porción de plano que encierra
Cuadrilátero 	$a+b+c+d$	Depende de la forma. Si no es ninguna en especial, debe calcularse particionando el cuadrilátero en formas conocidas.
Rectángulo 	$2(a+b)$	$a \cdot b$
Rombo 	$2(a+b)$	$b \cdot h$ $\frac{e \cdot f}{2}$
Romboide 	$2(a+b)$	$b \cdot h$
Trapecio 	$a+b+c+d$	$\frac{(a+c)\cdot h}{2}$

Datos necesarios para que un cuadrilátero quede determinado.

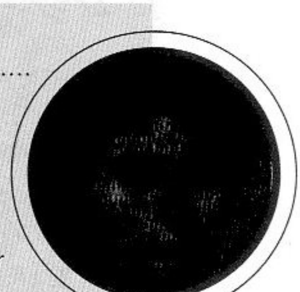
Un cuadrilátero queda determinado si se conocen cinco elementos independientes entre sí. Por ejemplo, si se conocen los cuatro lados y un ángulo o si se conocen tres lados y dos ángulos, etc.

También es posible que un cuadrilátero quede determinado conociendo menos de cinco elementos y algunas condiciones que éstos deben cumplir. Por ejemplo:

1. Un paralelogramo queda determinado si se conocen tres elementos independientes entre sí; las otras dos condiciones están en el hecho de que los lados opuestos deben ser paralelos.
2. Un rombo requiere de dos elementos independientes para quedar determinado, puesto que el hecho de ser un paralelogramo señala dos condiciones (dos pares de lados opuestos paralelos) y la tercera es que todos sus lados son congruentes.
3. Un rectángulo tiene dadas tres condiciones (dos pares de lados opuestos paralelos y sus ángulos rectos); por lo tanto, con dos elementos independientes queda totalmente determinado.
4. Un cuadrado requiere de sólo un elemento lineal para quedar determinado, puesto que hay cuatro condiciones dadas: dos pares de lados opuestos paralelos, sus ángulos rectos y todos sus lados congruentes.
5. Un trapecio, en cambio, sólo tiene la condición de poseer un par de lados paralelos; por lo tanto, se requieren cuatro elementos independientes entre sí para que el trapecio quede determinado.
6. Un trapecio isósceles agrega la condición de que los ángulos basales son congruentes y, por lo tanto, requiere sólo de tres elementos independientes entre sí para quedar determinado. Lo mismo ocurre con un trapecio rectángulo. Pero si se pide construir un trapecio rectángulo e isósceles, nos están dando tres condiciones: un par de lados paralelos, ángulos basales congruentes y un ángulo recto. Sólo faltan dos elementos. Nótese que un trapecio isósceles rectángulo es un rectángulo.

HIPATÍA

(Alejandría, c. 370- id., 415)



Matemática y filósofa griega. En colaboración con su padre, Teón de Alejandría, reeditó críticamente los "Elementos" de Euclides y comentó el "Almagesto" de Tolomeo. Dirigió una escuela neoplatónica (c. 400) y fue, finalmente, asesinada por unos cristianos.

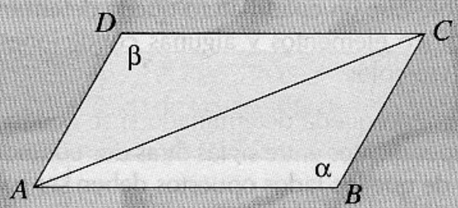
Ejercicios resueltos

1. Demostrar que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Hipótesis: $ABCD$ es un paralelogramo

α y β son las medidas de los ángulos opuestos

Tesis: $\alpha \cong \beta$



Demostración:

1. Trazamos la diagonal $\overline{AC}$.
2. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{CA} \text{ (lado común)} \\ \sphericalangle CAB \cong \sphericalangle ACD \text{ (alternos internos entre paralelas)} \\ \sphericalangle BCA \cong \sphericalangle DAC \text{ (alternos internos entre paralelas)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$

3. $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$, por ser medidas de elementos homólogos de triángulos congruentes.

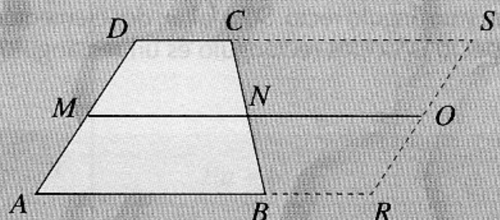
2. Demostrar que en un trapecio la medida de la mediana es igual a la semisuma de las medidas de las bases.

Hipótesis: $ABCD$ es un trapecio

$\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ bases

$\overline{MN}$ es mediana

Tesis: $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$



Demostración:

1. Copiamos $\overline{DC}$ a continuación de $B \rightarrow BR = DC$
2. Copiamos $\overline{AB}$ a continuación de $C \rightarrow CS = AB$
3. Unimos R con S, obteniendo el paralelogramo $ARSD$
4. Prolongamos $\overline{MN}$ hasta $O \rightarrow \overline{MO}$ paralela media
5. Por construcción, trapecio $ABCD \cong$ trapecio $SCBR$
6. $MN = \dfrac{MO}{2}$

7. Pero, $MO = AB + DC$
8. Por lo tanto, $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$

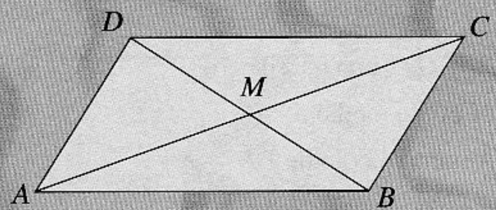
3. Demostrar que si en un cuadrilátero las diagonales se dimidian, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Hipótesis: $ABCD$ es un cuadrilátero

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales que se cortan en M

$AM = MC$ y $BM = MD$

Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo



Demostración:

1. $\triangle ABM \cong \triangle CDM$, porque:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} \cong \overline{CM} \text{ (hipótesis)} \\ \overline{BM} \cong \overline{DM} \text{ (hipótesis)} \\ \sphericalangle AMB \cong \sphericalangle CMD \text{ (opuestos por el vértice)} \end{array}\right\} \text{(L.A.L)}$$

2. Luego $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
   (por ser elementos homólogos de triángulos congruentes)
3. Y $\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CDM$
   (por ser elementos homólogos de triángulos congruentes)
4. Por lo tanto, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (los ángulos alternos internos son congruentes)
5. De 2) y 4), $ABCD$ es paralelogramo, ya que es un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes.

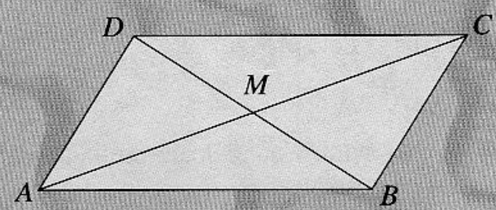
4. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se dimidian (recíproco del anterior).

Hipótesis: $ABCD$ es un paralelogramo

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales

Tesis: $\overline{AM} \cong \overline{CM}$

$\overline{DM} \cong \overline{MB}$



Demostración:

1. $\triangle AMD \cong \triangle CMB$, porque:

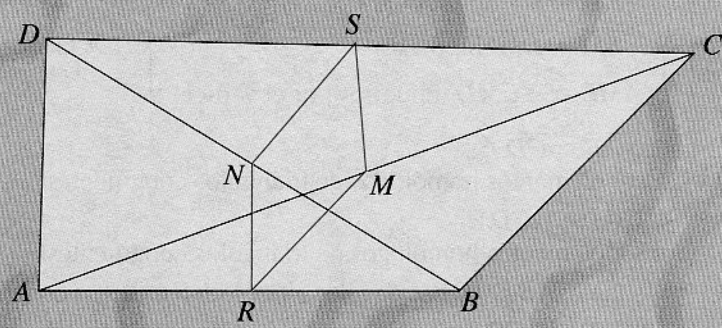
$$\left.\begin{array}{r} \overline{AD} \cong \overline{CB} \text{ (lados opuestos de un paralelogramo)} \\ \sphericalangle DMA \cong \sphericalangle BMC \text{ (opuestos por el vértice)} \\ \sphericalangle DAM \cong \sphericalangle BCM \text{ (alternos internos entre paralelas)} \end{array}\right\} \text{(A.L.A)}$$

2. Luego $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ y $\overline{DM} \cong \overline{MB}$ (elementos homólogos de triángulos congruentes)

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Demostrar que el cuadrilátero determinado por los puntos medios de dos lados opuestos y los puntos medios de ambas diagonales es un paralelogramo.

Hipótesis: $ABCD$ es un cuadrilátero
M punto medio de $\overline{AC}$
N punto medio de $\overline{DB}$
R punto medio de $\overline{AB}$
S punto medio de $\overline{DC}$

Tesis: $NRMS$ es un paralelogramo



Demostración:

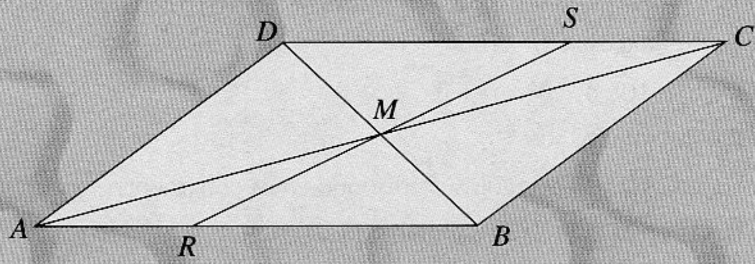
1. $NR = \dfrac{AD}{2}$ (mediana del $\triangle ADB$)
2. $MS = \dfrac{AD}{2}$ (mediana del $\triangle ADC$)
3. Por lo tanto, $NR = MS$
4. $RM = \dfrac{BC}{2}$ (mediana del $\triangle ABC$)
5. $NS = \dfrac{BC}{2}$ (mediana del $\triangle ABD$)
6. Por lo tanto, $RM = NS$
7. Luego, de 3) y 6), $NRMS$ paralelogramo (cuadrilátero que tiene dos pares de lados congruentes).

6. Demostrar que en un paralelogramo el punto donde se intersectan las diagonales es punto medio de cualquier segmento que lo contenga y que una dos puntos de lados opuestos.

Hipótesis: $ABCD$ es un paralelogramo

$\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ diagonales que se intersectan en M

Tesis: $\overline{RM} \cong \overline{MS}$



Demostración:

1. $\triangle ARM \cong \triangle CSM$ porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{CM} \text{ (M punto medio por ser intersección de las diagonales de un paralelogramo)} \\ \sphericalangle MAR \cong \sphericalangle MCS \text{ (alternos internos entre paralelas)} \\ \sphericalangle AMR \cong \sphericalangle CMS \text{ (opuestos por el vértice)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$

2. Luego $\overline{RM} \cong \overline{SM}$ (por ser elementos homólogos de triángulos congruentes)

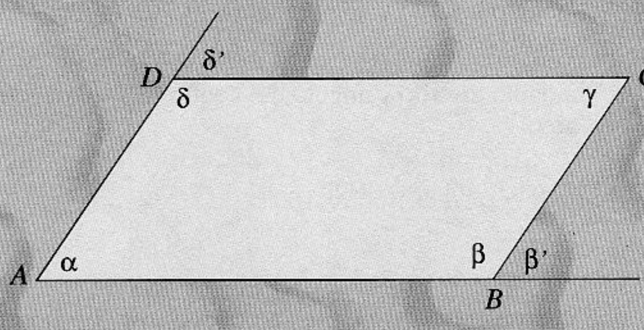
7. Demostrar que un cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo.

Hipótesis: $ABCD$ es un cuadrilátero

$\alpha = \gamma$

$\beta = \delta$

Tesis: $ABCD$ es un paralelogramo



Demostración:

1. $\delta + \delta' = 180°$ (forman un par lineal)
2. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ (ángulos interiores de un cuadrilátero)
3. $2\alpha + 2\delta = 360°$ (reemplazando β por δ y γ por α)

4. Por lo tanto, $\alpha + \delta = 180°$

5. De 1) y 4), $\delta + \delta' = \alpha + \delta$

6. Por lo tanto, $\delta' = \alpha$

7. Luego, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (ángulos correspondientes congruentes)

8. $\beta + \beta' = 180°$ (forman un par lineal)

9. $2\alpha + 2\beta = 360°$ (en 2 se reemplaza γ por α y δ por β)

10. Por lo tanto, $\alpha + \beta = 180°$

11. De 8) y 10), $\beta + \beta' = \alpha + \beta$

12. Por lo tanto, $\beta' = \alpha$

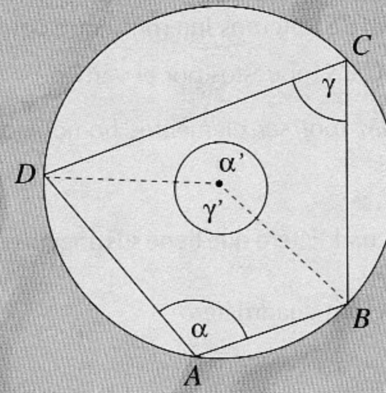
13. Luego, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (ángulos correspondientes congruentes)

14. De 7) y 13), $ABCD$ es paralelogramo

8. En un cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos suman 180°.

Hipótesis: α y γ son las medidas de ángulos opuestos en el cuadrilátero $ABCD$.

Tesis: $\alpha + \gamma = 180°$



Demostración:

$\gamma = \frac{1}{2}\gamma'$ (ángulo inscrito y ángulo del centro que subtienden el mismo arco)

$\alpha = \frac{1}{2}\alpha'$ (ángulo inscrito y ángulo del centro que subtienden el mismo arco)

$\alpha + \gamma = \frac{1}{2}(\alpha' + \gamma') = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$

9. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- En una circunferencia, siempre se pueden inscribir un cuadrado, un rectángulo y un trapecio isósceles.
  Verdadero.
- En una circunferencia, siempre se puede inscribir un cuadrilátero.
  Falso. Sólo cuando los ángulos opuestos suman 180°.

- En una circunferencia nunca se puede inscribir un rombo o un romboide.

  Verdadero. Sus ángulos opuestos no suman 180°. Si así fuera, serían un cuadrado o un rectángulo.

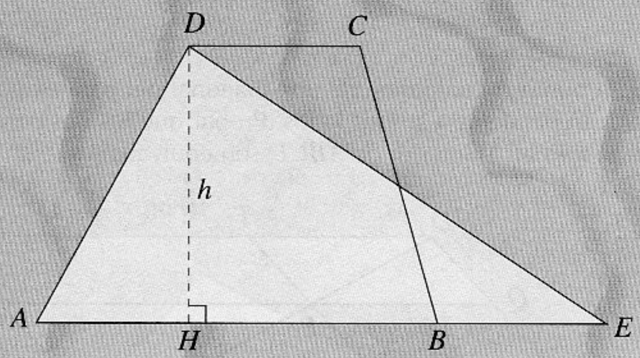
10. Demostrar que un trapecio es equivalente a un triángulo que tiene la misma altura y su base es la suma de las bases del trapecio.

Hipótesis: $ABCD$ es un trapecio.

AED es un triángulo.

$AB + DC = AE$

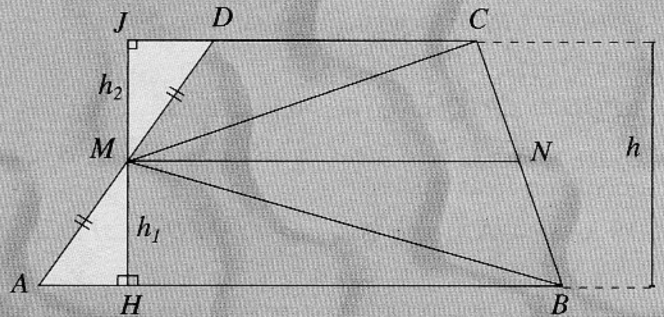
Tesis: $A_{\triangle} ABCD = A_{\triangle} AED.$



Demostración:

1. $A_{\triangle} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot h$
2. $A_{\triangle} = \frac{1}{2}AE \cdot h$
3. Pero, $AB + CD = AE$
4. Por lo tanto, $A_{\triangle ABCD} = A_{\triangle AED}$.

11. En un trapecio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, sea M el punto medio del lado no paralelo $\overline{AD}$. Demostrar que $A_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}A_{\triangle ABCD}$.



Demostración:

1. $A_{\triangle} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot h$

2. $h_1 = h_2$ y $h_1 + h_2 = h$

3. $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$ (mediana del trapecio)

4. $A_{\triangle MNC} = MN \cdot \frac{h_2}{2}$

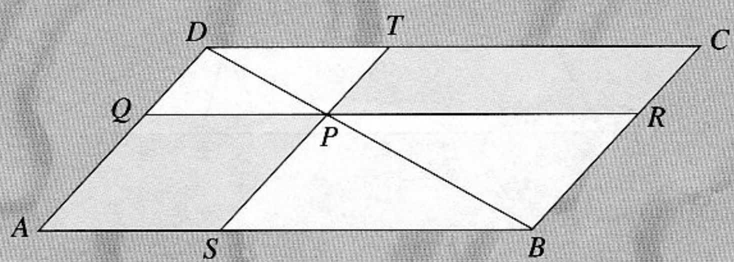
5. $A_{\triangle MNB} = MN \cdot \frac{h_1}{2}$

6. $A_{\triangle BMC} = A_{\triangle MNC} + A_{\triangle MNB}$

$$= MN \cdot \frac{h_1}{2} + MN \cdot \frac{h_2}{2} = \frac{MN}{2}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(AB + DC) \cdot h\right) = \frac{1}{2}A_{\triangle}$$

12. Por un punto P cualquiera de una diagonal del paralelogramo $ABCD$ se trazan paralelas a ambos lados. Probar que los dos paralelogramos que se forman al interior de $ABCD$ son equivalentes.



Sean $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{ST} \parallel \overline{BC}$

Por demostrar: $\square ASPQ \sim \square PRCT$ o ($\text{Área}_{\square ASPQ} = \text{Área}_{\square PRCT}$)

Demostración:

1. En $\square ABCD$

   $\triangle ABD \cong \triangle CDB$; luego tienen igual área.

2. En $\square SBRP$

   $\triangle SBP \cong \triangle RPB$; luego tienen igual área.

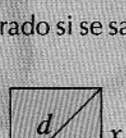
3. En $\square QPTD$

   $\triangle PQD \cong \triangle PTD$; luego tienen igual área.

4. $A_{\triangle ABD} = A_{\triangle CDB}$ (si a áreas iguales restamos áreas iguales, lo que queda son áreas iguales).

5) Por lo tanto, $A_{\square ASPQ} = A_{\square CTPR}$ y $\square ASPQ \sim \square PRCT$

13. Calcular el área de un cuadrado si se sabe que la medida de su diagonal más el lado es de 3,2 m.



Solución:

Sabemos que: $d + x = 3{,}2$

pero: $d = \sqrt{2x^2}$

$d = x\sqrt{2}$

Luego: $x\sqrt{2} + x = 3{,}2$

$x(\sqrt{2} + 1) = 3{,}2$

$x = \dfrac{3{,}2}{1 + \sqrt{2}}$

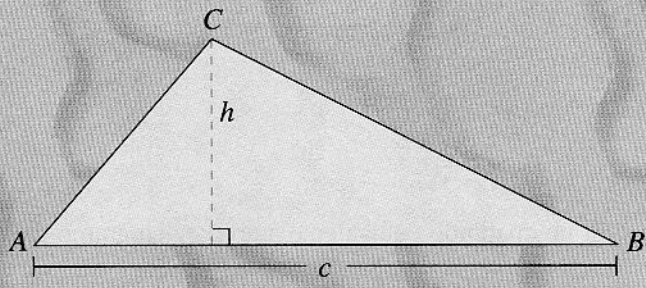
$x \approx 1{,}325$ m

El área del cuadrado es aproximadamente 1,76 m^2.

14. Construir un cuadrado equivalente a un triángulo dado.

Solución:

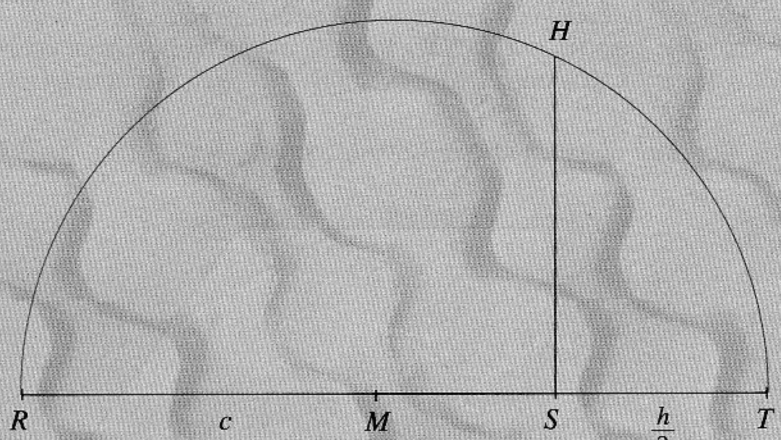
Como el triángulo está dado, se conocen todos sus elementos. Se pide que el cuadrado tenga la misma área que el triángulo dado.
Si ABC es el triángulo de base c y altura h,



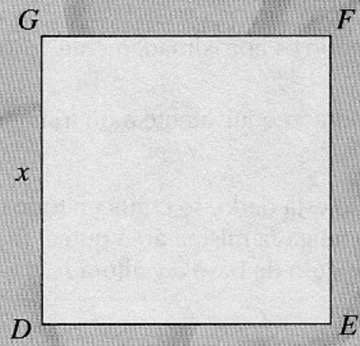
sea x el lado del cuadrado que se va a construir. Para que el área del cuadrado sea equivalente al triángulo,

$$x^2 = c \cdot \frac{h}{2}$$

debemos conocer el valor de x. Para ello, debemos construir una media proporcional entre c y $\frac{h}{2}$. Usando el teorema de Euclides lo podemos hacer.



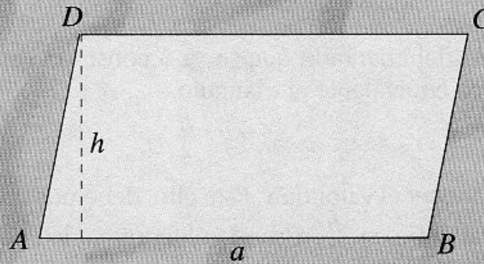
1. Copiamos $RS = c$
2. A continuación: $\frac{h}{2} = ST$
3. M es punto medio $\overline{RT}$
4. $\odot(M, MT)$
5. Trazamos en S, $\overline{SH} \perp \overline{RT}$
6. $SH^2 = c \cdot \frac{h}{2}$
7. Luego, $SH = x$ (lado del cuadrado equivalente al $\triangle ABC$ dado)



$A_{\triangle ABC} = A_{\square DEFG}$

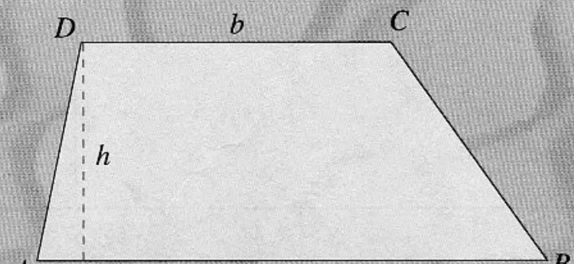
$c \cdot \frac{h}{2} = x^2$

15. Construir un cuadrado equivalente a un paralelogramo dado.



Sea x el lado del cuadrado que se desea construir.
En este caso, $x^2 = a \cdot h$; luego x es la media proporcional geométrica entre a y h. La construcción es similiar al ejercicio anterior.

16. Construir un cuadrado equivalente a un trapecio.



$$A_{\triangle} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

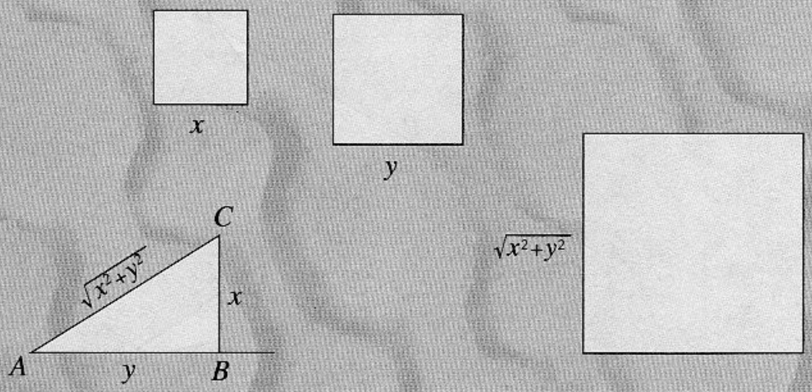
Luego, debemos hallar x como media proporcional geométrica entre $\frac{a+b}{2}$ y h o entre $a+b$ y $\frac{h}{2}$. La construcción es similar al ejercicio 14.

17. Construir un cuadrado cuya área sea la suma de las áreas de otros dos cuadrados.

Solución:

Sean x e y los lados de los cuadrados dados. Sea a el lado del cuadrado pedido. Se requiere que $a^2 = x^2 + y^2$. Debemos hallar la medida de $a = \sqrt{x^2+y^2}$ dados x e y.

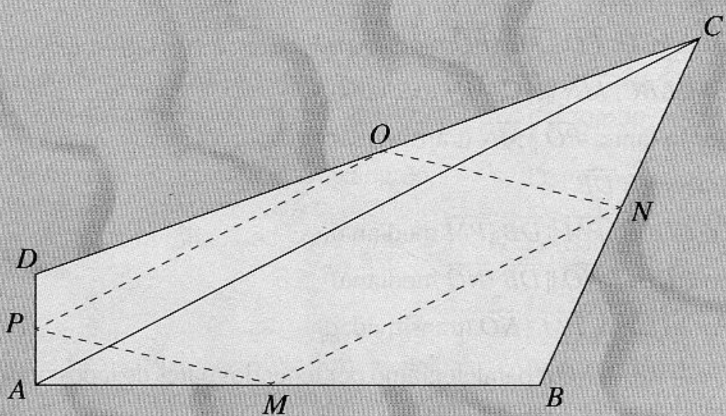
1. Se construye un triángulo rectángulo de catetos x e y.
2. Aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa así construida es $\sqrt{x^2+y^2}$.
3. $\sqrt{x^2+y^2}$ es la medida del lado del cuadrado pedido.



18. Demostrar que los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera generan un paralelogramo.

Hipótesis: *ABCD* es un cuadrilátero
M, N, O y *P* son puntos medios de los lados

Tesis: *MNOP* es un paralelogramo



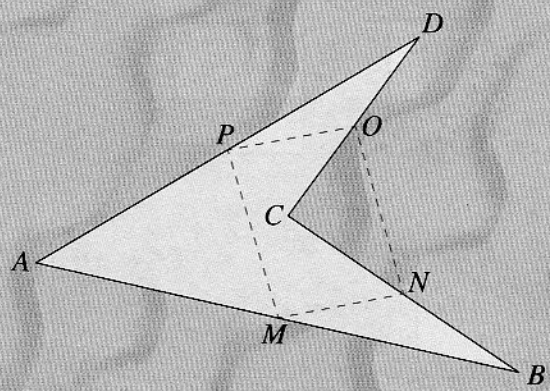
Demostración:

1. Trazamos la diagonal $\overline{AC}$.
2. En $\triangle ABC$; $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ y $MN = \frac{1}{2}AC$

   (En todo triángulo, una mediana es paralela a un lado y mide la mitad de éste)
3. En $\triangle ACD$; $\overline{OP} \parallel \overline{AC}$ y $OP = \frac{1}{2}AC$

   (En todo triángulo, una mediana es paralela a un lado y mide la mitad de éste)
4. Por lo tanto, $\overline{MN} \parallel \overline{OP}$ y MN = OP
5. Un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos congruentes y paralelos es un paralelogramo: *MNOP* paralelogramo.

19. Resolver el problema anterior considerando un cuadrilátero estrellado:



Hipótesis: *ABCD* es un cuadrilátero estrellado

P, *M*, *N* y *O* son puntos medios de los lados

Tesis: *MNOP* es un paralelogramo

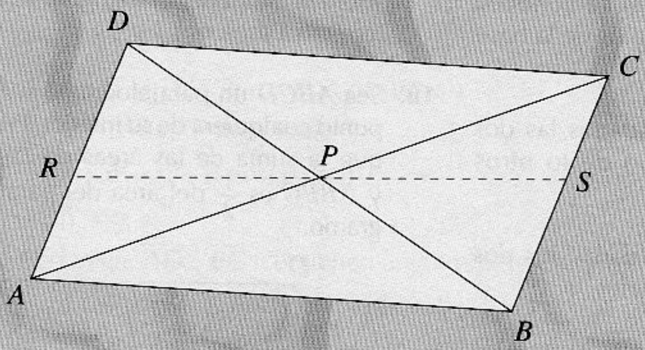
Demostración:

1. Trazamos $\overline{AC}$
2. En $\triangle ACD$; $\overline{PO} \parallel \overline{AC}$ ($\overline{PO}$ mediana)
3. En $\triangle ABC$; $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ ($\overline{MN}$ mediana)
4. Por lo tanto, $\overline{PO} \parallel \overline{MN}$ (transitividad)
5. Trazamos $\overline{DB}$
6. En $\triangle DAB$; $\overline{PM} \parallel \overline{DB}$ ($\overline{PM}$ mediana)
7. En $\triangle DBC$; $\overline{NO} \parallel \overline{DB}$ ($\overline{NO}$ mediana)
8. Por lo tanto, $\overline{PM} \parallel \overline{NO}$ (transitividad)
9. De 4) y 8) *MNOP* paralelogramo por tener dos pares de lados opuestos paralelos.

20. En un cuadrilátero *ABCD*, las diagonales se bisectan en *P*. Si $\overline{RS}$ es un segmento que une dos puntos pertenecientes a lados opuestos de cuadriláteros pasando por *P*, probar que $RP = PS$.

Hipótesis: *ABCD* es un cuadrilátero
$\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ se dimidian en *P*
(esta es condición suficiente para asegurar que *ABCD* es paralelogramo)

Tesis: $\overline{RP} \cong \overline{SP}$



Demostración:

1. $\triangle APR \cong \triangle CPS$ porque:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AP} \cong \overline{CP} \text{ (hipótesis)} \\ \sphericalangle APR \cong \sphericalangle CPS \text{ (opuestos por el vértice)} \\ \sphericalangle RAP \cong \sphericalangle SCP \text{ (alternos internos entre paralelas)} \end{array}\right\} \text{(A.L.A)}$$

2. Por lo tanto, $\overline{RP} \cong \overline{SP}$ (lados homólogos de triángulos semejantes)

Ejercicios

1. Probar que si un cuadrilátero tiene los ángulos consecutivos suplementarios, el cuadrilátero es un paralelogramo.
2. Probar que en un triángulo rectángulo, la transversal de gravedad del ángulo recto mide la mitad de lo que mide la hipotenusa.
3. Demostrar que si la transversal de gravedad de un triángulo mide la mitad del lado que divide, el triángulo es rectángulo en el ángulo opuesto a este lado.
4. Demostrar que las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos del rombo.
5. Demostrar que el punto de intersección de las diagonales de un rombo equidista de los cuatro lados.
6. Demostrar que en un trapecio no convexo, la mediana entre las bases mide la semidiferencia de las bases.

Ejercicios

7. Probar que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero convexo mide la semisuma de lo que miden los otros dos ángulos del cuadrilátero.

8. Construir un paralelogramo dados sus dos lados y una de sus alturas.

9. Construir un trapecio si se conocen las dos bases y los ángulos de la base mayor.

10. Construir un trapecio dados las dos bases, su altura y uno de lo otros lados.

11. Construir un trapecio dadas sus dos bases y sus dos diagonales.

12. Probar que en un paralelogramo las distancias de dos vértices opuestos a la diagonal que pasa por los otros dos vértices son iguales.

13. Probar que el cuadrilátero formado por los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de un rectángulo es un cuadrado.

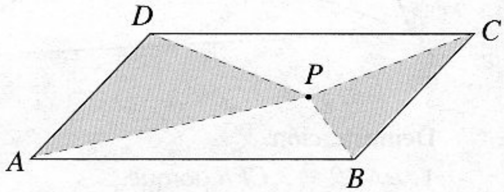
14. En un rectángulo $ABCD$ de lados $\sqrt{3}$ y 1 se traza una diagonal $\overline{AC}$. Se trazan, además, las perpendiculares desde los vértices B y D a la diagonal $\overline{AC}$ determinando los puntos H y J, respectivamente. Hallar el área del cuadrilátero $BHDJ$ así determinado. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

15. Calcular el área de un trapecio cuyas bases miden 29 y 8 y cuyos lados no paralelos son 13 y 20 metros.

16. Calcular el área de un cuadrado sabiendo que la suma de la diagonal y el lado es $(2 + 2\sqrt{2})$ metros.

17. Hallar el área del cuadrado construido sobre la altura de un triángulo equilátero cuya área es $\sqrt{3}\,a^2$.

18. Sea $ABCD$ un paralelogramo y P un punto cualquiera de su interior. Probar que la suma de las áreas de $\triangle APD$ y $\triangle BPC$ es $\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo.



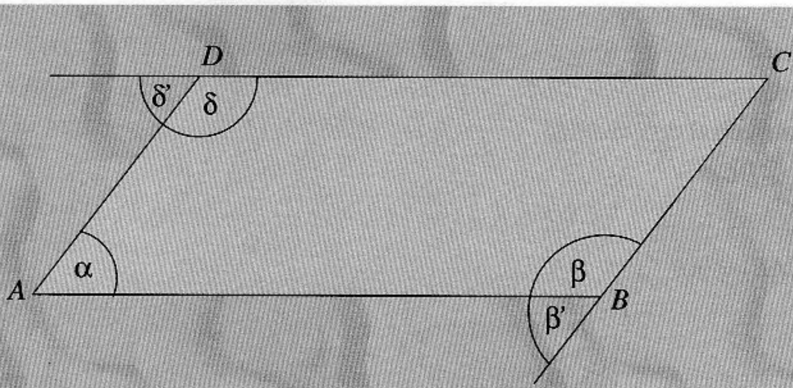
19. Construir un cuadrado equivalente a un cuadrilátero cualquiera dado. (Sugerencia: Divida el cuadrilátero en dos triángulos, construya los cuadrados equivalentes y luego construya un cuadrado cuya área sea la suma de las áreas de los cuadrados equivalentes a los triángulos en que se particionó el cuadrilátero). Ver Ejercicios resueltos nº 14 y nº 17.

20. Demostrar que las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo son paralelas.

Soluciones

1. **Hipótesis:**
$ABCD$ cuadrilátero.
$\alpha + \beta = 180°$
$\alpha + \delta = 180°$

Tesis:
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Demostración:

1. $\beta + \beta' = 180°$ (formar un par lineal)
2. $\alpha + \beta = 180°$ (hipótesis)
3. $\beta + \beta' = \alpha + \beta$ (restando β)
4. $\beta' = \alpha$
5. Luego, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (contienen ángulos alternos internos congruentes)
6. $\delta + \delta' = 180°$ (formar un par lineal)
7. $\alpha + \delta = 180°$ (hipótesis)
8. $\delta + \delta' = \alpha + \delta$ (restando δ)
9. $\delta' = \alpha$
10. Luego, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (contienen ángulos alternos internos congruentes)
11. De 5) y 10); $ABCD$ es paralelogramo

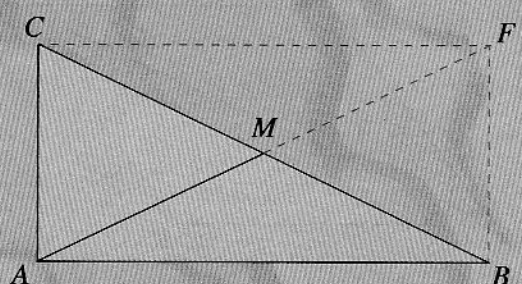
2. **Hipótesis:**

ABC es triángulo rectángulo en A

$\overline{AM}$ es la transversal de gravedad

Tesis:

$AM = \frac{1}{2} CB$



Demostración:

1. Por B trazamos $\overline{BF} \parallel \overline{AC}$
2. Por C trazamos $\overline{CF} \parallel \overline{AB}$
3. Luego, $ABFC$ rectángulo.
4. M punto de intersección de las diagonales.
5. Como las diagonales de un rectángulo son congruentes y se dimidian, $AM = \frac{1}{2} CB$.

3. **Hipótesis:**

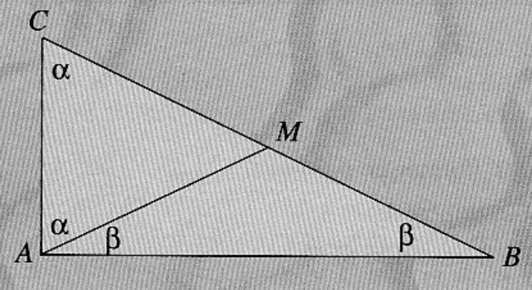
ABC triángulo

$\overline{AM}$ transversal de gravedad

$AM = \frac{1}{2} BC$

Tesis:

$m(\sphericalangle CAB) = 90°$



Demostración:

1. $AM = MC$ (hipótesis)
2. $m(\sphericalangle CAM) = m(\sphericalangle ACM) = \alpha$ (ángulos basales del triángulo isósceles)
3. $AM = MB$ (hipótesis)
4. $m(\sphericalangle MAB) = m(\sphericalangle ABM) = \beta$ (ángulos basales del triángulo isósceles)
5. $2\alpha + 2\beta = 180°$ (suma ángulos interiores del triángulo ABC)
6. Luego $\alpha + \beta = 90°$. Por lo tanto, $m(\sphericalangle CAB) = 90°$.

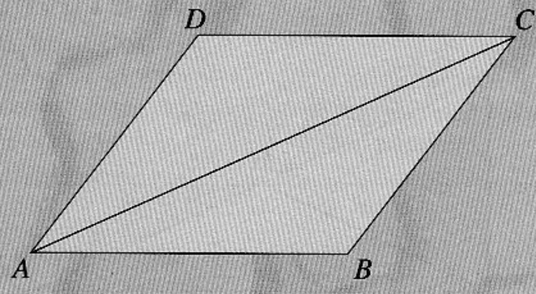
4. **Hipótesis:**

$ABCD$ rombo

$\overline{AC}$ diagonal

Tesis:

$\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BAC$



Demostración:

1. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ (hipótesis)
2. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ (hipótesis)} \\ \overline{AC} \cong \overline{CA} \text{ (lado común)} \\ \overline{BC} \cong \overline{DA} \text{ (hipótesis)} \end{cases}\right\} \text{(L.L.L)}$$

3. $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BCA$ (elementos homólogos de triángulos congruentes)
4. $\measuredangle BCA \cong \measuredangle BAC$ (ángulos basales del triángulo isósceles)
5. Por lo tanto, $\measuredangle DAC \cong \measuredangle BAC$

5. **Hipótesis:**

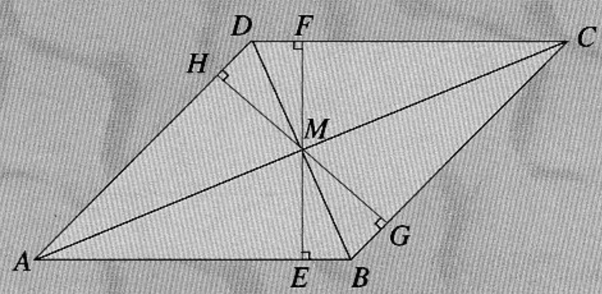
$ABCD$ rombo

M punto de intersección de las diagonales

$\overline{ME}, \overline{MF}, \overline{MG}, \overline{MH}$ distancias de M a los cuatro lados

Tesis:

$\overline{ME} \cong \overline{MF} \cong \overline{MG} \cong \overline{MH}$



Demostración:

1. $\triangle EBM \cong \triangle GBM$, porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{BM} \cong \overline{BM} & \text{(lado común)} \\ \measuredangle MEB \cong \measuredangle MGB & \text{(miden 90°)} \\ \measuredangle EBM \cong \measuredangle GBM & \text{(diagonal del rombo es bisectriz)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$

2. $\triangle GBM \cong \triangle HDM$, porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{BM} \cong \overline{DM} & \text{(diagonales se dimidian)} \\ \measuredangle BGM \cong \measuredangle DHM & \text{(miden 90°)} \\ \measuredangle GMB \cong \measuredangle HMD & \text{(diagonal del rombo es bisectriz)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$

3. $\triangle HDM \cong \triangle FDM$, porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{MD} \cong \overline{MD} & \text{(lado común)} \\ \measuredangle DHM \cong \measuredangle DFM & \text{(miden 90°)} \\ \measuredangle HDM \cong \measuredangle FDM & \text{(diagonal del rombo es bisectriz)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$

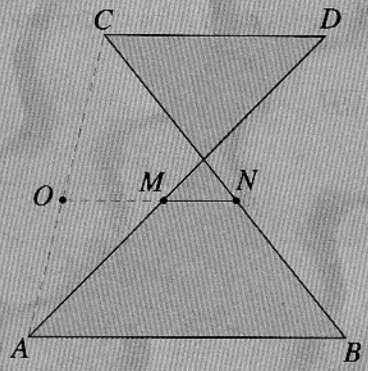
4. Luego $\triangle EBM \cong \triangle GBM \cong \triangle HDM \cong \triangle FDM$
5. Además, $\overline{ME} \cong \overline{MG} \cong \overline{MH} \cong \overline{MF}$

6. **Hipótesis:**

$ABCD$ trapecio no convexo
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
M y N puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

Tesis:

$MN = \dfrac{AB - CD}{2}$



Demostración:

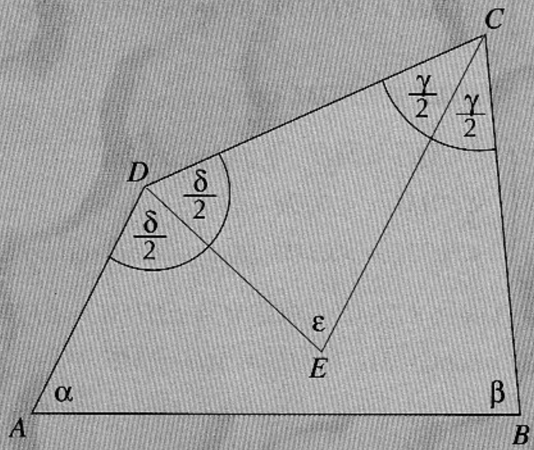
1. Unimos A con C.
2. Ubicamos O punto medio de $\overline{AC}$.
3. M, N, O colineales
4. $OM = \dfrac{1}{2}\, CD$ (mediana de triángulo CDA)
5. $ON = \dfrac{1}{2}\, AB$ (mediana de triángulo ABC)
6. Restando miembro a miembro:
   $ON - OM = \dfrac{1}{2}\,(AB - CD)$
7. $MN = \dfrac{AB - CD}{2}$

7. **Hipótesis:**

$ABCD$ cuadrilátero
$\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{CE}$ bisectrices
$m(\measuredangle DEC) = \varepsilon$
$m(\measuredangle DAB) = \alpha$
$m(\measuredangle CBA) = \beta$
$m(\measuredangle BCD) = \gamma$
$m(\measuredangle CDA) = \delta$

Tesis:

$\varepsilon = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$



Demostración:

1. $\varepsilon + \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$ (ángulos interiores del triángulo DEC)
2. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (ángulos interiores del cuadrilátero)
3. Luego, $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\left(\varepsilon + \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$
4. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\varepsilon + \delta + \gamma$
3. $\varepsilon = \frac{\delta + \beta}{2}$

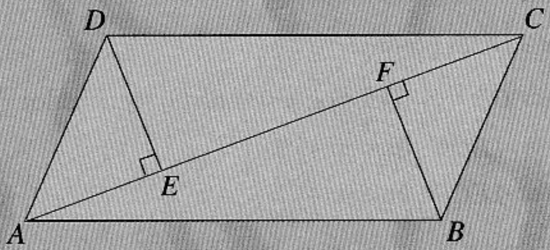
8 a 11. Hacer las construcciones (Ver Ejercicios resueltos nº 14 a 17)

12. **Hipótesis:**

$ABCD$ paralelogramo

$\overline{AC}$ diagonal

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BF} \perp \overline{AC}$



Tesis:

$DE = BF$

Demostración:

1. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, porque:

$$\left.\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{CA} & \text{(Lado común)} \\ \overline{BC} \cong \overline{DA} & \text{(Lados opuestos de un paralelogramo)} \\ \overline{AB} \cong \overline{CD} & \text{(Lados opuestos de un paralelogramo)} \end{cases}\right\} \text{(L.L.L)}$$

2. $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle CDA}$
3. $\frac{AC \cdot DE}{2} = \frac{AC \cdot BF}{2}$
4. $DE = BF$

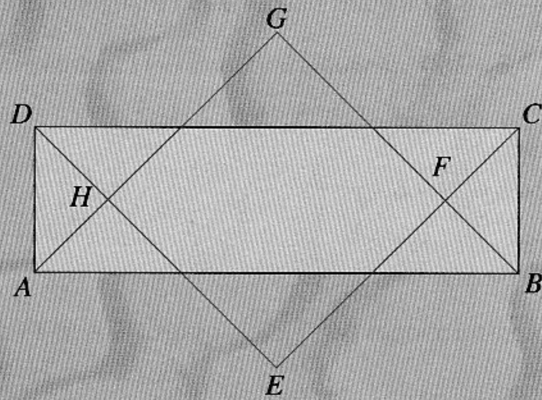
13. **Hipótesis:**

$ABCD$ rectángulo

$\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{DH}$ bisectrices

$\overline{AH} \cap \overline{BF} = \{G\}$; $\overline{CF} \cap \overline{DH} = \{E\}$

Tesis:
$EFGH$ cuadrado



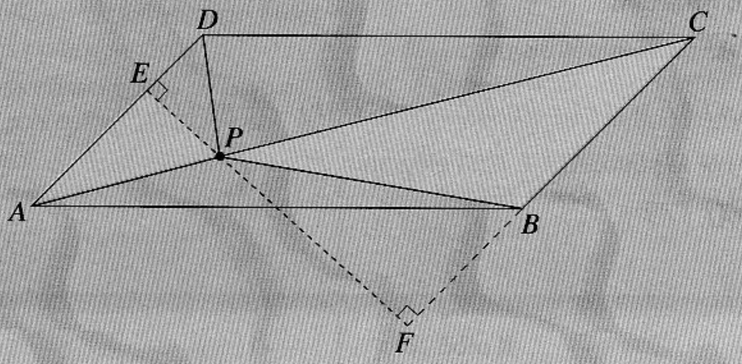
Demostración:

1. En $\triangle DHA$
   $m(\measuredangle DHA) = 90°$, porque:
   $m(\measuredangle HDA) = m(\measuredangle HAD) = 45°$
2. $\triangle ABG \cong \triangle DCE$, porque:
   $$\left.\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{CD} & \text{(lados opuestos de un rectángulo)} \\ \measuredangle GAB \cong \measuredangle EDC & \text{(miden 45°)} \\ \measuredangle GBA \cong \measuredangle ECD & \text{(miden 45°)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$
3. $\triangle ABG$ y $\triangle DCE$ isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$
4. Luego, $AG = BG = DE = CE$
5. $\triangle DAH \cong \triangle BCF$, porque:
   $$\left.\begin{cases} \overline{DA} \cong \overline{BC} & \text{(lados opuestos de un rectángulo)} \\ \measuredangle ADH \cong \measuredangle CBF & \text{(miden 45°)} \\ \measuredangle HAD \cong \measuredangle FCB & \text{(miden 45°)} \end{cases}\right\} \text{(A.L.A)}$$
6. $\triangle DAH$ y $\triangle BCF$ son isósceles de bases $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$
7. Luego $AH = BF = DH = CF$
8. De 4 y 7, $GH = GF = EH = EF$
9. De 1 y 8, $EFGH$ es cuadrado (tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos rectos)

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; romboide
15. 222 m^2
16. 4 m^2
17. $3a^2$ m^2

18. Hipótesis:

$ABCD$ paralelogramo
P punto del interior



Tesis:

$A_{(\triangle APD)} + A_{(\triangle BPC)} = \frac{1}{2} A_{(ABCD)}$

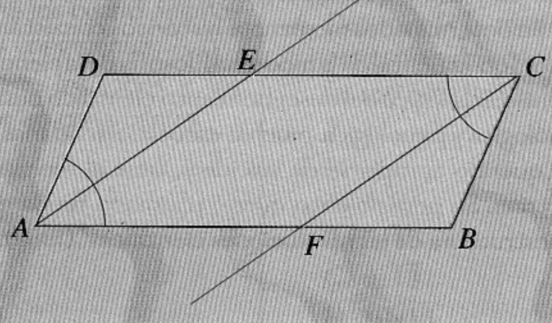
Demostración:

1. Por P se traza $\overline{EF} \perp \overline{AD}$ y $\overline{EF} \perp \overline{BC}$
2. Luego: $A_{(ABCD)} = BC \cdot EF$
3. $A_{(\triangle APD)} = \frac{1}{2} AD \cdot EP$
4. $A_{(\triangle BPC)} = \frac{1}{2} BC \cdot PF$
5. $AD = BC$ (lados opuestos de un paralelogramo)
6. $A_{(\triangle APD)} + A_{(\triangle BPC)} = \frac{1}{2} BC(EP + PF) = \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{1}{2} A_{(ABCD)}$

19. Hacer la construcción (Ver Ejercicios resueltos N° 14 a 17)

20. Hipótesis:

$ABCD$ paralelogramo
$\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{CF}$ bisectrices



Tesis:
$\overline{AE} \parallel \overline{CF}$

Demostración:

1. $\overline{AF} \parallel \overline{CE}$ (hipótesis)
2. $\sphericalangle EAF \cong \sphericalangle FCE$ (miden $\frac{1}{2}\, m(\sphericalangle DAF) = \frac{1}{2}\, m(\sphericalangle DCB)$)
3. Por lo tanto, $AFCE$ paralelogramo
4. $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$

THOMAS S. KUHN

(Cincinnati, EE UU, 1922-Cambridge, id., 1997)

Filósofo de la ciencia estadounidense. Fue profesor en la Universidad de Princeton y desde 1979 en Massachusetts. Influido por el pensamiento de historiadores como Koyré o filósofos como Quine, consideró que el estudio histórico es necesario para entender cómo se han desarrollado las teorías científicas y para conocer por qué en ciertos momentos unas teorías han sido aceptadas antes que otras. Para Kuhn la ciencia es elaborada en el seno de una comunidad científica y no individualmente; la comunidad sirve de base a los desarrollos científicos mediante la elaboración o asunción de un paradigma del cual se derivan reglas que fijan las regularidades. El paradigma es un contexto de validez respecto del cual la investigación procede en una forma similar a la solución de acertijos. Cuando un paradigma ha sido establecido por el colectivo de científicos al que sirve, los fundamentos del mismo nunca son puestos en duda. Sin embargo, y dado que los paradigmas pierden validez históricamente, Kuhn explica que cuando se multiplican las anomalías (cuando son más los casos en que no se da lo previsto que aquellos en los que sí se cumple) hasta el punto de que ya no se las puede obviar, el paradigma queda inservible, de modo que se hace necesaria una nueva forma de validez. La naturaleza del conocimiento científico tal y como queda descrito por Kuhn hace comprensible el hecho de que en determinados momentos históricos coexistan dos o más paradigmas. Autor fundamental de la moderna filosofía de la ciencia, y uno de los primeros en analizar la lógica del descubrimiento científico basándose en su dimensión sociológica y psicológica, muchas escuelas partidarias del relativismo cultural han querido apropiarse de sus ideas, pese al rechazo de Kuhn hacia dicha doctrina. Su pensamiento quedó plasmado fundamentalmente en la obra "La estructura de las revoluciones científicas" (1962).

Prueba de selección múltiple

1. De las afirmaciones:

I. Todo paralelogramo tiene congruentes sus lados opuestos.

II. Todo paralelogramo tiene congruentes sus ángulos opuestos.

III. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son complementarios.

Son verdaderas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. I y II
E. I y III

2. De las afirmaciones:

I. Las diagonales de un rombo bisectan los ángulos cuyos vértices unen.

II. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

III. En todo paralelogramo las diagonales se dividen mutuamente en partes congruentes.

Son verdaderas:

A. Sólo I
B. Sólo I y II
C. Sólo I y III
D. Sólo II y III
E. I, II y III

3. De las afirmaciones:

I. Un rectángulo tiene los cuatro ángulos congruentes y los lados contiguos distintos.

II. Un cuadrado tiene los cuatro ángulos y los cuatro lados congruentes.

III. Un romboide tiene los lados y los ángulos contiguos no congruentes.

Son verdaderas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

4. De las siguientes afirmaciones:

I. El número total de diagonales que se pueden trazar en un cuadrilátero es dos.

II. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es equivalente a la de 4 ángulos obtusos.

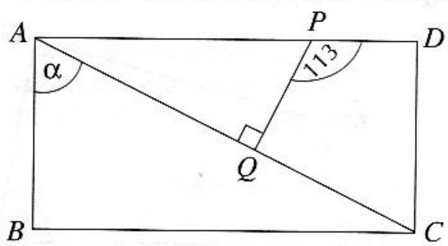
III. Desde un vértice de un cuadrilátero sólo se puede trazar una diagonal.

Son falsas:

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. Sólo I y III

5. En el rectángulo $ABCD$, $\overline{AC}$ diagonal y $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$.

Si $\measuredangle DPQ = 113°$, determinar el valor de α.

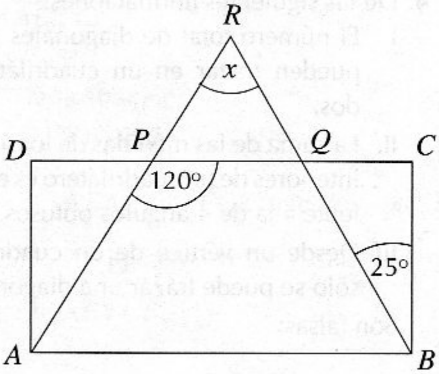


A. 23°
B. 43°
C. 67°
D. 76°
E. 113°

6. Determinar la medida de la diagonal de un rectángulo cuyo perímetro es 100 cm y las medidas de sus lados están en la razón 3 : 2.

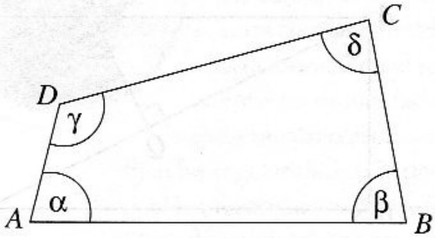
A. $4\sqrt{13}$
B. $6\sqrt{13}$
C. $8\sqrt{13}$
D. $10\sqrt{13}$
E. No se puede determinar

7. Si $ABCD$ es un rectángulo, determinar el valor de x en la figura.



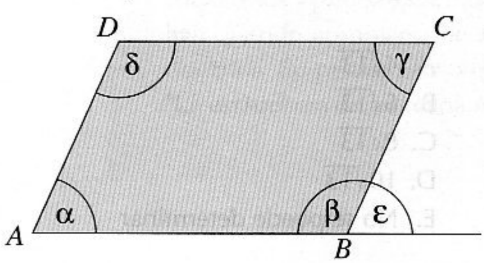
A. 55°
B. 60°
C. 65°
D. 70°
E. 75°

8. En el trapezoide $ABCD$, determinar el valor de γ sabiendo que:
$\alpha + \beta + \delta = 260°$



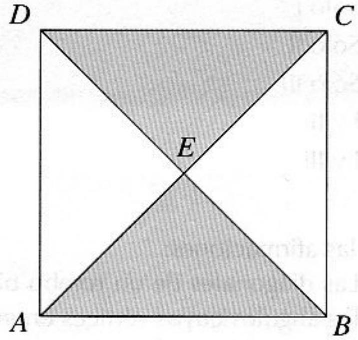
A. 130°
B. 120°
C. 110°
D. 100°
E. Faltan datos

9. En el paralelogramo $ABCD$, determinar el valor de $\alpha + \beta + \delta$ sabiendo que:
$\varepsilon = 70°$



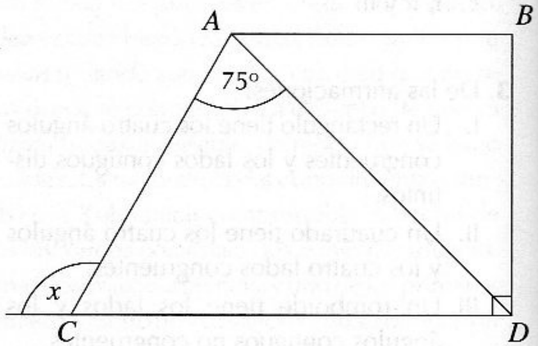
A. 110°
B. 190°
C. 270°
D. 290°
E. 360°

10. En el cuadrado de la figura, $AE = 3$ cm. Entonces el perímetro de la parte sombreada es:



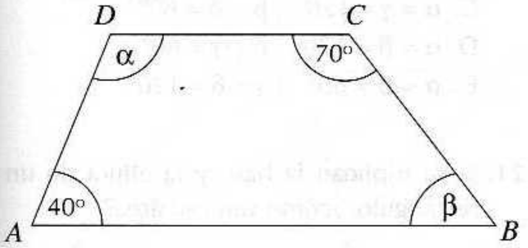
A. $(3\sqrt{2} + 9)$ cm
B. $(6\sqrt{2} + 12)$ cm
C. $3\sqrt{2}$ cm
D. $12\sqrt{2}$ cm
E. $18\sqrt{2}$ cm

11. En la figura, $\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo en D. El valor de x es:



A. 120°
B. 100°
C. 90°
D. 75°
E. 40°

12. En el trapecio escaleno $ABCD$ de la figura, determinar los valores de α y β.

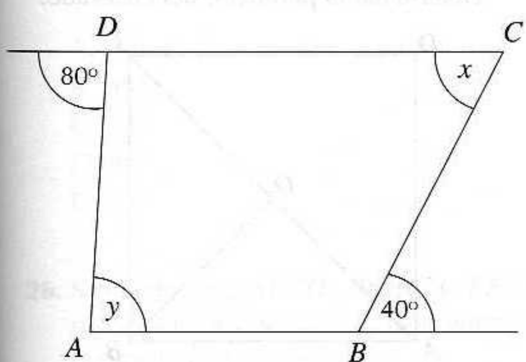


A. $\alpha = 120°$ y $\beta = 80°$
B. $\alpha = 140°$ y $\beta = 110°$
C. $\alpha = 90°$ y $\beta = 120°$
D. $\alpha = 70°$ y $\beta = 40°$
E. $\alpha = 80°$ y $\beta = 120°$

13. Calcular el área de un rombo si su lado mide 5 cm y una de sus diagonales mide 6 cm.

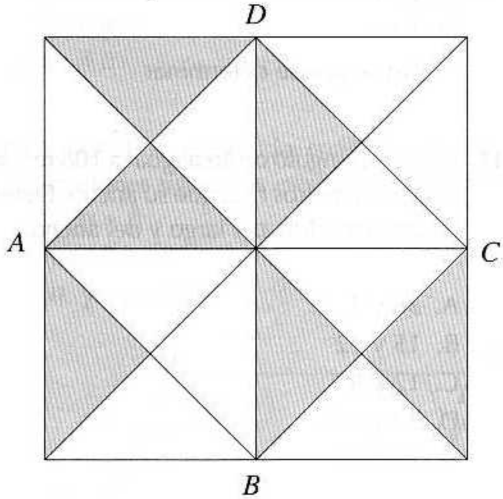
A. 60 cm^2
B. 48 cm^2
C. 36 cm^2
D. 30 cm^2
E. 24 cm^2

14. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, entonces el valor de $x + y$ es:



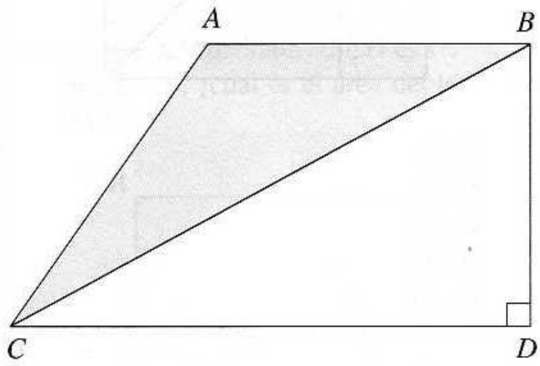
A. 120°
B. 140°
C. 180°
D. 200°
E. 360°

15. En el cuadrado de la figura, A, B, C y D son puntos medios de sus lados. ¿Qué porcentaje del total representa el área no sombreada?



A. 37,5%
B. 45,5%
C. 50,5%
D. 62.5%
E. 75%

16. Calcular el perímetro de la región sombreada sabiendo que el área del trapecio $ABDC$ es 18 m^2; $AB = 3$m, $CD = 6$m y $AC = 5$m.



A. $(8 + 2\sqrt{13})$ m
B. $(10 + \sqrt{13})$ m
C. $(10 - 2\sqrt{13})$ m
D. $(8 - 2\sqrt{13})$ m
E. $(2\sqrt{13} - 7)$ m

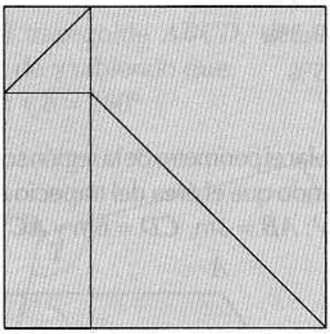
17. Calcular la medida de la diagonal menor de un rombo sabiendo que su área es 6 m^2 y que la diferencia entre las medidas de las diagonales es 4 m.

A. 10 m
B. 6 m
C. 2 m
D. 1 m
E. No se puede determinar

18. En un rectángulo de área igual a 108 m^2, su largo es 3 metros más que su ancho. Determinar la medida del largo y del ancho.

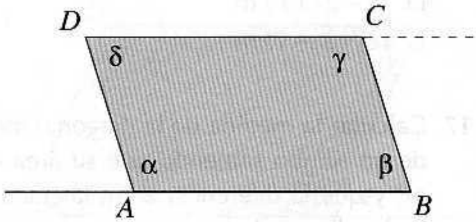
A. 36 y 3
B. 15 y 12
C. 12 y 9
D. 24 y 4,5
E. 15, 18

19. En la siguiente figura se pueden contar x cuadriláteros. Determinar x.



A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
E. 10

20. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura, el ángulo exterior en C es $\frac{1}{2}$ del ángulo interior en C. Los cuatro ángulos del paralelogramo miden:



A. $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 90^\circ$
B. $\alpha = \delta = 60^\circ$; $\beta = \gamma = 120^\circ$
C. $\alpha = \gamma = 120^\circ$; $\beta = \delta = 60^\circ$
D. $\alpha = \beta = 120^\circ$; $\delta = \gamma = 60^\circ$
E. $\alpha = \beta = 60^\circ$; $\gamma = \delta = 120^\circ$

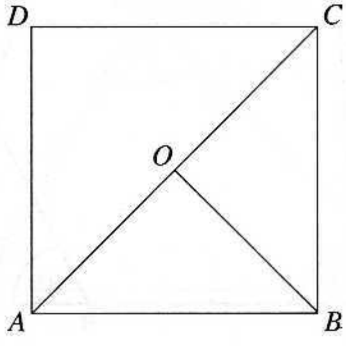
21. Si se triplican la base y la altura de un rectángulo, ¿cómo varía su área?

A. Se duplica
B. Se triplica
C. Aumenta a 4 veces
D. Aumenta a 9 veces
E. Disminuye

22. Un cuadrado es equivalente (tiene igual área) con un rectángulo cuyos lados miden 36 u y 16 u. Determinar la medida del lado del cuadrado y de su perímetro:

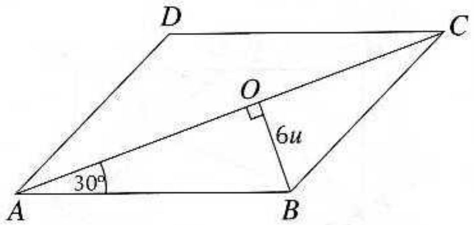
A. $l = 12\,u$; $P = 48\,u$
B. $l = 36\,u$; $P = 144\,u$
C. $l = 24\,u$; $P = 96\,u$
D. $l = 10\,u$; $P = 40\,u$
E. $l = 15\,u$; $P = 60\,u$

23. En el cuadrado de la figura, O es punto medio de la diagonal AC. Si $OB = 4$, Determinar el perímetro del cuadrado.



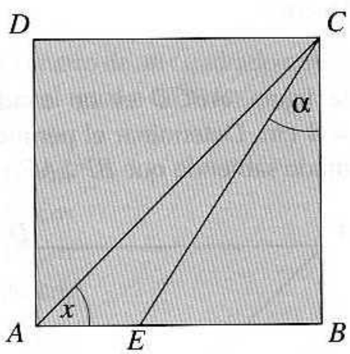
A. $12\sqrt{2}$
B. $16\sqrt{2}$
C. $18\sqrt{2}$
D. $20\sqrt{2}$
E. $4\sqrt{2}$

24. En el rombo de la figura, $BO = 6\ u$. Si $m(\sphericalangle CAB) = 30°$, determinar el perímetro del rombo.



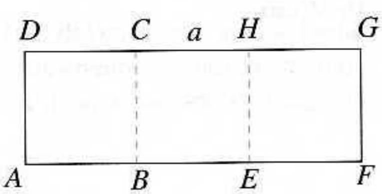
A. 12 u
B. 20 u
C. 24 u
D. 36 u
E. 48 u

25. En el cuadrado de la figura, $\alpha = 37°$. ¿Cuánto mide el ángulo x?



A. 30°
B. 45°
C. 53°
D. 60°
E. 74°

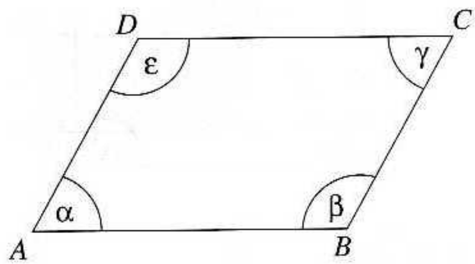
26. Sabiendo que $ABCD$, $BEHC$ y $EFGH$ son cuadrados de lado a, determinar el perímetro de la figura.



A. 10 a
B. 8 a
C. 9 a
D. 6 a
E. 4 a

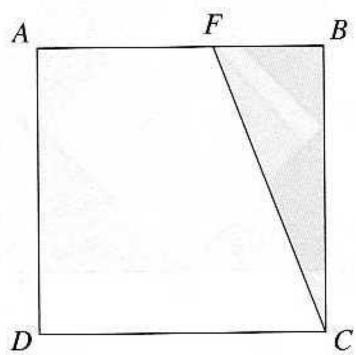
27. Si $ABCD$ es romboide, cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) verdadera(s):

I. $\alpha = \beta$
II. $AB = DC$
III. $\gamma + \varepsilon = 180°$



A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo I y II
D. Sólo II y III
E. I, II y III

28. El área del cuadrado $ABCD$ es x^2.
Si $AF = y$, ¿cuál es el área del triángulo FCB?



A. $\dfrac{x^2 - xy}{2}$

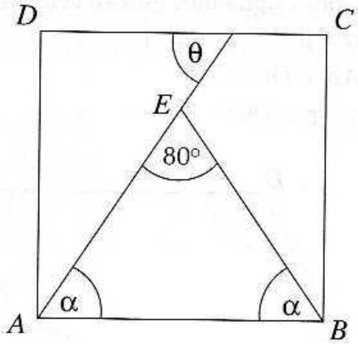
B. $\dfrac{y(x - y)}{2}$

C. $\dfrac{y^2 - xy}{2}$

D. $\frac{(y-x)y^2}{2}$

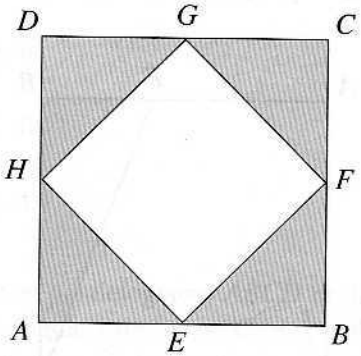
E. $\frac{x(y-x)}{2}$

29. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y ABE un triángulo isósceles. Determinar el valor de θ.



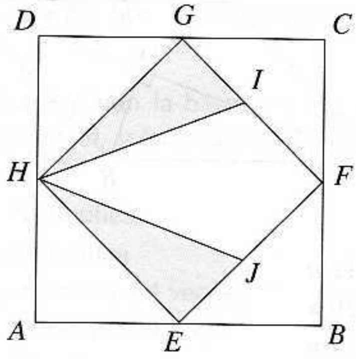
A. 40°
B. 50°
C. 80°
D. 100°
E. 120°

30. En el cuadrado $ABCD$, E, F, G y H son puntos medios de sus lados. Si su área es 16 m², determinar el área de la parte sombreada.



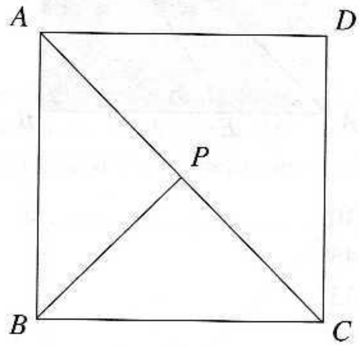
A. 6 m²
B. 8 m²
C. 9 m²
D. 10 m²
E. 14 m²

31. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 8 cm. Si E, F, G, H, I y J son puntos medios, determinar el área de la parte sombreada.



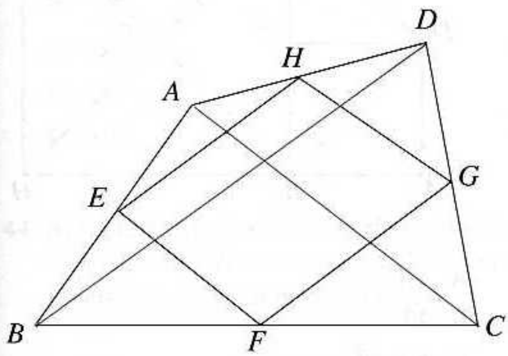
A. 8 cm²
B. 9 cm²
C. 10 cm²
D. 12 cm²
E. 16 cm²

32. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y $BP = 4$ cm. Determinar el perímetro del cuadrado sabiendo que $BP \perp AC$.



A. $18\sqrt{2}$ cm
B. $16\sqrt{2}$ cm
C. $14\sqrt{2}$ cm
D. $12\sqrt{2}$ cm
E. $10\sqrt{2}$ cm

33. En el cuadrilátero $ABCD$, $AC + BD = 30$ m. Si E, F, G y H son puntos medios, determinar el perímetro del cuadrilátero $EFGH$.



A. 10 m
B. 15 m
C. 20 m
D. 30 m
E. 40 m

34. El perímetro de un cuadrado que tiene una diagonal igual a $5\sqrt{2}$ es:

A. 10 cm
B. 16 cm
C. 18 cm
D. 20 cm
E. 26 cm

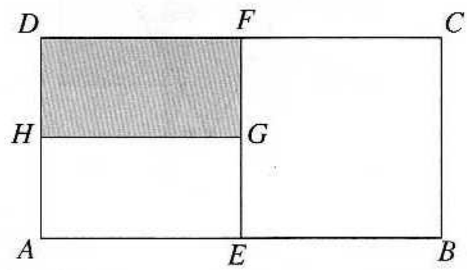
35. El área del trapecio que tiene bases de 12 y 7 metros, respectivamente, y cuya altura mide 4 m es:

A. 26 m^2
B. 30 m^2
C. 38 m^2
D. 40 m^2
E. 168 m^2

36. El área del cuadrado que se forma al unir sucesivamente los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 20 cm es:

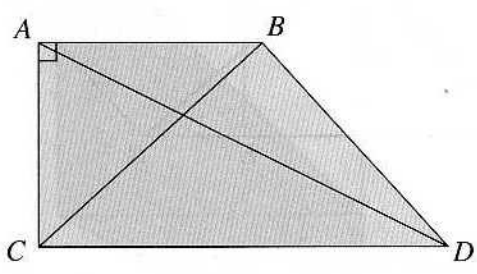
A. 100 m^2
B. 150 m^2
C. 200 m^2
D. 300 m^2
E. 400 m^2

37. Si $ABCD$ es un rectángulo cuyo perímetro es 18 cm, $EBCF$ es un cuadrado de lado 3 cm y G y H son puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, entonces el área de la región sombreada es:



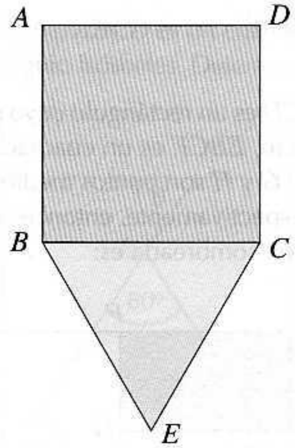
A. 2,5 cm^2
B. 3 cm^2
C. 4,5 cm^2
D. 5 cm^2
E. 9 cm^2

38. En el trapecio rectángulo de la figura, $BC = 3\sqrt{2}$; $AD = 3\sqrt{5}$ y $AC = 3$. El área del trapecio es:



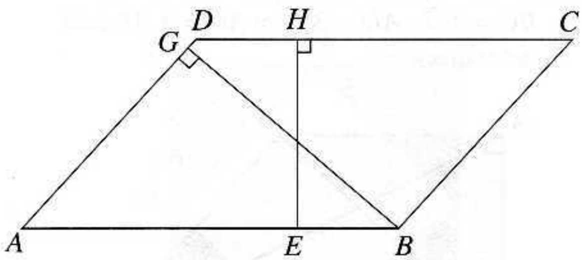
A. 10 cm^2
B. 13,5 cm^2
C. 18 cm^2
D. 18,5 cm^2
E. 36 cm^2

39. Si $ABCD$ es un cuadrado y BCE un triángulo equilátero donde $AC = 4$ cm, determinar el área total de la figura.



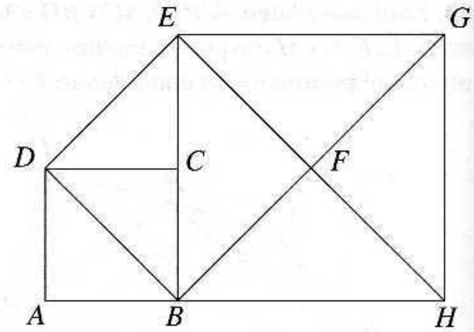
A. $2(4 + \sqrt{3})$ cm²
B. $2(5 + \sqrt{3})$ cm²
C. $2(6 + \sqrt{3})$ cm²
D. $2(4 - \sqrt{3})$ cm²
E. $2(5 - \sqrt{3})$ cm²

40. En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo. Determinar AD si $AB = 20\ u$, $EH = 9\ u$ y $BG = 12\ u$.



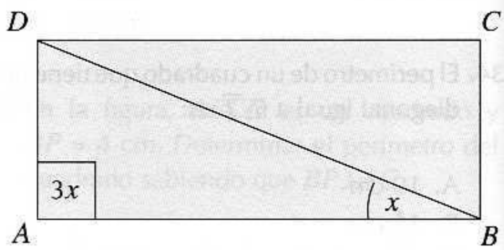
A. 5 u
B. 10 u
C. 15 u
D. 20 u
E. No se puede determinar

41. $ABCD$ es un cuadrado de lado 1 cm; $BFED$ es un cuadrado de lado BD, y $BHGE$ es un cuadrado de lado BE. Determinar el perímetro de la figura $AHGED$.



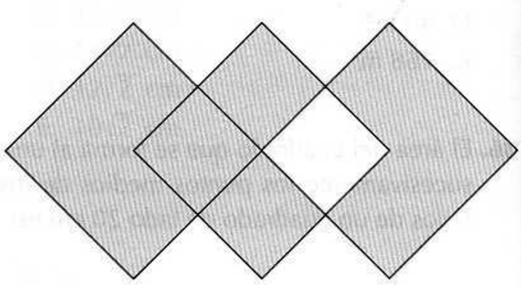
A. 10
B. 11
C. $8 + \sqrt{2}$
D. $8 + \sqrt{3}$
E. $10 + \sqrt{2}$

42. $ABCD$ es un paralelogramo rectangular. Hallar la medida del ∢ADB.



A. 30°
B. 45°
C. 55°
D. 60°
E. 90°

43. En la figura hay tres cuadrados congruentes de lado b. El área de la región sombreada es:



A. $\frac{9b^2}{4}$

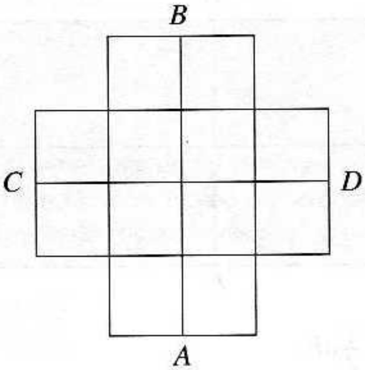
B. $\frac{5b^2}{2}$

C. $3b^2$

D. $4b^2$

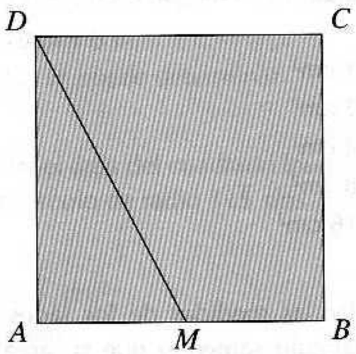
E. $9b^2$

44. AB y CD son ejes de simetría de la cruz dibujada. Si AB = 10 cm y CD = 8 cm, determinar el perímetro de la cruz.



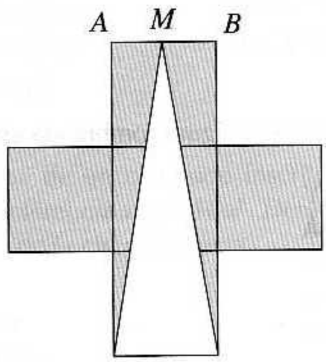
A. 18 cm
B. 26 cm
C. 28 cm
D. 36 cm
E. 38 cm

45. $ABCD$ es un cuadrado y M es el punto medio del lado $\overline{AB}$. Si el área del triángulo ADM es 4 cm², hallar el área del cuadrado.



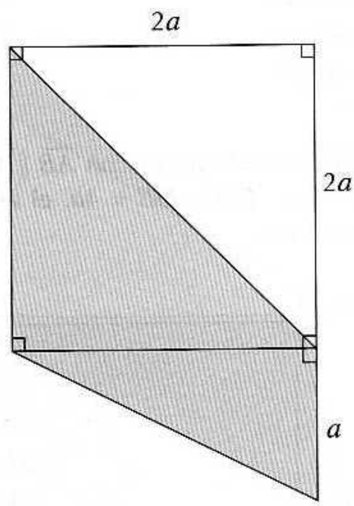
A. 4 cm²
B. 8 cm²
C. 12 cm²
D. 16 cm²
E. 18 cm²

46. En la figura hay cinco cuadrados congruentes de lado 2 cm. Si M es punto medio de AB, determinar el área de la parte sombreada.



A. 64 m²
B. 48 cm²
C. 20 cm²
D. 16 cm²
E. 14 cm²

47. En la figura, el área de la región sombreada es:



A. a^2

B. $2a^2$

C. $\frac{3a^2}{2}$

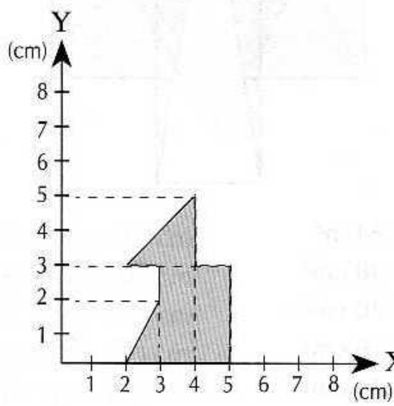
D. $3a^2$

E. $\frac{4a^2}{3}$

48. Si el área de un cuadrado es 81 cm², entonces la suma de las medidas de sus diagonales es:

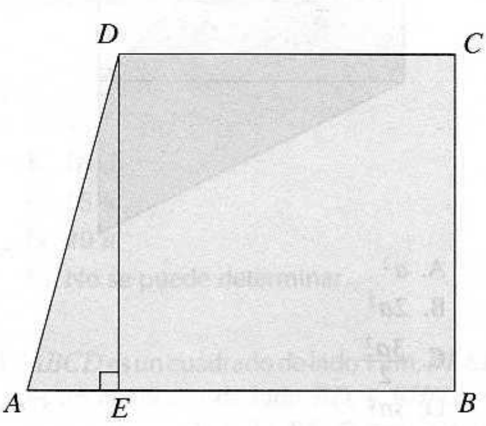
A. $6\sqrt{2}$ cm
B. 9 cm
C. $9\sqrt{2}$ cm
D. $12\sqrt{2}$ cm
E. $18\sqrt{2}$ cm

49. El área de la figura sombreada es:



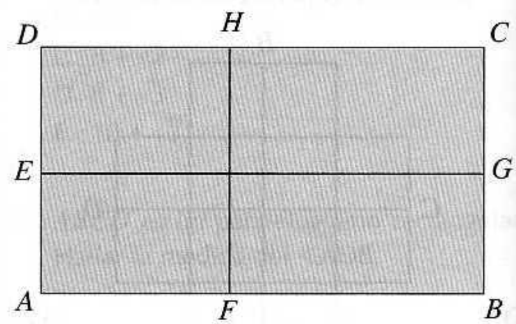
A. 9 cm²
B. 10 cm²
C. 16 cm²
D. 24 cm²
E. 36 cm²

50. $ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Si $AB = 5a$ y $CD = DE = 4a$, el área del trapecio es:



A. $13a^2$
B. $16a^2$
C. $18a^2$
D. $20a^2$
E. $25a^2$

51. El área del rectángulo $ABCD$ es ab. Si $FB = \frac{3}{5}AB$, $AE = \frac{1}{2}AD$ y $\overline{EG} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{FH} \parallel \overline{AD}$, la medida del área del rectángulo $AFHD$ es:



A. $\frac{1}{2}ab$
B. $\frac{4}{5}ab$
C. $\frac{2}{5}ab$
D. $\frac{3}{5}ab$
E. $\frac{1}{3}ab$

52. Si el perímetro de un cuadrado es 8 cm, el área del triángulo formado por dos lados contiguos y la diagonal es:

A. 1 cm²
B. 2 cm²
C. 4 cm²
D. 8 cm²
E. 16 cm²

53. Hallar las medidas de los lados de un rectángulo sabiendo que su área es 28 cm² y el largo es de 3 unidades más que el ancho.

A. 7 y 4
B. 13 y 10
C. 28 y 1
D. 8 y 3
E. No se puede determinar

54. El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 8 m es:

A. 64 m^2
B. 128 m^2
C. $64\sqrt{2}$ m^2
D. $128\sqrt{2}$ m^2
E. 32 m^2

55. Calcular el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 6 sabiendo que uno de sus lados es igual al radio.

A. $36\sqrt{2}$
B. $12\sqrt{3}$
C. $25\sqrt{3}$
D. $36\sqrt{3}$
E. $12\sqrt{2}$

56. Un rectángulo tiene 144 m^2 de área y 52 m de perímetro. Hallar la medida de sus lados.

A. 48 m y 3 m
B. 12 m y 12 m
C. 24 m y 6 m
D. 18 m y 8 m
E. No se puede determinar

57. Hallar el área del cuadrado inscrito en un semicírculo de radio $3\sqrt{5}$ dm.

A. $3\sqrt{5}$ dm^2
B. 6 dm^2
C. 18 dm^2
D. 20 dm^2
E. 36 dm^2

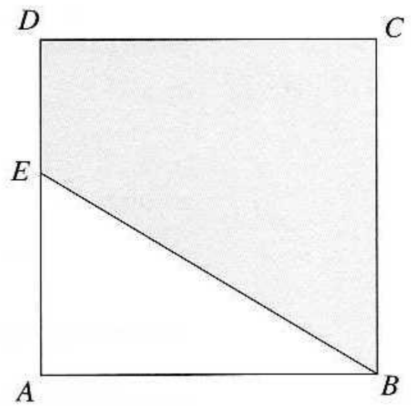
58. La base de un rectángulo mide 10 m. Calcular su área si el segmento que une el punto medio de la base con un vértice superior mide $3\sqrt{5}$ m.

A. $2\sqrt{5}$ m^2
B. $3\sqrt{5}$ m^2
C. $30\sqrt{5}$ m^2
D. $20\sqrt{5}$ m^2
E. 30 m^2

59. El área de un cuadrado inscrito en una circunferencia mide $18u^2$. Determinar el radio de la circunferencia.

A. $6u$
B. $3\sqrt{2}\,u$
C. $18u$
D. $3u$
E. $1{,}5u$

60. En el cuadrado de la figura, $AB = 15$ y $AE = 8$. Determinar el área de la parte sombreada de la figura.



A. 225
B. 165
C. 120
D. 60
E. Ninguna de las anteriores

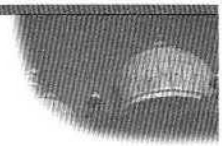
Solvciones

1. D	11. A	21. D	31. E	41. C	51. C
2. E	12. B	22. C	32. B	42. D	52. B
3. E	13. E	23. B	33. D	43. A	53. A
4. E	14. A	24. E	34. D	44. D	54. B
5. C	15. D	25. B	35. C	45. D	55. D
6. D	16. A	26. B	36. C	46. E	56. D
7. A	17. C	27. D	37. C	47. D	57. E
8. D	18. C	28. A	38. B	48. E	58. D
9. D	19. D	29. B	39. A	49. A	59. D
10. B	20. C	30. B	40. E	50. C	60. B

CAPÍTULO 6

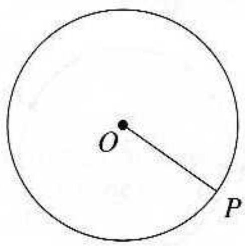
Circunferencia y círculo

Elementos y propiedades 6.1



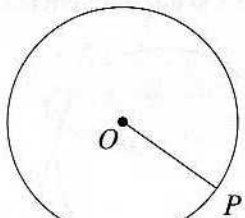
La circunferencia y sus elementos

Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se llama **centro de la circunferencia**.



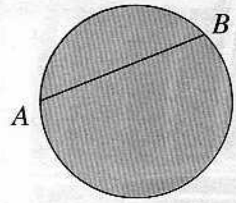
La figura muestra una circunferencia de centro O. P es un punto de ella.

Un **radio** es un segmento determinado por el centro de la circunferencia y un punto cualquiera de ella. El segmento $\overline{OP}$ es un radio de la circunferencia.

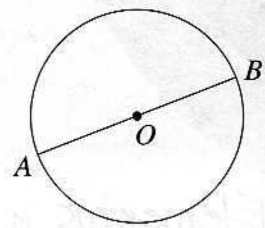


Todos los radios tienen igual medida, denotada habitualmente por r.

Una **cuerda** es un segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El segmento $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia.



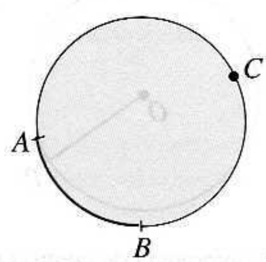
Un **diámetro** es una cuerda que contiene al centro de la circunferencia. El segmento $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia.



Un **arco** de circunferencia es una parte continua de ella. La "porción" $\widehat{AB}$ representa un arco de circunferencia.

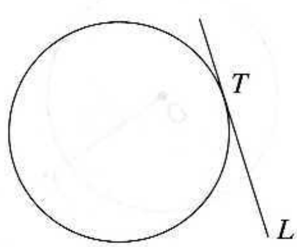
También los puntos A y B determinan otro arco de la circunferencia, que es la diferencia entre la circunferencia completa y el arco $\widehat{AB}$. En la figura es $\widehat{ACB}$.

En general, al referirnos a un arco que comprende un ángulo mayor de 180°, usaremos tres puntos, para diferenciarlo del arco que comprende al ángulo menor de 180°.

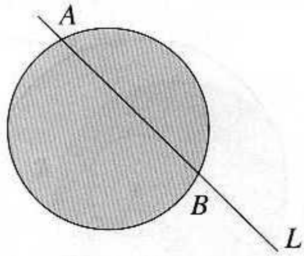


Una **recta tangente** a una circunferencia es una recta que la intersecta exactamente en un punto. El punto de intersección se llama punto de tangencia.

La recta L es tangente a la circunferencia en el punto T.



Una **recta secante** a una circunferencia es aquella que la intersecta exactamente en dos puntos.



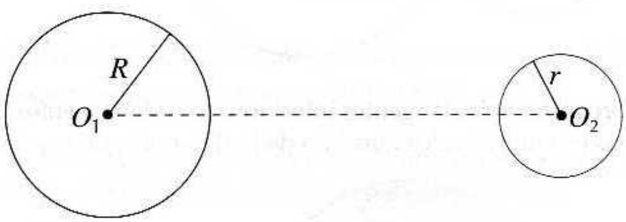
La recta L es secante a la circunferencia y los puntos de intersección son A y B.

Propiedades y posiciones relativas de dos circunferencias

Circunferencias sin puntos comunes

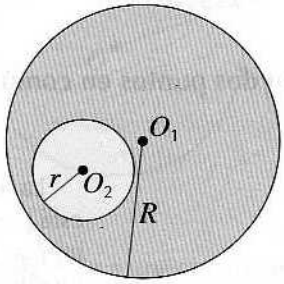
a) La distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.

$$\overline{O_1O_2} > R + r$$

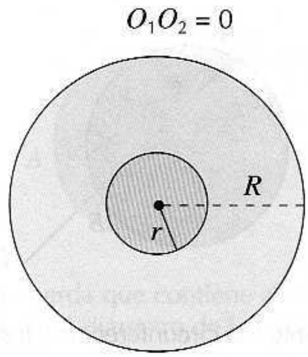


b) La distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios. La circunferencia de centro O_2 es interior a la circunferencia de centro O_1.

$$\overline{O_1O_2} < R - r$$

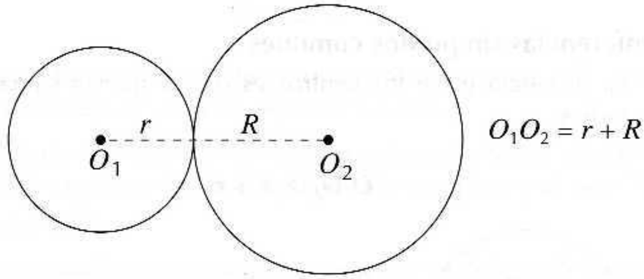


c) La distancia entre los centros es cero. En este caso las circunferencias se dicen **concéntricas**.

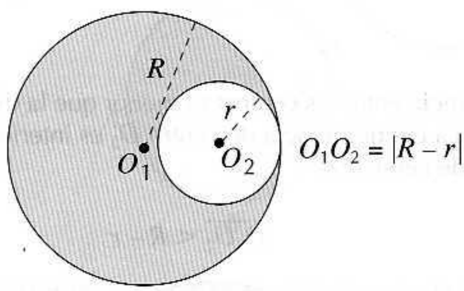


Circunferencias con un punto en común (o circunferencias tangentes)

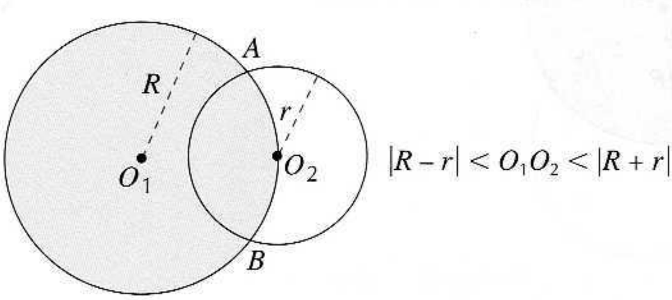
a) **Circunferencias tangentes exteriores**. La distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios.



b) **Circunferencias tangentes interiores**. La distancia entre sus centros es igual al valor absoluto de la diferencia de sus radios.



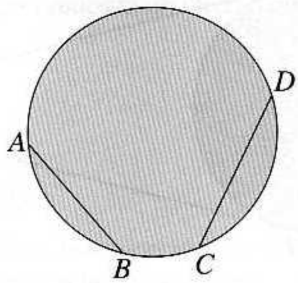
Circunferencias con dos puntos en común o circunferencias secantes



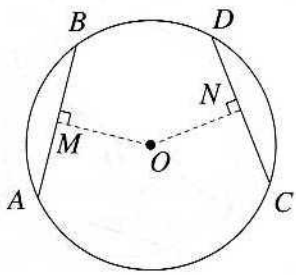
La distancia entre sus centros está comprendida entre la diferencia de sus radios y la suma de ellos, es decir, es mayor que la diferencia de los radios y menor que la suma de ellos.

Propiedades de la circunferencia y sus elementos

1. Si dos cuerdas de una circunferencia son congruentes, entonces los arcos determinados por ellas también lo son, y viceversa. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$.



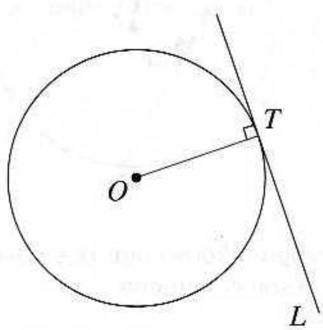
2. Si dos cuerdas de una circunferencia son congruentes, entonces ellas equidistan del centro.



Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y, además, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, entonces: $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

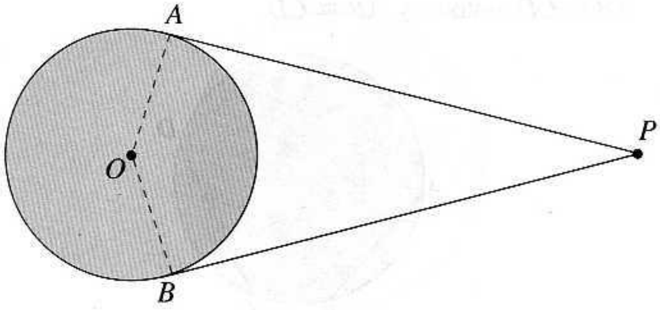
3. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia (ver página 255).

   Si $\overleftrightarrow{LT}$ es tangente a la circunferencia de centro O en el punto T, entonces, $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{LT}$.

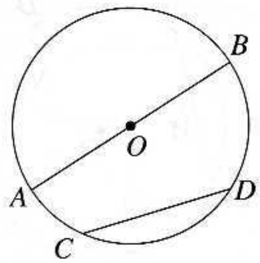


4. Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan rectas tangentes a ella, entonces los segmentos determinados por el punto exterior y los puntos de tangencia son congruentes.

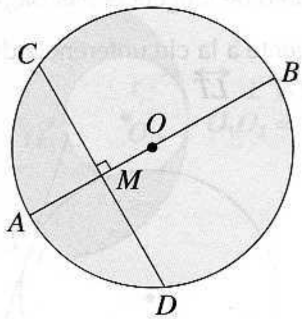
Si $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son rectas tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente, entonces $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.



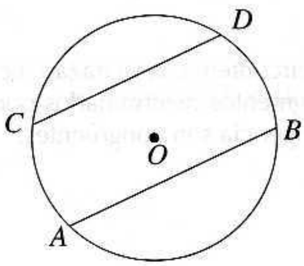
5. El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia. Si $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{CD}$ es una cuerda cualquiera (que no pasa por el centro), entonces AB es mayor que CD.



6. Todo diámetro perpendicular a una cuerda la dimidia y también dimidia los arcos determinados por ella. Si $\overline{AB}$ (diámetro) es perpendicular con $\overline{CD}$ (cuerda) y M es punto medio de $\overline{CD}$, entonces $\overline{CM} \cong \overline{DM}$ y $\overset{\frown}{CA} \cong \overset{\frown}{AD}$.



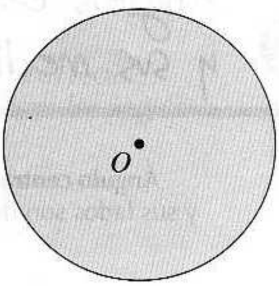
7. Los arcos comprendidos entre dos cuerdas paralelas en una circunferencia son congruentes.



Si $\overline{AB}$ es paralela con $\overline{CD}$, entonces $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$

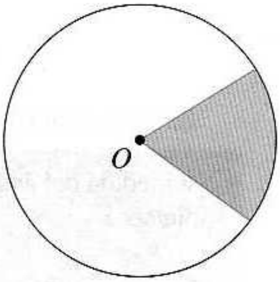
El círculo y sus elementos

Un círculo es el conjunto de puntos de un plano cuya distancia entre un punto fijo llamado centro y cualquier punto de él es menor o igual a un valor constante. Este valor constante es el radio del círculo. La figura muestra un círculo de centro O.

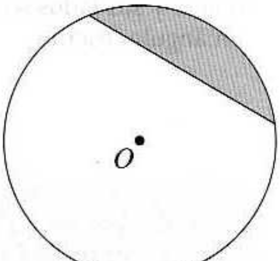


Elementos del círculo:

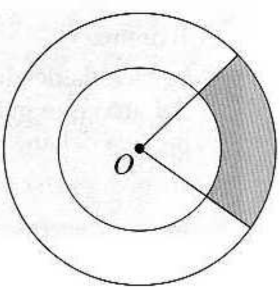
Un **sector circular** es una porción del círculo determinada por dos radios y el arco comprendido entre ellos.



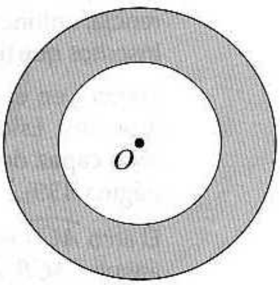
Un **segmento circular** es una porción del círculo determinada por una cuerda y uno de los arcos determinados por ella.



Un **trapecio circular** es la región del círculo determinada por dos circunferencias concéntricas y por dos radios.

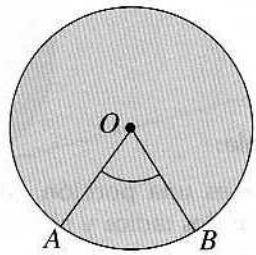


Un **anillo** (o **corona**) circular es una porción del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.



6.2 Ángulos en la circunferencia y sus medidas

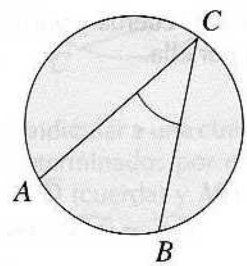
Ángulo central es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios. El ángulo AOB es un ángulo central.



La medida del ángulo central es igual a la medida del arco que interseca.

$$m(\measuredangle AOB) = m(\widehat{AB})$$

Ángulo inscrito es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas (o secantes) de ella. El ángulo ACB es un ángulo inscrito.



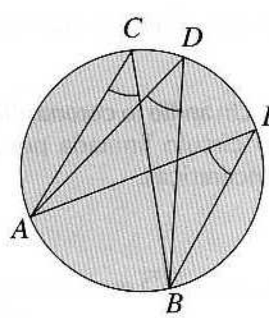
Teorema:
La medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco que interseca; por lo tanto, es igual a la mitad de la medida del ángulo central (Ver página 252).

$$m(\measuredangle ACB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$

Corolario 1:

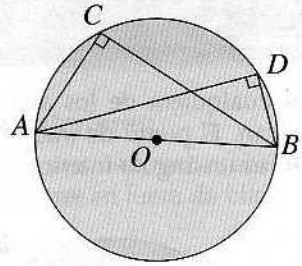
Si se fija un arco $\widehat{AB}$ en la circunferencia, entonces, todos los ángulos inscritos que tienen sus respectivos vértices en el arco $\widehat{ACB}$ son congruentes. Este arco se denomina **arco capaz** de dichos ángulos (ver página 359).

El arco $\widehat{ACB}$ es el arco capaz de los ángulos ACB, ADB y AEB.



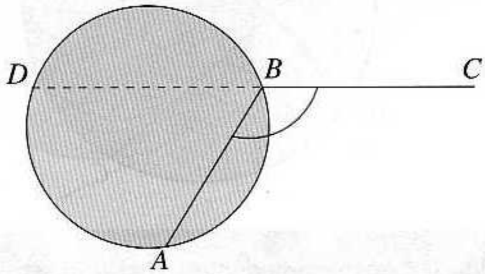
Corolario 2:

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
Si $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, entonces los ángulos ACB y ADB son rectos.



Ángulo exinscrito es el ángulo adyacente a un ángulo inscrito.

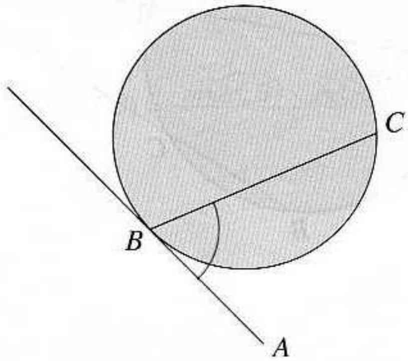
El ángulo ABC es un ángulo exinscrito.



La medida del ángulo exinscrito es igual a la semisuma de los arcos que tienen su origen en el vértice del ángulo (B), y sus extremos, en uno de los lados y en la prolongación del otro.

$$m(\measuredangle ABC) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

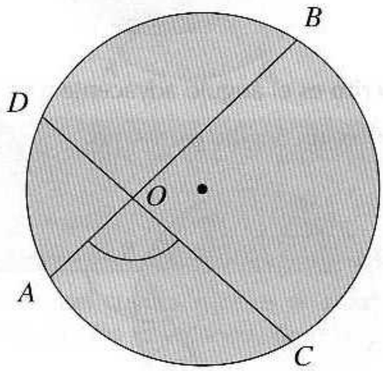
Ángulo semiinscrito es el aquel que tiene como vértice un punto de la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda (o secante) de ella y el otro lado es una recta tangente cuyo punto de tangencia es el vértice. El ángulo ABC es un ángulo semiinscrito.



La medida del ángulo semiinscrito es igual a la mitad de la medida del arco que interseca, es decir, es igual a la mitad de la medida del ángulo central correspondiente (Ver página 254).

$$m(\sphericalangle ABC) = \left(\frac{m(\widehat{BC})}{2}\right)$$

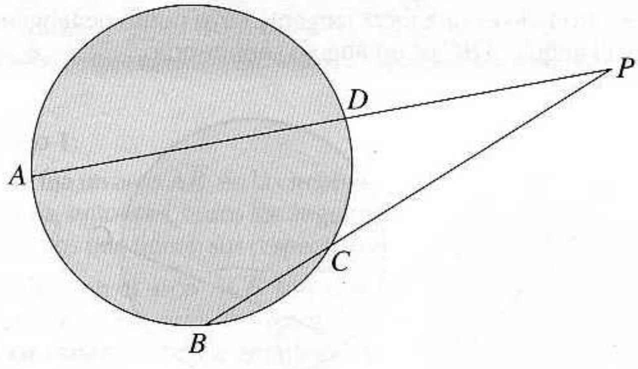
Ángulo interior es cualquiera de los ángulos formados por dos cuerdas que se intersecan. El punto de intersección es el vértice del ángulo. El ángulo AOC es un ángulo interior.



La medida del ángulo interior es igual a la semisuma de las medidas de los arcos determinados por las cuerdas que forman el ángulo (Ver página 253).

$$m(\sphericalangle AOC) = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

Ángulo exterior es el ángulo formado por dos secantes que se intersecan fuera de la circunferencia. El punto de intersección es el vértice del ángulo. El ángulo APB es un ángulo exterior.

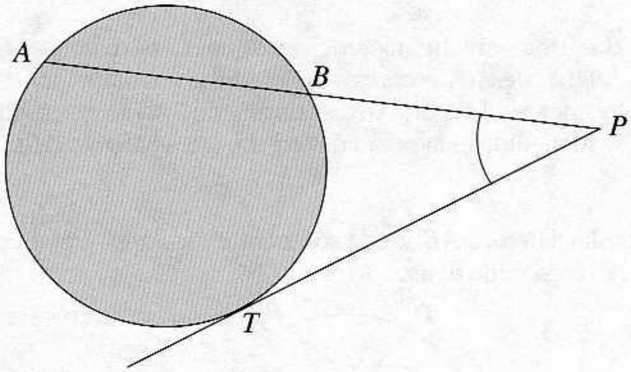


La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia entre las medidas de los arcos determinados por las secantes que forman el ángulo (Ver página 253).

$$m(\measuredangle APB) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$

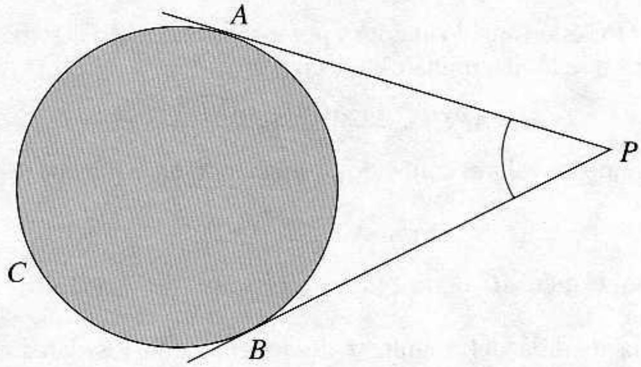
También son ángulos exteriores:

Los ángulos formados por una recta secante y una tangente a la circunferencia que se intersecan fuera de ella.



$$m(\measuredangle APT) = \frac{m(\widehat{AT}) - m(\widehat{BT})}{2}$$

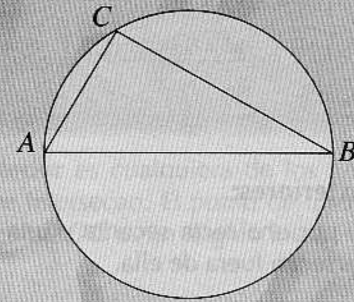
Los ángulos formados por dos rectas tangentes a una circunferencia que se intersecan fuera de ella.



$$m(\measuredangle APB) = \frac{m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{AB})}{2}$$

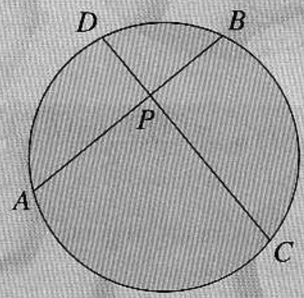
Ejercicios resueltos

1. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia y el arco $\widehat{CB}$ mide el doble del arco $\widehat{AC}$. ¿Cuál es la medida del ángulo ABC?



Solución:
El arco $\widehat{ACB}$ es una semicircunferencia, ya que $\overline{AB}$ es diámetro. Como $\widehat{BC}$ mide el doble de $\widehat{AC}$, entonces sus medidas angulares son 120° y 60°, respectivamente. El ángulo ABC es un ángulo inscrito que subtiende el arco $\widehat{AC}$ y su medida es la mitad de éste. Luego, el ángulo ABC mide 30°.

2. En la figura, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares y el arco $\widehat{BD}$ mide 35°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{AC}$?



Solución:
El ángulo APC es un ángulo interior y por lo tanto es igual a la semisuma de los arcos que lo determinan, es decir:

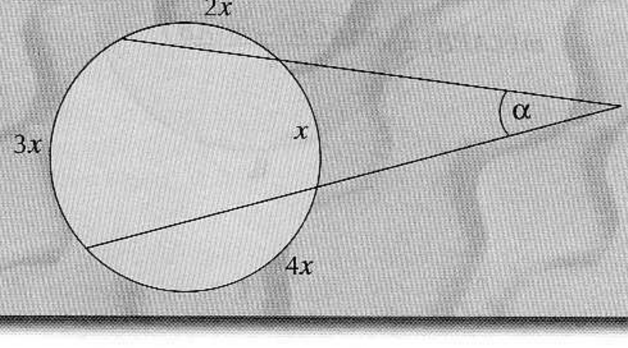
$$m(\measuredangle APC) = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

Reemplazando los valores conocidos, y asignando x a la medida pedida, nos queda:

$$90^\circ = \frac{x + 35^\circ}{2}$$

Por lo tanto, el arco $\widehat{AC}$ mide 145°.

3. ¿Cuál es la medida del ángulo α de acuerdo con los datos de la figura?



Solución:
El ángulo α es un ángulo exterior y, por lo tanto, su medida es igual a la semidiferencia de los arcos que lo determinan, es decir:

$$\alpha = \frac{3x - x}{2} = x$$

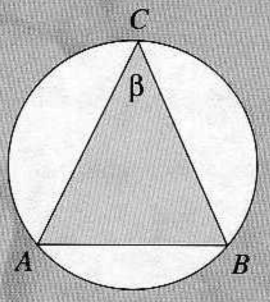
Además, la suma de las medidas de los arcos de la circunferencia es igual a 360° (ángulo completo), es decir:

$$x + 2x + 3x + 4x = 360°$$

de donde se obtiene, $x = 36°$
Por lo tanto:

$$\alpha = 36°$$

4. El triángulo ABC isósceles de base $\overline{AB}$ está inscrito en la circunferencia y el arco $\widehat{BC}$ mide 100°. ¿Cuál es la medida del ángulo β?



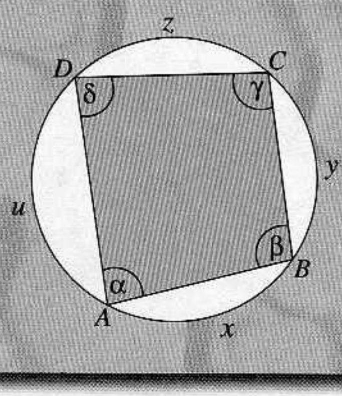
Solución:
El ángulo β es ángulo inscrito determinado por el arco $\widehat{AB}$ y, por lo tanto, su medida es igual a la mitad de ese arco. Los otros ángulos del triángulo son congruentes porque son los ángulos basales de un triángulo isósceles y, por lo tanto, las medidas de los arcos respectivos son iguales. Así, tenemos:

$$m(\widehat{BC}) = m(\widehat{AC}) = 100°$$

entonces, $m(\widehat{AB}) = 160°$
y tenemos:

$$\beta = 80°$$

5. Demuestre que la suma de las medidas de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia es igual a un ángulo extendido.



Solución:

Sean α, β, γ y δ las medidas de los ángulos internos del cuadrilátero inscrito en la circunferencia.

Por demostrar: $\alpha + \gamma = 180°$

y $\beta + \delta = 180°$

Sean x, y, z y u las medidas angulares de los arcos determinados en la circunferencia por los vértices A, B, C y D del cuadrilátero.

Sabemos que: $\alpha = \dfrac{y+z}{2}$

$\gamma = \dfrac{x+u}{2}$

es decir, $\alpha + \gamma = \dfrac{1}{2}(x + y + z + u)$

pero, $x + y + z + u = 360°$, por construcción

Por lo tanto, $\alpha + \gamma = 180°$

De la misma forma se obtiene: $\beta + \delta = 180°$.

6. Demuestre que la medida del ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que lo determina.

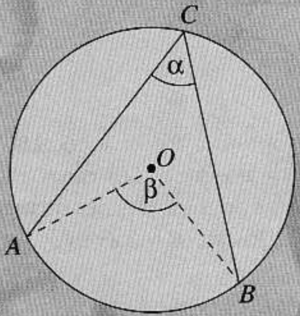


Figura 1

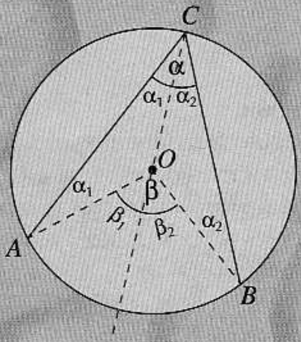


Figura 2

Solución:

Sea α la medida del ángulo inscrito en la circunferencia y β la del ángulo central correspondiente.

Por demostrar: $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

Formemos los triángulos AOC y BOC, como en la Figura 2, siendo:

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

$\beta = \beta_1 + \beta_2$

Los triángulos AOC y BOC son ambos isósceles; por lo tanto, por propiedad del ángulo exterior, tenemos:

$\beta_1 = 2\alpha_1$

$\beta_2 = 2\alpha_2$

$\beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$

pero: $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

de donde: $\beta = 2\alpha$

Es decir: $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$

7. Demuestre que la medida del ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos que lo determinan.

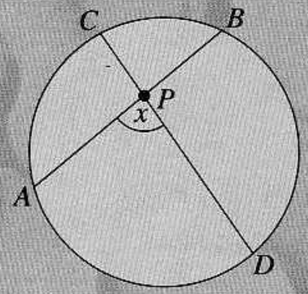


Figura 1

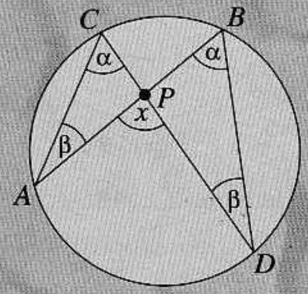


Figura 2

Solución:
Sea x la medida del ángulo interior APD.

Por demostrar: $x = \dfrac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})}{2}$ (Figura 1)

Construyamos los triángulos APC y BDP, como indica la Figura 2.

$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle DBP$ (pues ambos están inscritos en el mismo arco)

$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle BDC$ (pues ambos están inscritos en el mismo arco)

$x = \alpha + \beta$ (propiedad del ángulo exterior en un triángulo)

$$x = \frac{m(\widehat{AD})}{2} + \frac{m(\widehat{BC})}{2}$$

Es decir, $x = \dfrac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})}{2}$

8. Demuestre que la medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de los arcos que lo determinan.

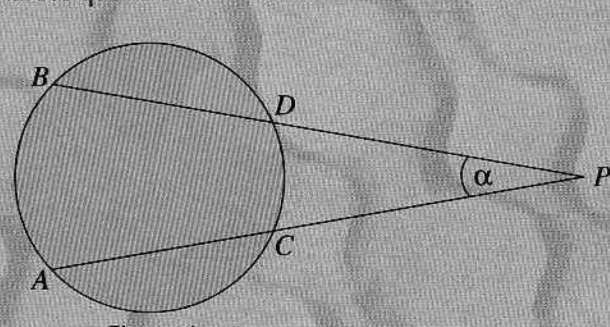


Figura 1

Solución:
Sea α la medida del ángulo exterior APB.

Por demostrar: $\alpha = \dfrac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$ (Figura 1)

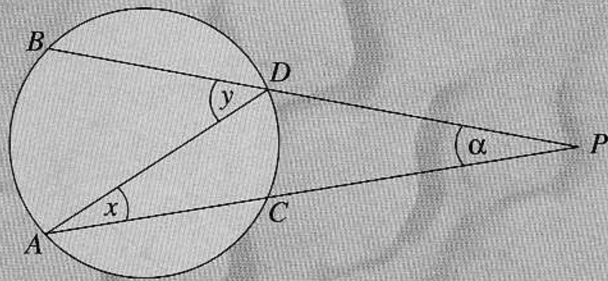


Figura 2

Consideremos la construcción indicada en la Figura 2.

$y = x + \alpha$ (por propiedad del ángulo exterior)

de donde: $\alpha = y - x$

pero: $y = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2}$ y $x = \dfrac{m(\widehat{CD})}{2}$

De donde: $\alpha = \dfrac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$

9. Demuestre que la medida del ángulo semiinscrito es igual a la mitad del arco que lo determina.

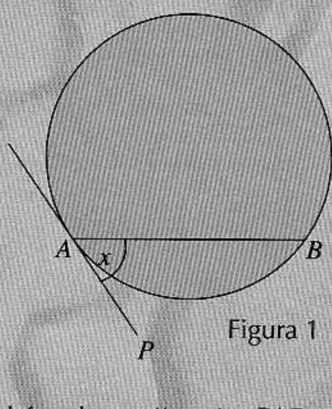


Figura 1

Solución:
Sea x la medida del ángulo semiinscrito PAB.

Por demostrar: $x = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2}$

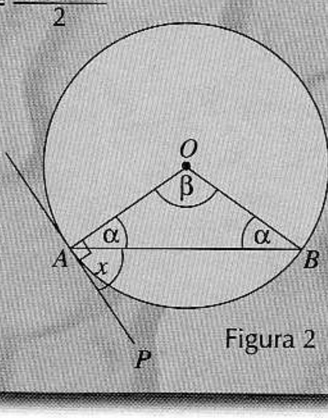


Figura 2

Consideremos la construcción de la Figura 2.

$\triangle AOB$ es isósceles de base $\overline{AB}$.

Tenemos:

$2\alpha + \beta = 180°$ (Por tratarse de los ángulos de un triángulo)

y $\alpha + x = 90°$ (Pues $\overline{AP}$ es tangente en A y $\overline{OA}$ es radio)

Multiplicando la segunda ecuación por 2, tenemos:

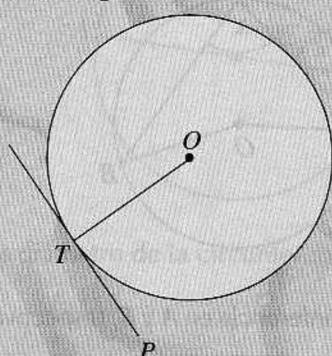
$2\alpha + 2x = 180°$ (Por tratarse de los ángulos de un triángulo)

y $2\alpha + \beta = 180°$

de donde: $2x = \beta$

Es decir: $x = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2}$

10. Demuestre que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



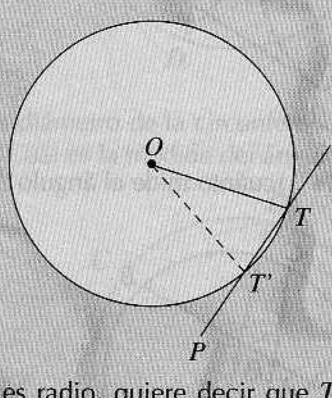
Solución:

Sea $\overline{PT}$ una recta tangente a la circunferencia en T.

Supongamos que no es cierto que $\overline{PT}$ sea perpendicular al radio $\overline{OT}$.

Esto significaría que $\overline{OT}$ forma con $\overline{PT}$ un ángulo agudo y uno obtuso.

Si consideramos el ángulo agudo, debe existir otro punto T' en $\overline{PT}$, tal que $\overline{OT} \cong \overline{OT'}$.

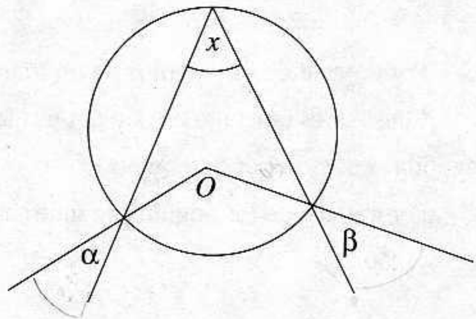


Ahora, como $\overline{OT}$ es radio, quiere decir que T' sería un punto de la circunferencia; de esta forma, la recta $\overleftrightarrow{PT}$ no puede ser recta tangente, pues tendría 2 puntos en común con la circunferencia.

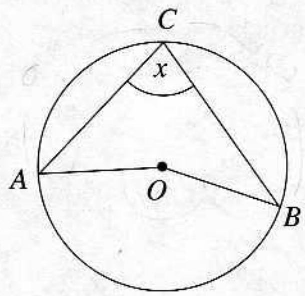
Por lo tanto, la tangente $\overleftrightarrow{PT}$ es perpendicular al radio $\overline{OT}$.

Ejercicios

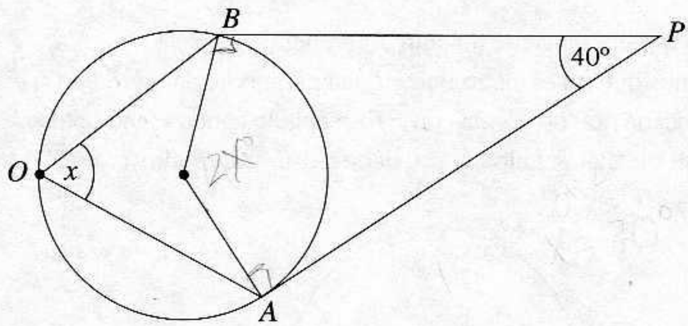
1. Si se sabe que $\alpha = 35°$ y $\beta = 45°$, ¿cuál es la medida del ángulo x de la figura?



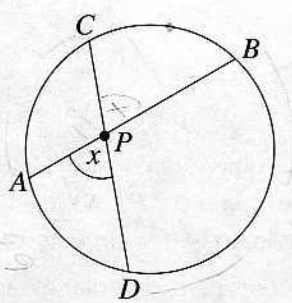
2. El arco $\overset{\frown}{AC}$ de la figura mide 94° y el arco $\overset{\frown}{BC}$ mide 108°. ¿Cuál es la medida del ángulo ACB?



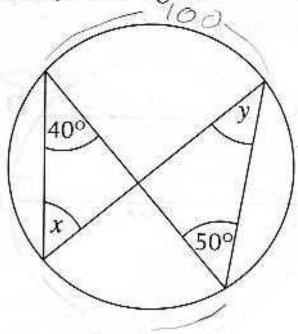
3. $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente, y $\measuredangle APB = 40°$. ¿Cuánto mide el ángulo AOB?



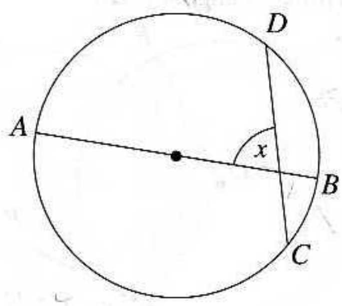
4. Si $m(\overset{\frown}{AC}) = 86°$ y $m(\overset{\frown}{BD}) = 144°$, ¿cuánto mide el ángulo APD?



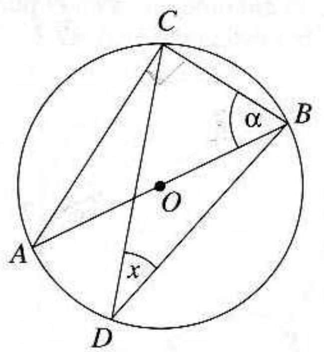
5. ¿Cuáles son los valores de x e y de la figura?



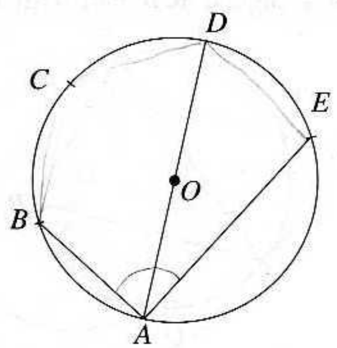
6. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, y las medidas de los arcos $\widehat{CB}$, $\widehat{BD}$ y $\widehat{DA}$ están en la razón 1 : 2 : 3, respectivamente. ¿Cuál es el valor de x?



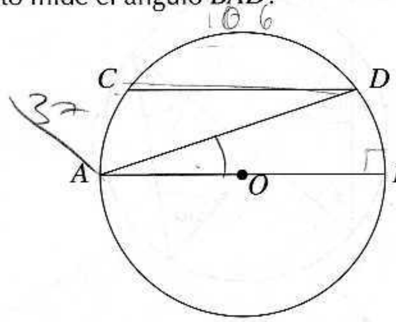
7. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, y $\alpha = 58°$. ¿Cuál es el valor de x?



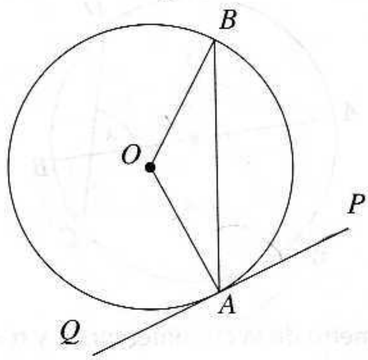
8. En la figura, $\overline{AD}$ es diámetro de la circunferencia, y los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{DE}$ son congruentes. ¿Cuál es la medida del ángulo BAE?



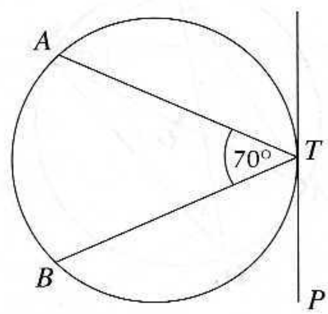
9. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia y es paralela a $\overline{CD}$. El arco $\overset{\frown}{CD}$ mide 106°. ¿Cuánto mide el ángulo BAD?



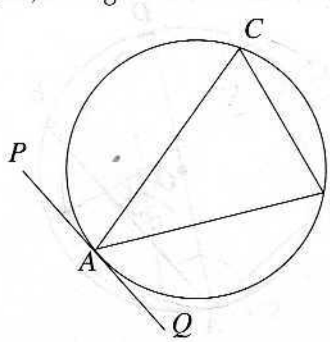
10. La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia de centro O en el punto A, y el ángulo AOB mide 124°. ¿Cuánto mide el ángulo PAB?



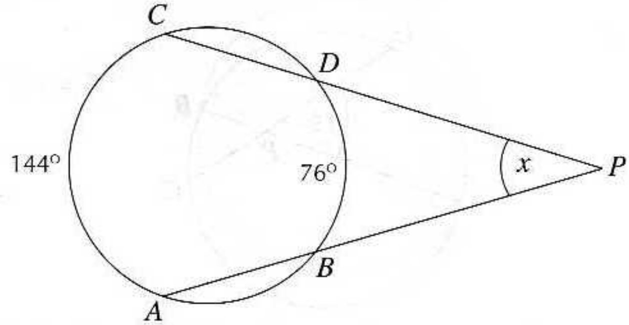
11. La recta $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente a la circunferencia en el punto T, y las cuerdas $\overline{AT}$ y $\overline{BT}$ son congruentes. ¿Cuál es la medida del arco $\overset{\frown}{AT}$?



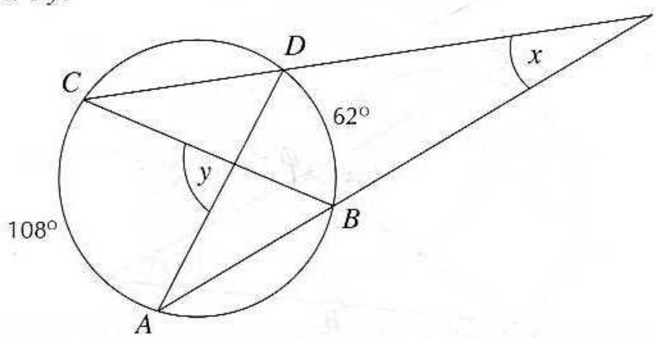
12. ¿Cuál es la medida del ángulo PAC de la figura si la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en el punto A, el ángulo ACB mide 65° y el arco $\overset{\frown}{CB}$ mide 30°?



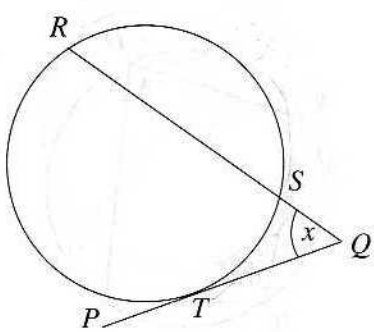
13. Los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{DB}$ de la figura miden 144° y 76°, respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo APC?



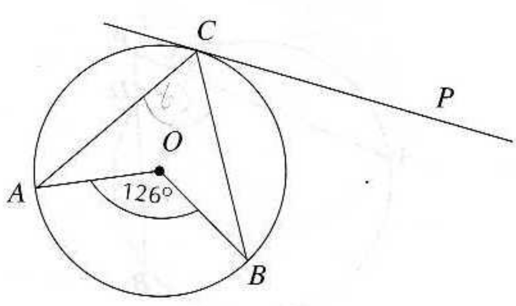
14. Los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{DB}$ de la figura miden 108° y 62°, respectivamente. ¿Cuáles son los valores de x e y?



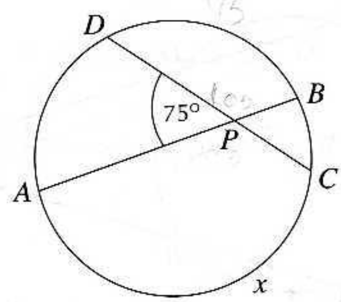
15. La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en el punto T. Los arcos $\widehat{RS}$ y $\widehat{TS}$ miden 135° y 55°, respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo TQR?



16. La recta $\overleftrightarrow{PC}$ es tangente a la circunferencia de centro O en el punto C. El ángulo AOB mide 126° y $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. ¿Cuál es la medida del ángulo ACP?

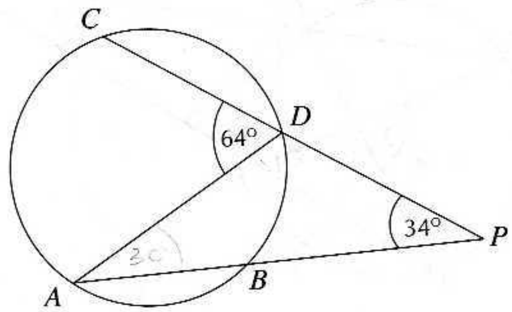


17. El ángulo APD de la figura mide 75° y el arco $\widehat{BD}$ mide 95°. ¿Cuál es la medida del arco $\widehat{AC}$?

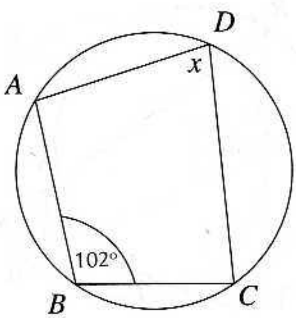


X = 115°

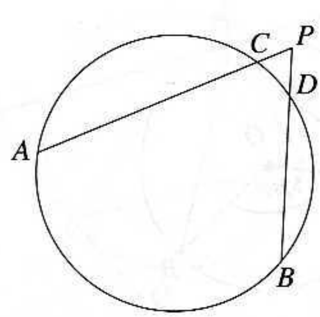
18. El ángulo ADC de la figura mide 64°, y el ángulo APC mide 34°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{BD}$?



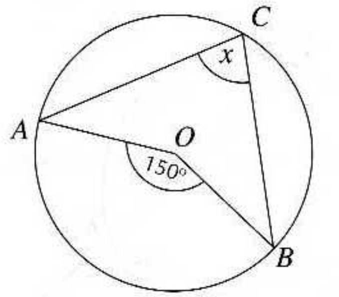
19. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en la circunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo ADC?



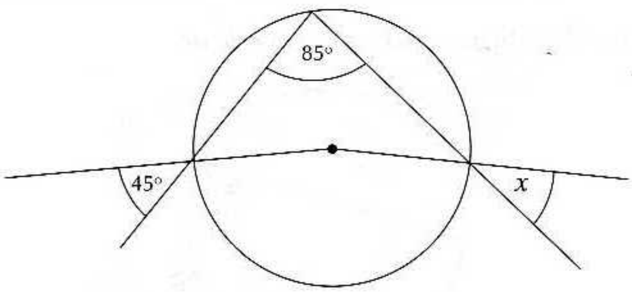
20. En la figura, el arco $\widehat{AB}$ mide 150°, y el arco $\widehat{CD}$ mide 20°. Determine la medida del ángulo APB.



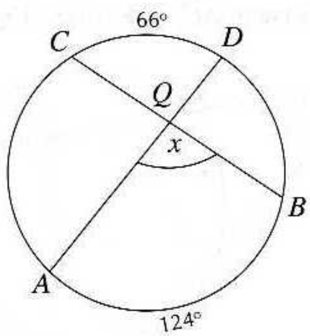
21. ¿Cuál es la medida del ángulo ACB de la figura?



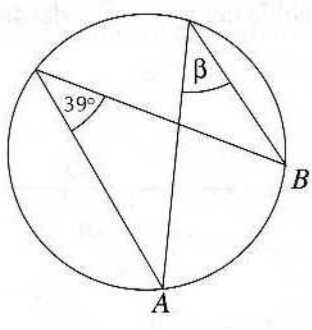
22. ¿Cuál es el valor de x en la figura?



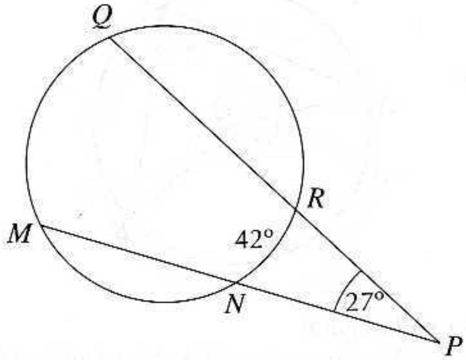
23. Los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ de la figura miden 124° y 66°, respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo AQB?



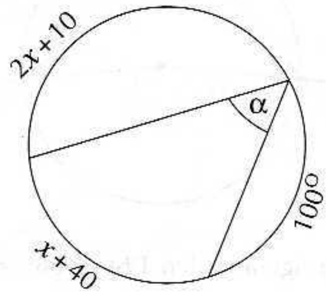
24. En la figura, determine la medida del arco $\widehat{AB}$ y el valor de β.



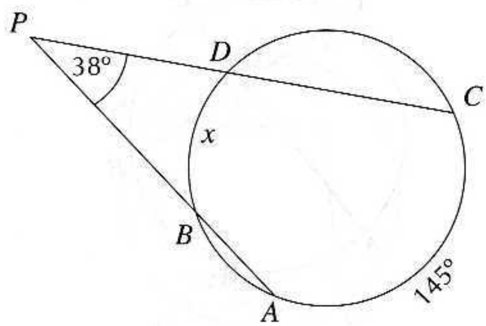
25. En la figura, el ángulo MPQ mide 27° y el arco $\widehat{NR}$ mide 42°. Determine la medida del arco $\widehat{MQ}$.



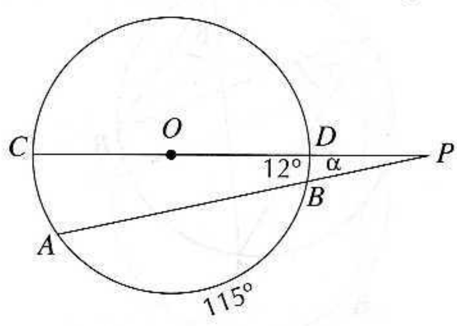
26. Según los datos de la figura, ¿cuál es el valor de α?



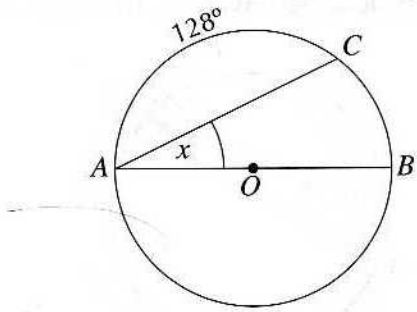
27. El ángulo APC mide 38° y el arco $\widehat{AC}$ mide 145°. ¿Cuál es la medida del arco $\widehat{BD}$?



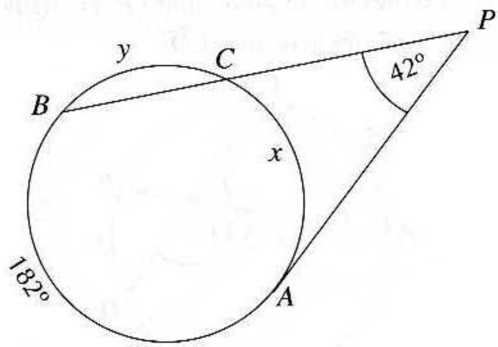
28. La cuerda $\overline{CD}$ es diámetro de la circunferencia. El arco $\widehat{AB}$ mide 115° y el arco $\widehat{BD}$ mide 12°. Determine la medida del arco $\widehat{AC}$ y del ángulo BPD.



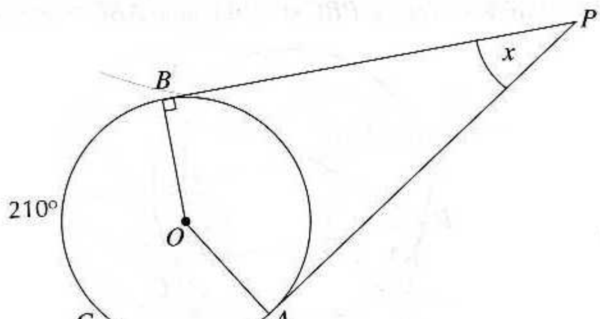
29. La cuerda $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia. El arco $\widehat{AC}$ mide 128°. ¿Cuál es el valor de x?



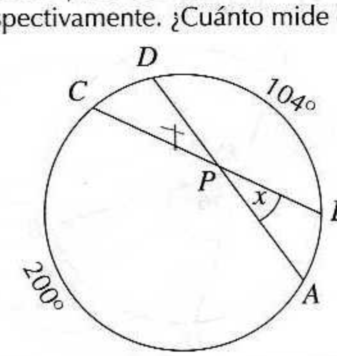
30. El arco $\widehat{AB}$ mide 182°, el ángulo APB mide 42° y $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la circunferencia en A. ¿Cuánto miden los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{CB}$, respectivamente?



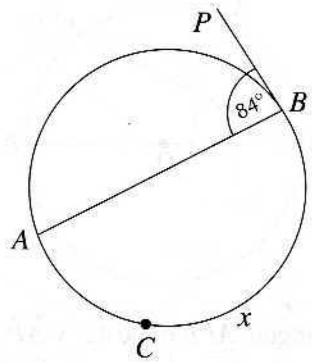
31. En la figura, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a la circunferencia en los puntos A y B, respectivamente. Si el arco $\widehat{ACB}$ mide 210°, ¿cuánto mide el ángulo APB?



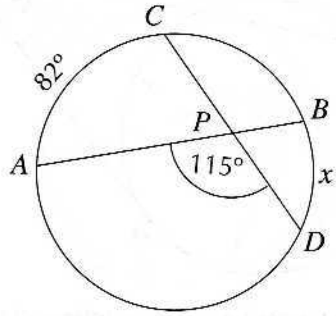
32. En la figura, las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto P; los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{DB}$ miden 200° y 104°, respectivamente. ¿Cuánto mide el ángulo APB?



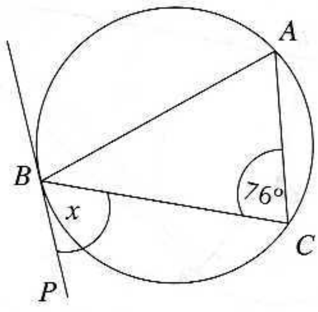
33. En la figura, la recta $\overleftrightarrow{PB}$ es tangente a la circunferencia en el punto B, y el ángulo ABP mide 84°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{ACB}$?



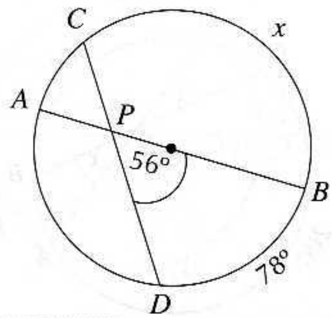
34. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en el punto P. El ángulo APD mide 115° y el arco $\widehat{AC}$ mide 82°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{BD}$?



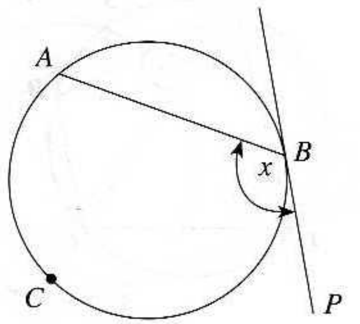
35. En la figura, la recta $\overleftrightarrow{PB}$ es tangente a la circunferencia en el punto B, y el ángulo ACB mide 76°. ¿Cuánto mide el ángulo PBC si el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$?



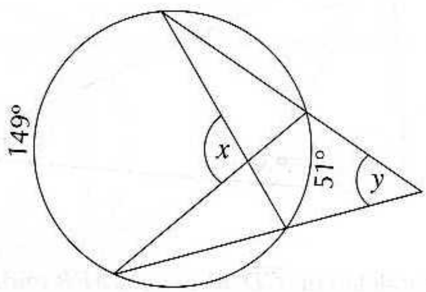
36. La cuerda $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia. Si el arco $\widehat{BD}$ mide 78° y el ángulo DPB mide 56°, ¿cuánto mide el arco $\widehat{BC}$?



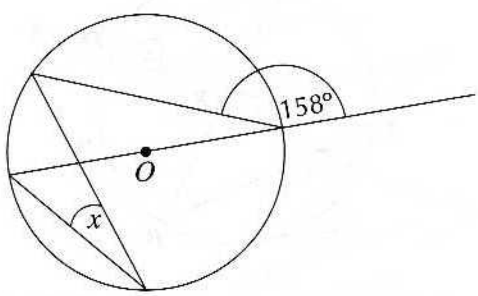
37. En la figura, la recta $\overline{PB}$ es tangente a la circunferencia en el punto B, y el arco $\widehat{ACB}$ mide el doble que el arco $\widehat{AB}$. ¿Cuánto mide el ángulo ABP?



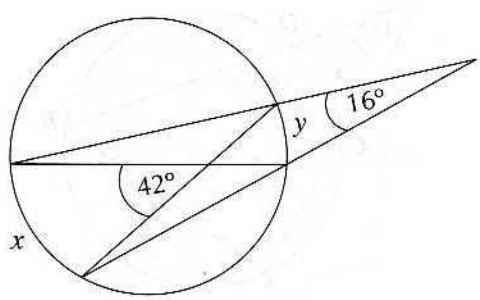
38. Según los datos de la figura, ¿cuáles son los valores de x e y?



39. Según los datos de la figura, ¿cuál es el valor de x?

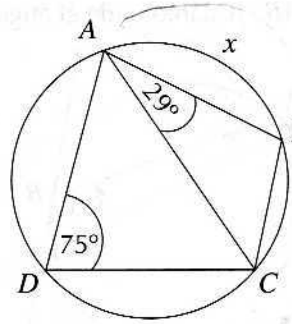


40. Según los datos de la figura, ¿cuáles son los valores de x e y?

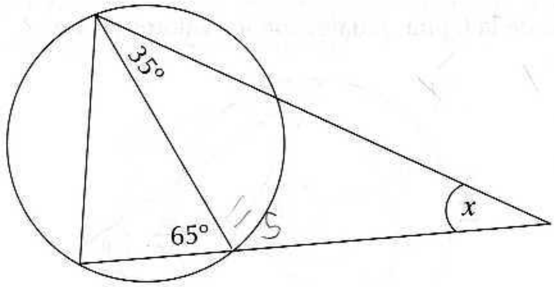


9

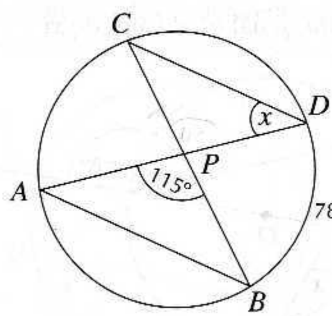
41. Según los datos de la figura, ¿cuánto mide el arco $\widehat{AB}$?



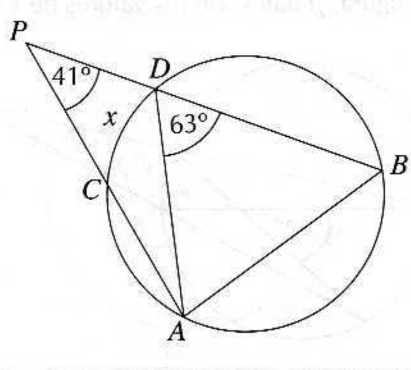
42. Según los datos de la figura, ¿cuál es el valor de x?



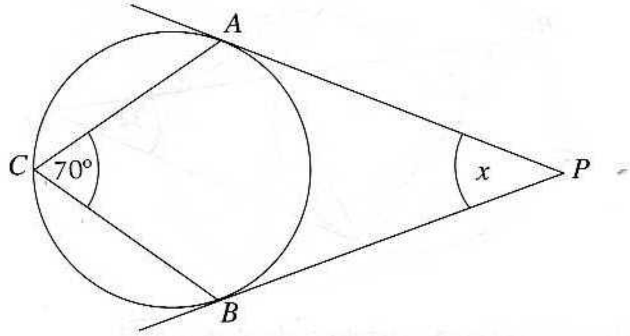
43. En la figura, $\overline{AB}$ es paralela con $\overline{CD}$, el ángulo APB mide 115° y el arco $\widehat{DB}$ mide 78°. ¿Cuánto mide el ángulo ADC?



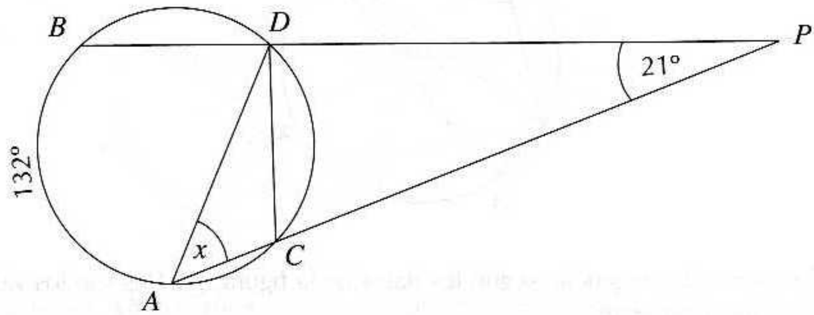
44. En la figura, el ángulo CPD mide 41° y el ángulo ADC mide 63°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{CD}$?



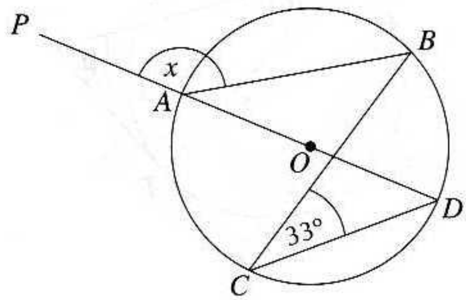
45. En la figura, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente. Si el ángulo ACB mide 70°, ¿cuánto mide el ángulo APB?



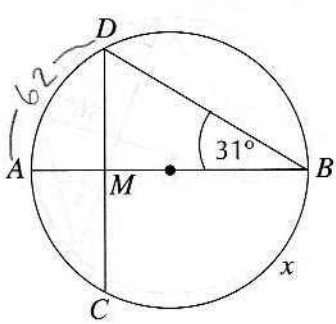
46. En la figura, el arco $\overset{\frown}{AB}$ mide 132° y el ángulo APB mide 21°. ¿Cuál es la medida del ángulo CAD?



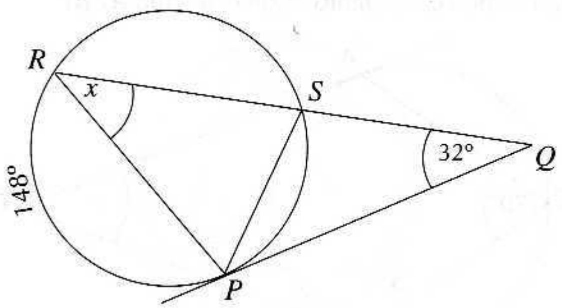
47. En la figura, la cuerda $\overline{AD}$ es diámetro de la circunferencia y el ángulo BCD mide 33°. ¿Cuánto mide el ángulo PAB?



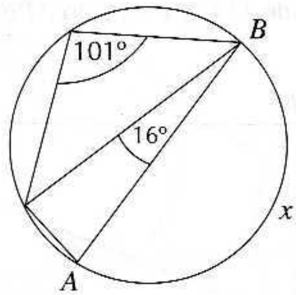
48. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia y M es punto medio de $\overline{CD}$. Si el ángulo ABD mide 31°, ¿cuánto mide el arco $\overset{\frown}{BC}$?



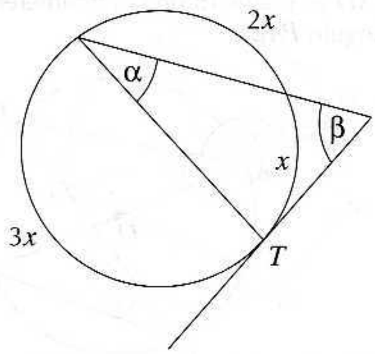
49. Según los datos de la figura, ¿cuál es el valor de x?



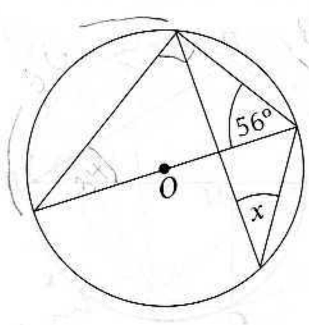
50. Según los datos de la figura, ¿cuánto mide el arco $\overset{\frown}{AB}$?



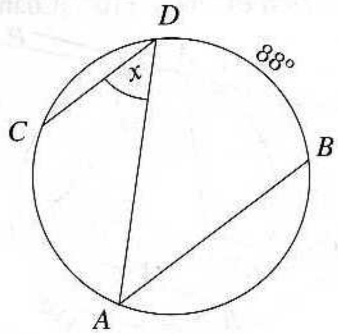
51. Si T es punto de tangencia, según los datos de la figura, ¿cuáles son los valores de α y β, respectivamente?



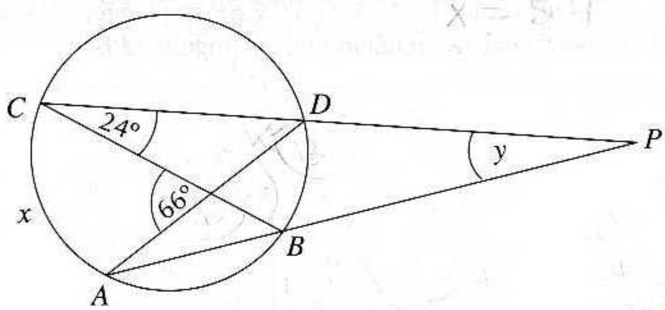
52. Según los datos de la figura, si O es centro la de circunferencia, ¿cuál es el valor de x?



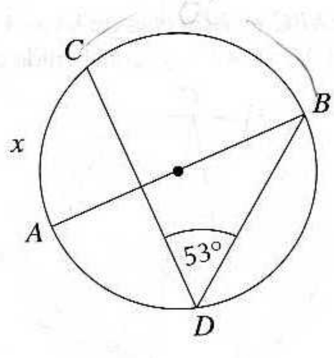
53. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelas y el arco $\widehat{BD}$ mide 88°. ¿Cuál es el valor de x?



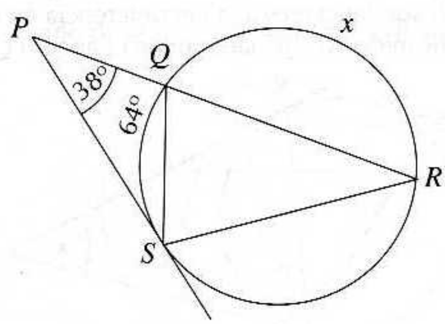
54. Según los datos de la figura, ¿cuánto miden x e y, respectivamente?



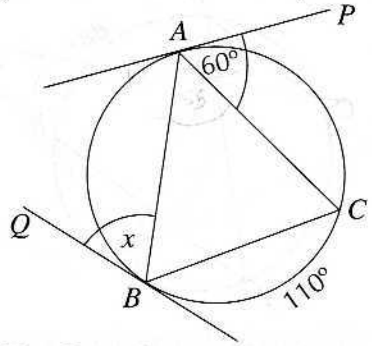
55. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia. Si el ángulo BDC mide 53°, ¿cuánto mide el arco $\widehat{AC}$?



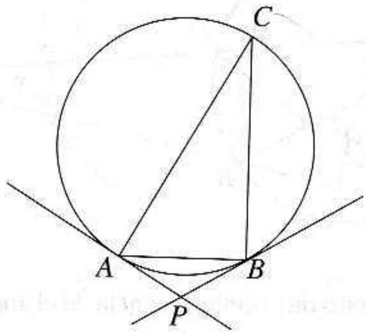
56. En la figura, $\overleftrightarrow{PS}$ es tangente a la circunferencia en S, ¿cuál es el valor de x?



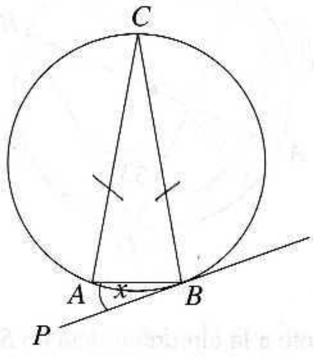
57. Las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{QB}$ son tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente. El ángulo PAC mide 60° y el arco $\overset{\frown}{BC}$ mide 110°. ¿Cuánto mide el ángulo ABQ?



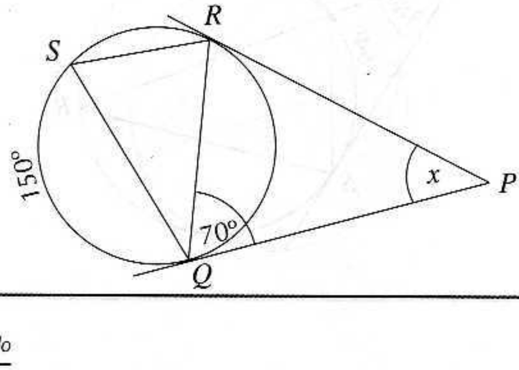
58. En la figura, los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{CA}$ son tales que se cumple:
$m(\overset{\frown}{AB}) : m(\overset{\frown}{BC}) : m(\overset{\frown}{CA}) = 1 : 2 : 3$. Si $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente, ¿cuánto mide el ángulo APB?



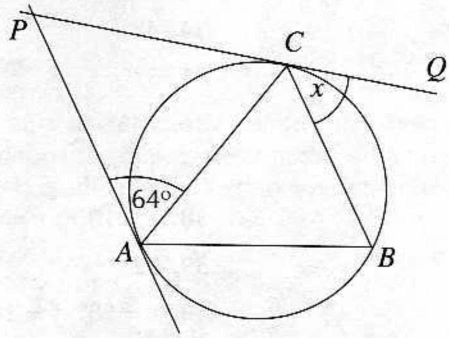
59. En la figura, el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AP}$; $\overline{BP}$ es tangente en B y se cumple que: $m(\overset{\frown}{AC}) : m(\overset{\frown}{AB}) = 4 : 1$. ¿Cuánto mide el ángulo PBA?



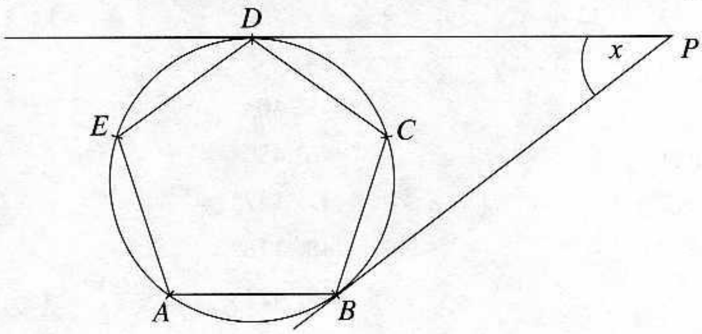
60. En la figura, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son tangentes a la circunferencia en Q y R; el arco $\overset{\frown}{QS}$ mide 150° y el ángulo PQR mide 70°. ¿Cuánto mide el ángulo QPR?



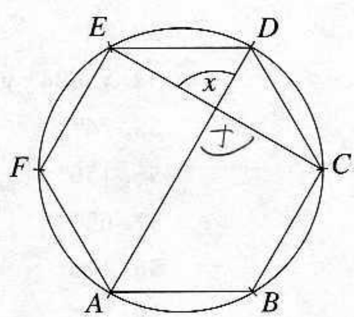
61. El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{BC}$; $\overline{AP}$ y $\overline{CP}$ son tangentes en A y C, y el ángulo PAC mide 64°. ¿Cuánto mide el ángulo BCQ?



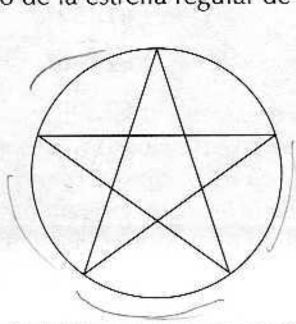
62. En la figura, $ABCDE$ es un pentágono regular inscrito en la circunferencia; $\overline{PD}$ y $\overline{PB}$ son tangentes en B y D, respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo BPD?



63. En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular inscrito en la circunferencia. ¿Cuál es el valor de x?



64. ¿Cuánto mide cada ángulo de la estrella regular de la figura?



Soluciones

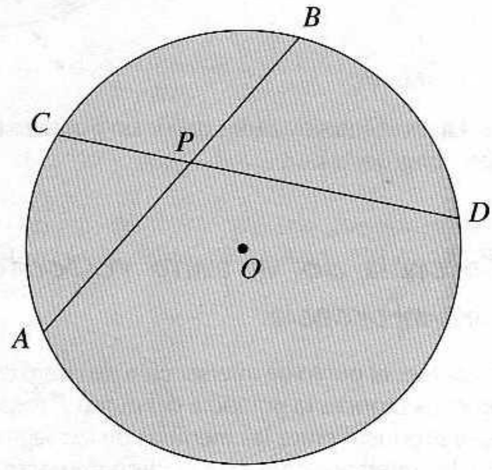
1. 80°
2. 79°
3. 70°
4. 65°
5. $y = 40°$; $x = 50°$
6. 36°
7. 32°
8. 90°
9. 18,5°
10. 62°
11. 110°
12. 100°
13. 34°
14. $x = 23°$; $y = 85°$
15. 57,5°
16. 121,5°
17. 115°
18. 60°
19. 78°
20. 65°
21. 75°
22. 40°
23. 95°
24. $\overset{\frown}{AB} = 78°$; $\beta = 39°$
25. 96°
26. 55°
27. 69°
28. $\overset{\frown}{AC} = 53°$; $\measuredangle BPD = 20{,}5°$
29. 26°
30. $x = 98°$; $y = 80°$
31. 30°
32. 28°
33. 192°
34. 48°
35. 52°
36. 146°
37. 120°
38. $x = 100°$; $y = 49°$
39. 22°
40. $x = 58°$; $y = 26°$
41. 92°
42. 30°
43. 26°
44. 44°
45. 40°
46. 45°
47. 147°
48. 118°
49. 42°
50. 170°
51. $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$
52. 34°
53. 44°
54. $x = 84°$; $y = 18°$
55. 74°
56. 156°
57. 65°
58. 120°
59. 20°
60. 40°
61. 52°
62. 36°
63. 90°
64. 36°

Relaciones métricas en la circunferencia 6.3

Teorema de las cuerdas

Si dos cuerdas se intersecan al interior de la circunferencia, entonces el producto de la medida de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de la medida de los segmentos determinados en la otra.

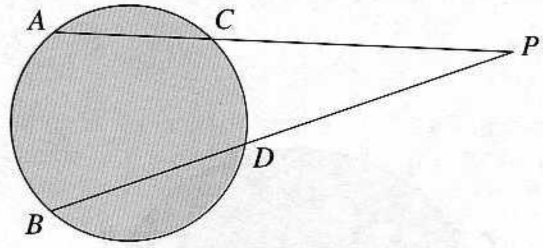
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Teorema de las secantes

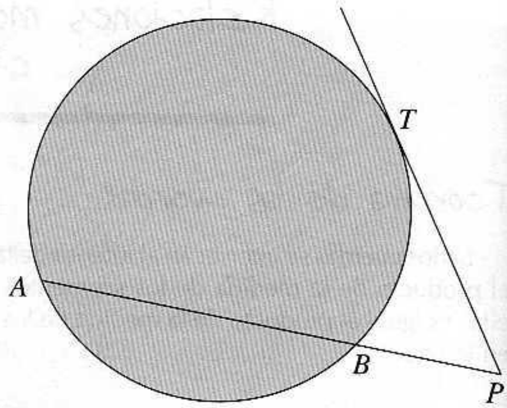
Si dos secantes a una circunferencia se intersecan fuera de ella, entonces los productos de las medidas de los segmentos que, en cada secante, determinan el punto exterior y los dos puntos de intersección con la circunferencia son iguales.

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD$$



Teorema de la tangente y la secante

Si una tangente y una secante a una circunferencia se intersecan en un punto exterior a ella, entonces el producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto exterior y los dos puntos de intersección de la secante con la circunferencia es igual al cuadrado de la medida del segmento de tangente determinado por el punto exterior y el punto de tangencia.



$PA \cdot PB = (PT)^2$

Corolario:

Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes.

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

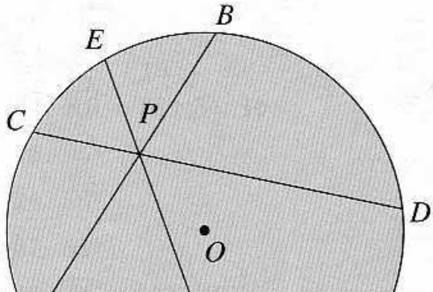
Si P es el punto de intersección de cuerdas o secantes a una circunferencia, entonces la potencia del punto P respecto de esa circunferencia es el producto entre las medidas de los segmentos cuyos extremos son P y las intersecciones con la circunferencia.

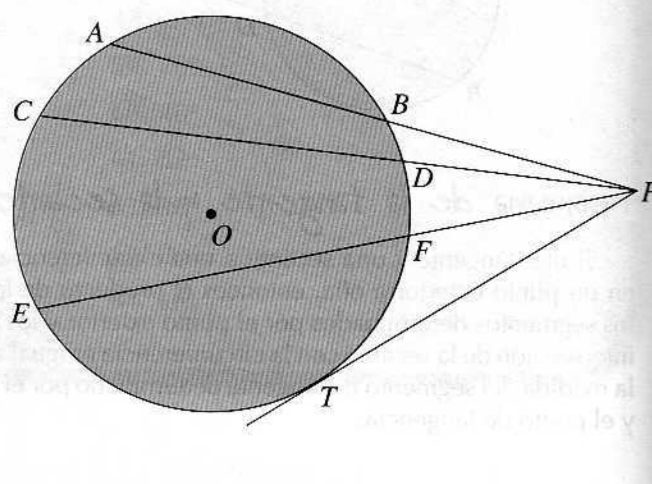
La potencia del punto P es cualquiera de los productos:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF; \text{ etc.}$$

De acuerdo con las propiedades anteriores, estos productos son iguales.

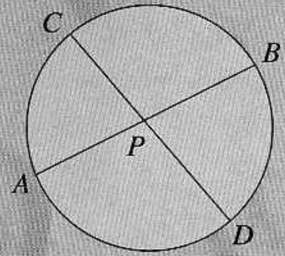
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = (PT)^2$$





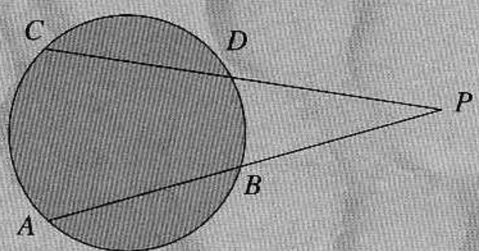
Ejercicios resueltos

1. En la figura, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en el punto P. Si $AP = 12$ cm; $BP = 6$ cm; $CP = 8$ cm, ¿cuánto mide $\overline{DP}$?



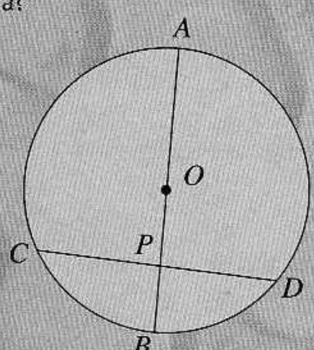
Solución:
Se trata de dos cuerdas que se intersecan al interior de la circunferencia, por lo tanto, se cumple: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.
Asignamos x a la medida del trazo pedido, reemplazamos directamente y obtenemos: $12 \cdot 6 = 8 \cdot x$. Así, el trazo $\overline{DP}$ mide 9 cm.

2. En la figura, P es el punto de intersección de las secantes. Las medidas de los segmentos son las siguientes: $AB = 8$ cm; $BP = 6$ cm; $DP = 4$ cm. ¿Cuánto mide el trazo $\overline{CP}$?



Solución:
Se trata de dos secantes a una circunferencia que se intersecan en un punto exterior de ella.
Se cumple: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$
Asignamos x a la medida del trazo pedido, determinamos la medida de $\overline{AP}$, que es la suma de $\overline{AB}$ y $\overline{BP}$, y reemplazamos:
$14 \cdot 6 = x \cdot 4$
El trazo $\overline{CP}$ mide 21 cm.

3. En la circunferencia de centro O, P es el punto de intersección de la cuerda $\overline{CD}$ con el diámetro $\overline{AB}$. Las medidas de los trazos son las siguientes: $OP = 4$ cm; $CP = 4$ cm; $PD = 3$ cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



Solución:
Aplicamos el teorema de las cuerdas. En este caso tenemos:

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

Si r representa el radio pedido, nos queda:

$(r + 4)(r - 4) = 4 \cdot 3$

$r^2 - 16 = 12$

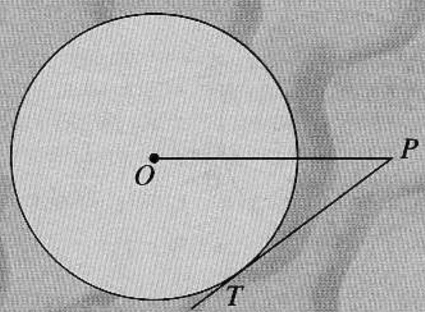
$r^2 = 28$

$r = \pm\sqrt{28}$

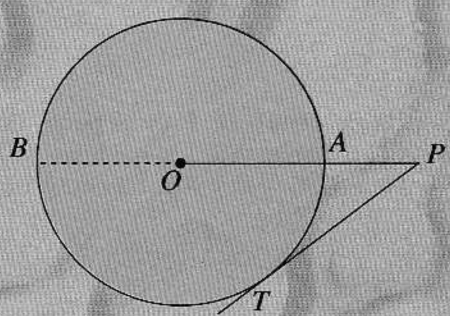
$r = 2\sqrt{7}$

Consideramos sólo la solución positiva, pues ella representa la medida del radio de la circunferencia (no puede ser un valor negativo).

4. Desde el punto P, situado a 10 cm del centro de la circunferencia de radio 6 cm, se traza una recta tangente a ella, siendo T el punto de tangencia. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{TP}$?



Solución:
Prolonguemos el trazo $\overline{OP}$ hasta intersecar a la circunferencia y sean A y B los extremos del diámetro, como indica la figura:



En este caso se cumple:

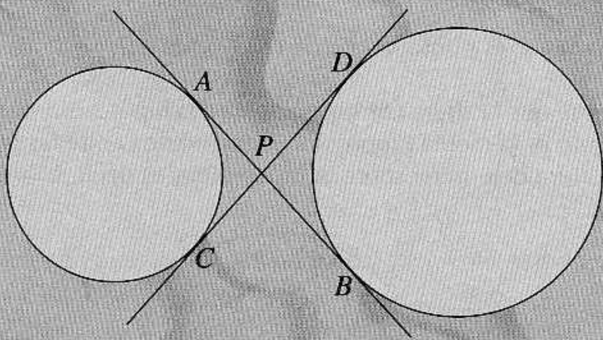
$AP \cdot BP = (PT)^2$

Si x representa la longitud del segmento pedido, obtenemos:

$4 \cdot 16 = x^2$

de donde concluimos que la medida de $\overline{TP}$ es 8 cm.

5. Las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son tangentes comunes a ambas circunferencias en los puntos A, C, D y B, como lo muestra la figura. Demuestre que $AB = CD$.



Solución:

Sea P el punto de intersección de las tangentes $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

Tenemos: $PA = PC$ (Son tangentes a una circunferencia desde un mismo punto)

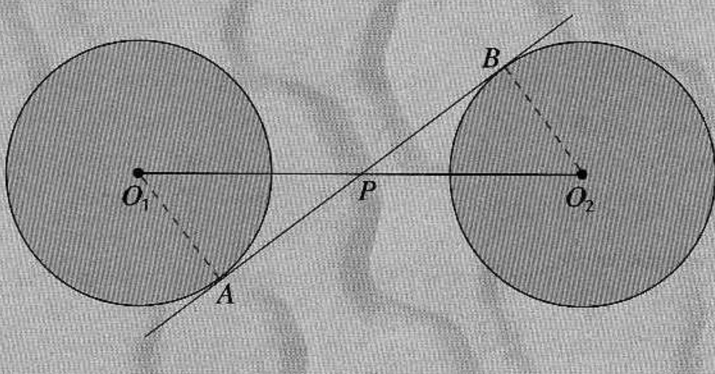
$PB = PD$ (Son tangentes a una circunferencia desde un mismo punto)

Sumando nos queda:

$$PA + PB = PC + PD$$

De donde: $AB = CD$

6. O_1 y O_2 son centros de circunferencias congruentes y $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente común. Demuestre que P es punto medio de $\overline{AB}$ y de $\overline{O_1O_2}$.



Solución:

Consideremos los triángulos O_1AP y O_2BP.

$\measuredangle O_1AP \cong \measuredangle O_2BP$ (Son rectos, formados por una tangente y el radio)

$\measuredangle APO_1 \cong \measuredangle BPO_2$ (Son opuestos por el vértice)

Por lo tanto, $\measuredangle PO_1A \cong \measuredangle PO_2B$

Además, $\overline{O_1A} \cong \overline{O_2B}$ (Son radios de circunferencia congruente)

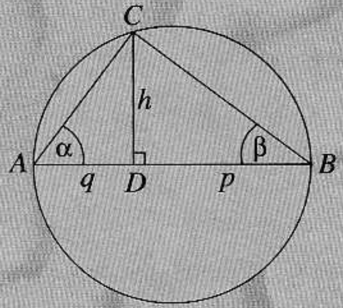
Por lo tanto, ambos triángulos son congruentes y se cumple que:

$AP \cong PB$

y $\overline{O_1P} \cong \overline{O_2P}$

Por lo tanto, P es punto medio de $\overline{O_1O_2}$ y de $\overline{AB}$.

7. Demuestre que la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media proporcional geométrica entre las proyecciones que la altura determina sobre la hipotenusa, es decir, $h^2 = p \cdot q$.



Solución:

El triángulo ABC es rectángulo en C.

Sean α y β las medidas de sus ángulos agudos; $\alpha + \beta = 90°$.

Si D es el pie de la altura, entonces los triángulos ADC y BDC son semejantes, ya que:

$\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle BDC$ (Ángulo recto)

$\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle BCD$ ($\alpha + \beta = 90°$)

$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle CBD$ ($\alpha + \beta = 90°$)

Y se cumple:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{CD}{DB}$$

Es decir:

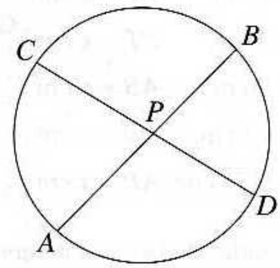
$(CD)^2 = AD \cdot BD$

Reemplazando:

$h^2 = p \cdot q$

Ejercicios

1. En la figura, P es el punto de intersección de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



Determine, en cada caso, la medida del segmento pedido:

a) $AP = 4$ cm; $PB = 6$ cm; $CP = 8$ cm; $PD = x$

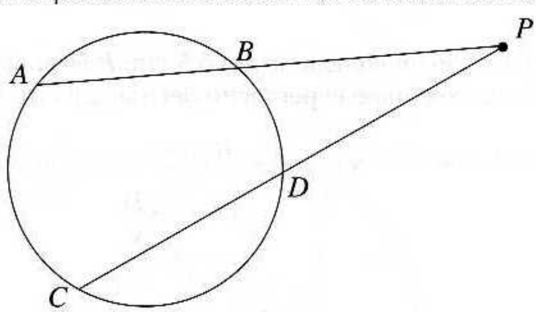
b) $AP = x$; $PB = 9$ cm; $CP = 6$ cm; $PD = 12$ cm

c) $AP = 4$ cm; $PB = 3$ cm; $CD = 8$ cm; $PD = x$

d) $AP = a + 8$; $PB = a - 6$; $CP = a + 2$; $PD = a - 4$; $AB = x$

e) $CP = 12$ cm; $PD = 9$ cm; $AP : PB = 3 : 1$; $AB = x$ cm

2. En la figura, P es el punto de intersección de las rectas secantes $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.



Determine, en cada caso, la medida del segmento pedido:

a) $AP = 12$ cm; $PB = 5$ cm; $CP = 10$ cm; $PD = x$ cm

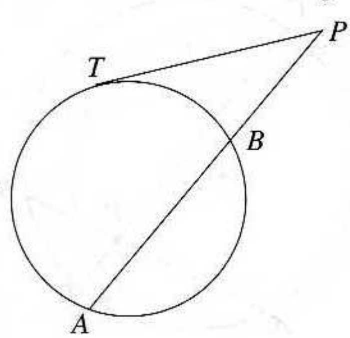
b) $AP = 9$ cm; $PB = x$ cm; $CP = 12$ cm; $PD = 3$ cm

c) $AB = 6$ cm; $PB = 4$ cm; $CP = x$ cm; $PD = 5$ cm

d) $AP = x$; $PB = 8$ cm; $CD = 11$ cm; $PC = 15$ cm

e) $AP = x$ cm; $PB = 4$ cm; $PC = 20$ cm; $DP : DC = 2 : 3$

3. En la figura, P es el punto de intersección de la tangente $\overline{TP}$ y la secante $\overline{AP}$.



Determine, en cada caso, la medida del segmento pedido:

a) $AP = 10$ cm; $BP = 7$ cm; $PT = x$ cm

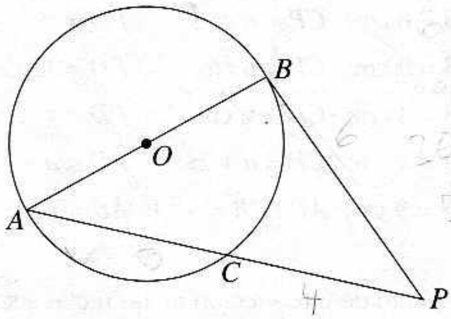
b) $AB = 9$ cm; $BP = 3$ cm; $PT = x$ cm

c) $PT = 15$ cm; $PB = 9$ cm; $AB = x$ cm

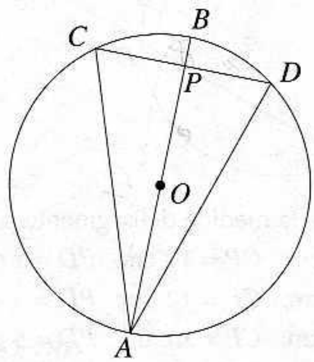
d) $AB = 10$ cm; $TP = 12$ cm; $PB = x$ cm

e) $AB : BP = 4 : 1$; $TP = 5\sqrt{5}$ cm; $AP = x$ cm

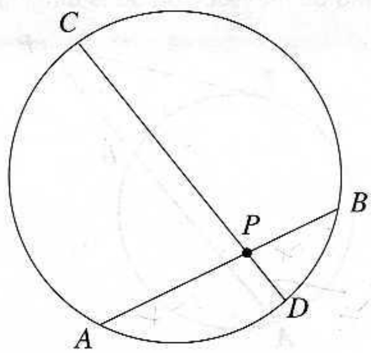
4. Determine la medida del radio de la circunferencia de la figura si $\overline{PB}$ es tangente a ella en el punto B; $PB = 6$ cm y $PC = 4$ cm.



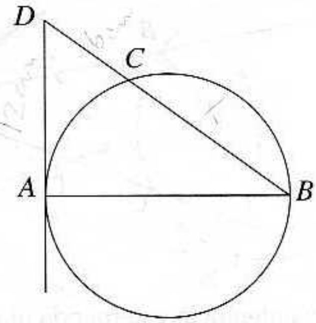
5. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de radio 5 cm; P es punto medio de la cuerda CD, que mide 8 cm. Determine el perímetro del triángulo ACD.



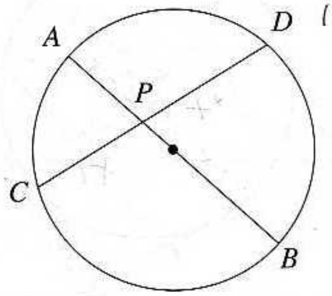
6. P es punto de intersección de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. $AP = x - 1$; $PB = x + 1$; $CP = x + 5$ y $DP = x - 3$. Determine la medida de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



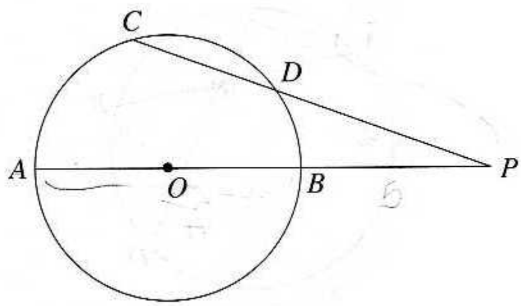
7. $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ en el punto A. Si AD mide 12 cm y CD mide 6 cm, determine el perímetro del triángulo ABD y el radio de la circunferencia.



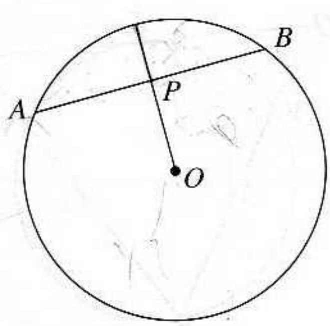
8. $\overline{AB}$ es diámetro; P es punto de intersección de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $CP = x$; $PD = x + 1$; $PB = x + 4$; $AP = x - 2$. Determine el área y el perímetro del círculo.



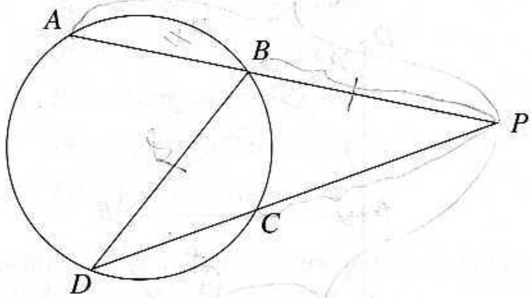
9. En la figura, $\overline{PB}$ mide 5 cm; $\overline{CP}$ mide 10 cm y $\overline{CD}$ mide 4 cm. Determine el radio de la circunferencia.



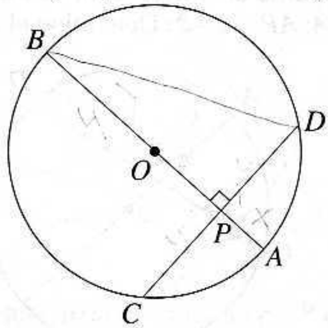
10. O es el centro de la circunferencia; P es punto medio de $\overline{AB}$; $\overline{OP}$ mide 6 cm y $\overline{AB}$ mide 16 cm. Determine el área y el perímetro del círculo.



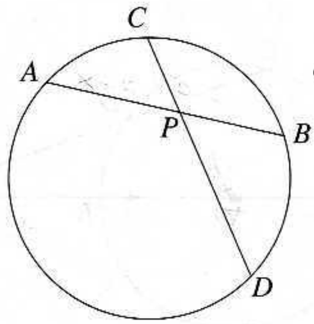
11. El triángulo DBP es isósceles de base $\overline{DP}$. Determine su perímetro sabiendo que $CP = 6$ cm; $AB = 4$ cm y $AP = 12$ cm.



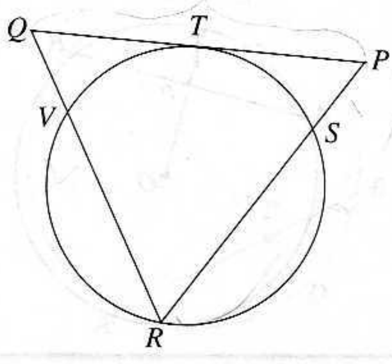
12. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia y perpendicular a $\overline{CD}$; $OP = 3$ cm y $CD = 8$ cm. Determine el área y el perímetro del triángulo BPD.



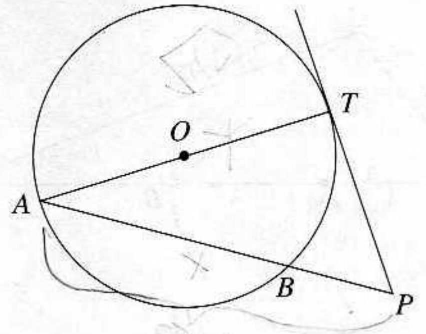
13. P es punto de intersección de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. $PC = 6$ cm; $PD = x + 7$; $AP = x + 5$ y $PB = x$. Determine la longitud de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



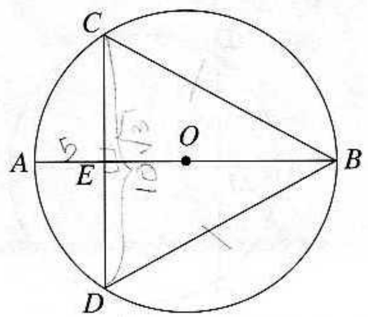
14. $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia en el punto T; T es punto medio de $\overline{PQ}$; los arcos $\overset{\frown}{VR}$ y $\overset{\frown}{SR}$ son congruentes. $PQ = 4$ cm y $PS = 1$ cm. Determine el perímetro del triángulo PQR.



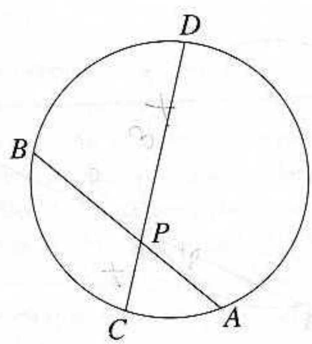
15. $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia en T. $TP = 3$ cm y $PB = 1$ cm. Determine las áreas del triángulo ATP y del círculo.



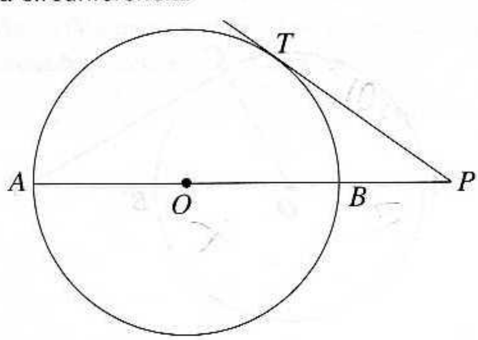
16. $\overline{AB}$ es diámetro y es perpendicular a $\overline{CD}$. $AE = 5$ cm; $CD = 10\sqrt{3}$ cm. ¿Qué tipo de triángulo es BCD? Determine su área y su perímetro. Determine, además, el área y el perímetro del círculo.



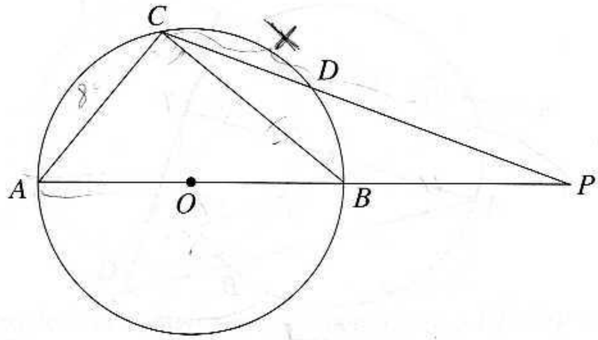
17. En la figura se cumple: $AP = 6$ cm; $BP = 8$ cm y $CP : PD = 1 : 3$. Determine las longitudes de $\overline{CP}$ y $\overline{PD}$.



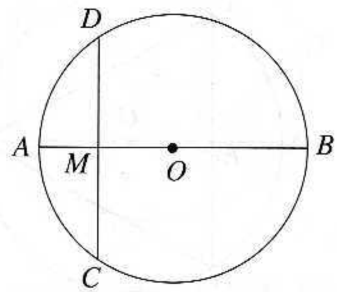
18. $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia en el punto T. Si $PB = 5$ cm y $TP = 10$ cm, determine el radio de la circunferencia.



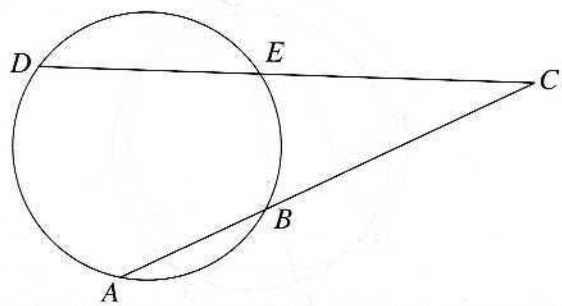
19. AB es diámetro de la circunferencia; el triángulo PBC es isósceles de base CP; $AC = DP = 8$ cm y $PB = 6$ cm. Determine la longitud de $\overline{CD}$.



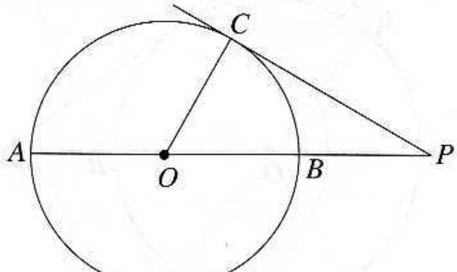
20. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia; M es punto medio de $\overline{AO}$ y de $\overline{CD}$; $CD = 18$ cm. Determine el radio de la circunferencia.



21. En la figura, $AC : BC = 3 : 2$; $DE = 5$ cm y $EC = 3$ cm. Determine la longitud de $\overline{AB}$.



22. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia; B es punto medio de $\overline{OP}$; $\overline{CP}$ es tangente a la circunferencia en el punto C; $CP = 9$ cm. Determine el perímetro del triángulo OCP.



Soluciones

1. a) $x = 3$; b) $x = 8$; c) $x = 6$ (o $x = 2$); d) $AB = 22$; e) $x = 24$
2. a) $x = 6$; b) $x = 4$; c) $x = 8$; d) $x = 7{,}5$; e) $x = 40$
3. a) $x = \sqrt{70}$; b) $x = 6$; c) $x = 16$; d) $x = 8$; e) $x = 25$
4. $\frac{3}{2}\sqrt{5}$
5. $(8 + 8\sqrt{5})$ cm
6. $AB = 14$; $CD = 16$
7. $r = 6\sqrt{3}$; $P = 36 + 12\sqrt{3}$
8. $A = 81\pi$ cm²; $P = 18\pi$ cm
9. 3,5 cm
10. $P = 20\pi$ cm; $A = 100\pi$ cm²
11. 32 cm
12. $A = 16$ cm²; $P = (12 + 4\sqrt{5})$ cm
13. $AB = 19$ cm y $CD = 20$ cm
14. 12 cm
15. A(triángulo) = $9\sqrt{2}$ cm² y A(círculo) = 18π cm²
16. Es un triángulo equilátero de lado $10\sqrt{3}$ cm.
    A(triángulo) = $75\sqrt{3}$ cm²
    A(círculo) = 100 cm²
    P(triángulo) = $30\sqrt{3}$ cm
    P(circunferencia) = 20π cm
17. $CP = 4$ cm y $PD = 12$ cm
18. 7,5 cm
19. $CD = 4$ cm
20. $6\sqrt{3}$ cm
21. 2 cm
22. $(9 + 9\sqrt{3})$ cm

LEONARDO FIBONACCI

(Pisa, actual Italia, h. 1180-?, h. 1250)

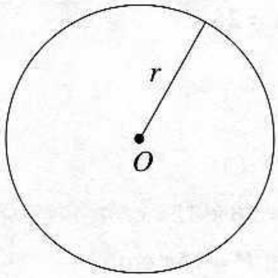
Matemático italiano. Hijo de un comerciante toscano, emigró con su familia a Argelia, en lo que fue el primero de una serie de viajes que le llevarían a Egipto, Sicilia, Grecia y Siria. Regresó a Italia provisto de amplios conocimientos sobre la matemática árabe y plenamente convencido de la superioridad de su sistema de notación. En 1202 publicó su obra más célebre, "El Liber abaci", donde trató cuestiones como la notación posicional, diversos métodos de cálculo y la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. En escritos posteriores analizó diversos problemas clásicos propuestos por Pitágoras, para lo que empleó generalmente los métodos algebraicos propios de las matemáticas árabes. Es así mismo célebre por el descubrimiento de la denominada serie de Fibonacci, entre cuyas propiedades cabe citar su recurrencia en numerosas formaciones orgánicas naturales.

6.4 Perímetro y área

Circunferencia y círculo

La longitud (L) de una circunferencia o perímetro de un círculo de radio r es igual al doble de π multiplicado por el radio.

$$L = 2\pi \cdot r$$

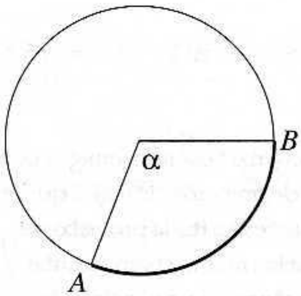


El área (A) o superficie de un círculo de radio r es igual a π multiplicado por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Arco

La longitud $L(\overset{\frown}{AB})$ de un arco de circunferencia determinado por un ángulo central α está dada por:

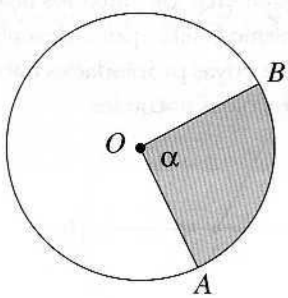


$$L(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot r}{180^\circ}$$

$L(\overset{\frown}{AB}) = \alpha \cdot r$ (α medido en radianes)

Sector circular

El área (A) de un sector circular de un círculo de radio r y ángulo central α está dada por:



$$A = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot r^2}{360^\circ}$$

$A = \frac{1}{2}\alpha \cdot r^2$ (α medido en radianes)

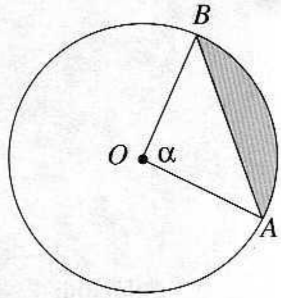
El perímetro P del sector circular anterior está dado por:

$P = 2r + \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot r}{180^\circ}$ o $P = (2 + \alpha)r$ (α medido en radianes)

Segmento circular

El área A del segmento circular es igual a la diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo formado por los radios y la cuerda.

$$A = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot r^2}{360^\circ} - A_{\triangle AOB} \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2}\alpha \cdot r^2 - A_{\triangle AOB}$$

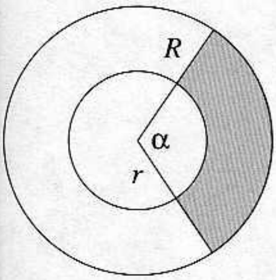


El perímetro P del segmento circular de la figura es igual a la suma de la longitud de la cuerda y la del arco.

$$P = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot r}{180^\circ} + AB \quad \text{o} \quad P = \alpha \cdot r + AB$$

Trapecio circular

El área de un trapecio circular es igual a la diferencia entre las áreas de los sectores circulares determinados por el ángulo α y los radios R y r, respectivamente.



$$A = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360^\circ}$$

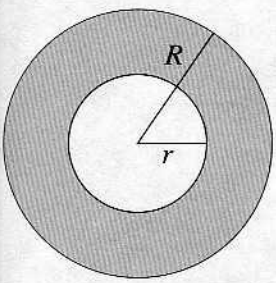
$$A = \frac{1}{2}\alpha \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

El perímetro del trapecio circular es igual a la suma de los arcos y el doble de la diferencia entre los radios.

$$P = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi \cdot (R + r)}{180^\circ} + 2(R - r) \quad \text{o} \quad P = \alpha \cdot (R + r) + 2(R - r)$$

Anillo circular

El área del anillo circular es igual a la diferencia entre las áreas de los círculos de radios R y r, respectivamente.



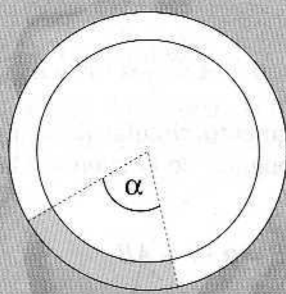
$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

El perímetro del anillo circular es igual a la suma de los perímetros de ambas circunferencias.

$$P = 2\pi\,(R + r)$$

Ejercicios resueltos

1. Los círculos concéntricos tienen radios de 10 y 8 cm, respectivamente, y el ángulo α mide 72°. Determinemos el área y el perímetro del trapecio circular.



Solución:

El área del trapecio circular está dada por:

$$A = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360°}$$

Reemplazando los datos, nos queda:

$$A = \frac{72° \cdot \pi \cdot (100 - 64)}{360°}\ \text{cm}^2$$

$$A = 7{,}2\pi\ \text{cm}^2$$

El perímetro está dado por:

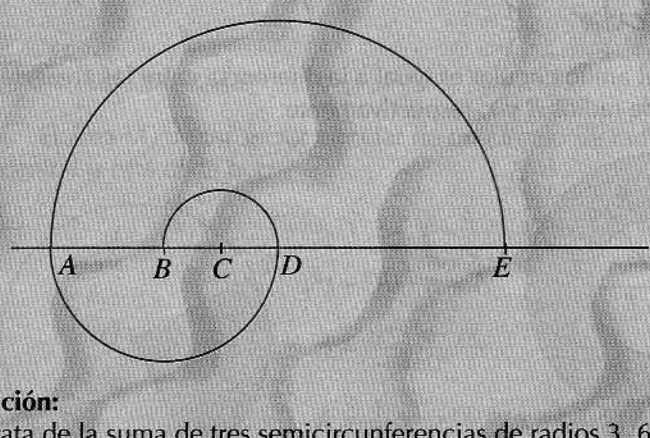
$$P = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (R + r)}{180°} + 2(R - r)$$

Reemplazando, nos queda:

$$P = \left(\frac{72°\pi \cdot 18}{180°} + 2 \cdot 2\right)\ \text{cm}$$

$$P = (7{,}2\pi + 4)\ \text{cm}$$

2. Los puntos B, C y D son los centros de las tres semicircunferencias de la figura. Si $\overline{AD}$ mide 12 cm, calculemos la longitud de la curva.



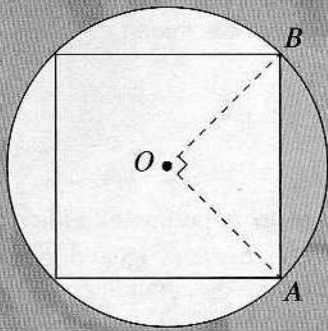
Solución:

Se trata de la suma de tres semicircunferencias de radios 3, 6 y 12 cm.

$$L = \pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3$$

$$L = 21\ \pi\ \text{cm}$$

3. Calculemos el perímetro y el área del segmento circular determinado por el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia de 10 cm de radio.



Solución:

En primer lugar, determinemos la medida del lado $\overline{AB}$ del cuadrado inscrito en la circunferencia. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$OA^2 + OB^2 = AB^2$

$100 + 100 = x^2$

$200 = x^2$

$x = 10\sqrt{2}$ cm

El perímetro del segmento circular es la suma del arco correspondiente, que equivale a un cuarto de circunferencia, y el lado del cuadrado:

$P = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r + AB$

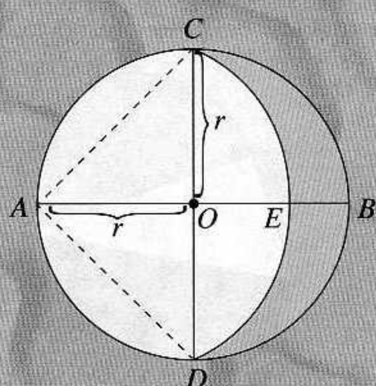
$P = (5\pi + 10\sqrt{2})$ cm

El área equivale a la cuarta parte de la diferencia entre el área del círculo de radio 10 y el área del cuadrado de lado $10\sqrt{2}$.

$A = \frac{1}{4} \cdot (100\pi - 200)$ cm^2

$A = (25\pi - 50)$ cm^2

4. En la figura, O es el centro de la circunferencia de radio r. Los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares. Determinemos el perímetro de la figura sombreada.



Solución:

Calculemos la medida del radio $\overline{AC}$ de la circunferencia que determina el arco CED. Éste corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden r.

$AC^2 = r^2 + r^2$

$AC^2 = 2r^2$

$AC = r\sqrt{2}$ cm

El ángulo CAD es recto. El perímetro pedido es igual a la suma de los arcos $\overset{\frown}{CBD}$ y $\overset{\frown}{CED}$, es decir, es igual a la mitad de la circunferencia de radio r más un cuarto de circunferencia de radio $r\sqrt{2}$.

$P = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r + \frac{1}{4} 2\pi r \cdot \sqrt{2}$ cm

$P = \pi \cdot r + \frac{\pi r\sqrt{2}}{2}$ cm

$P = \frac{2\pi r + \pi r\sqrt{2}}{2}$ cm

$P = \frac{\pi r\ (2 + \sqrt{2})}{2}$ cm

5. La longitud de un arco de circunferencia de 60 cm de radio es 40 cm. Determinemos la medida del ángulo correspondiente.

Solución:

La longitud del arco de circunferencia de radio r y ángulo α está dada por:

$L = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180^\circ}$

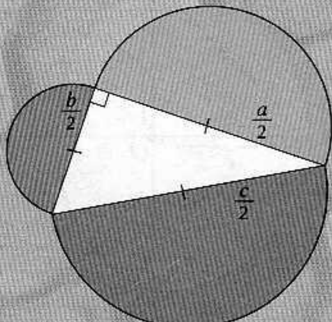
Reemplazando los datos, obtenemos:

$40 = \frac{\alpha\pi \cdot 60}{180^\circ}$

de donde:

$\alpha = \left(\frac{120}{\pi}\right)^\circ$

6. Demuestre que la suma de las áreas de los semicírculos trazados sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo trazado sobre la hipotenusa del mismo triángulo.



Solución:

Sabemos que: $a^2 + b^2 = c^2$

La suma A_1 de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es:

$$A_1 = \frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right)$$

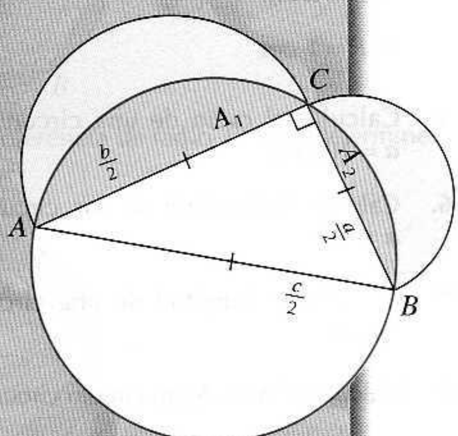
y el área A_2 del semicírculo construido sobre la hipotenusa es:

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{c^2}{4}$$

Pero como $a^2 + b^2 = c^2$, se tiene que: $A_1 = A_2$

7. El triángulo ABC rectángulo está inscrito en el círculo. Sobre sus catetos se han trazado semicircunferencias. Demuestre que la suma de las áreas de las regiones sombreadas es igual al área del triángulo.



Solución:

Sea A el área sombreada de color amarillo y sean A_1 y A_2 las áreas comprendidas entre el semicírculo de radio $\frac{c}{2}$ y el triángulo ABC.

Entonces, $A_1 + A_2 =$ área del semicírculo de radio $\frac{c}{2}$ menos el área del triángulo ABC.

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{c^2}{8}\pi - \frac{a \cdot b}{2}$$

El área sombreada A es igual a la suma de las áreas de semicírculos de radios $\frac{a}{2}$ y $\frac{b}{2}$ menos $A_1 + A_2$.

$$A = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{8}\pi - \frac{a \cdot b}{2}\right)$$

$$A = \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{8}\pi + \frac{a \cdot b}{2}$$

Pero, $a^2 + b^2 = c^2$, entonces:

$A = \frac{a \cdot b}{2}$, que es el área del triángulo rectángulo ABC.

Ejercicios

1. Calcular el área y el perímetro de un círculo de radio:

a) $r = 15$ cm c) $r = 1{,}5$ cm

b) $r = 3\sqrt{2}$ d) $r = 2\sqrt{5}$ cm

2. Calcular el radio de una circunferencia si su perímetro es:

a) $P = \frac{3}{4}\pi$ cm c) $P = 16{,}5\ \pi$ cm

b) $P = 15\pi$ cm d) $P = 0{,}03\pi$ cm

3. Calcular el radio de un círculo si su área es:

a) $A = \frac{9}{16}\pi$ cm^2 c) $A = 6{,}25\pi$ cm^2

b) $A = 121\pi$ cm^2 d) $A = 0{,}3\ \pi$ cm^2

4. Calcular el diámetro de una circunferencia si su longitud es:

a) $P = \pi$ cm c) $P = \frac{3}{2}\pi$ cm

b) $P = 1$ cm d) $P = 75$ m

5. Calcular el radio de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado $a = 10$ cm.

6. Calcular la longitud de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado $a = 3\sqrt{2}$.

7. Calcular la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 24 cm.

8. Calcular el área de un círculo circunscrito a un triángulo equilátero de lado 8 cm.

9. Calcular la longitud de un arco de circunferencia de 18 cm de radio, correspondiente a un ángulo central de 72°.

10. Calcular la longitud de un arco de circunferencia de 34 cm de radio, correspondiente a un ángulo central de 30°.

11. Calcular la longitud de un arco de circunferencia de 24 cm de radio, correspondiente a un ángulo central de 150°.

12. Calcular la longitud de un arco de circunferencia de 3,24 cm de radio, correspondiente a un ángulo central de 72°.

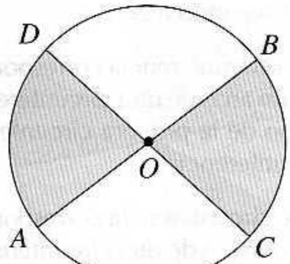
13. Calcular el área del sector circular de radio $r = 12$ cm y ángulo $\alpha = 40°$.

14. Calcular el área del sector circular de radio $r = 33$ cm y ángulo $\alpha = 120°$.

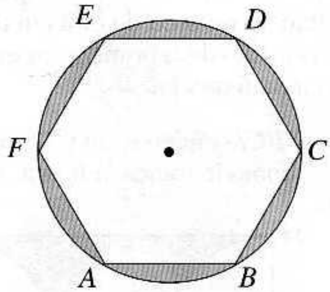
15. Calcular el área del sector circular de radio $r = 12{,}5$ cm y ángulo $\alpha = 72°$.

16. Calcular el área del sector circular de radio $r = \sqrt{6}$ cm y ángulo $\alpha = 200°$.

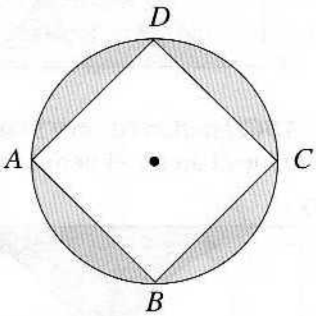
17. En la figura, O es el centro de la circunferencia de radio 16 cm; el ángulo AOC mide 100°. Determine el área de la región sombreada.



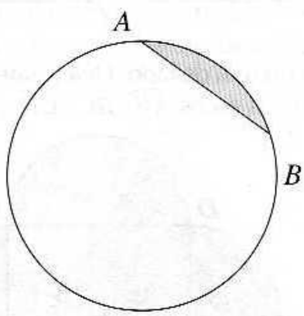
18. El hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito en la circunferencia de radio $r = 30$ cm. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



19. El cuadrado $ABCD$ está inscrito en la circunferencia de radio 32 cm. Determine el perímetro y el área de la región sombreada.



20. La cuerda AB corresponde a un lado de un hexágono inscrito en una circunferencia de 24 cm de radio. Determine el perímetro y el área del segmento circular correspondiente.



21. La longitud de un arco de una circunferencia de 20 cm de radio es igual a la longitud de un arco de otra circunferencia de 10 cm de radio. Si el primer arco mide 54°, determine la medida del segundo arco.

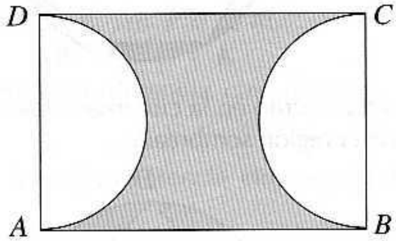
22. La longitud de un arco de una circunferencia de 25 cm de radio es igual a la longitud de un arco de otra circunferencia de 60 cm de radio. Si el primer arco mide 75°, determine la medida del segundo arco.

23. La longitud de un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo central de 80° es igual a la longitud de un arco de otra circunferencia correspondiente a un ángulo central de 20°. Si el radio de la primera circunferencia es de 15 cm, determine el radio de la segunda circunferencia.

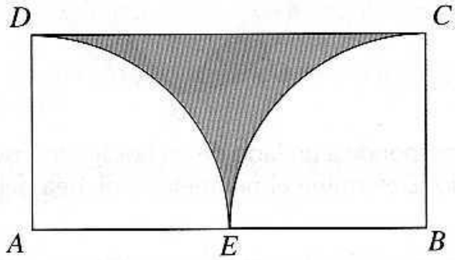
24. La longitud de un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo central de 28° es igual a la longitud de un arco de otra circunferencia correspondiente a un ángulo central de 150°. Si el radio de la primera circunferencia es de 90 cm, determine el radio de la segunda circunferencia.

25. La longitud de un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo central de 120° es igual a la longitud de un arco de otra circunferencia correspondiente a un ángulo central de 40°. Si el radio de la primera circunferencia es de 32 cm, determine el radio de la segunda circunferencia.

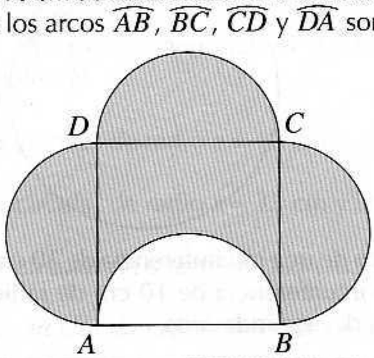
26. Los lados del rectángulo $ABCD$ miden 6 cm y 4 cm. Sobre sus lados se han descrito dos semicircunferencias, como lo indica la figura. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



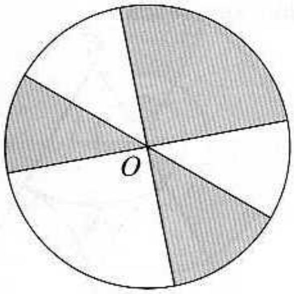
27. Los lados del rectángulo $ABCD$ miden 10 cm y 5 cm. Los arcos $\overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{CE}$ son cuartos de circunferencia. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



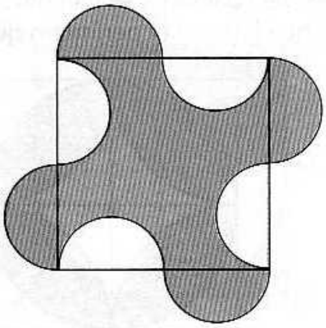
28. $ABCD$ es un cuadrado de 10 cm de lado. Determine el área y el perímetro de la región sombreada sabiendo que los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{DA}$ son semicircunferencias.



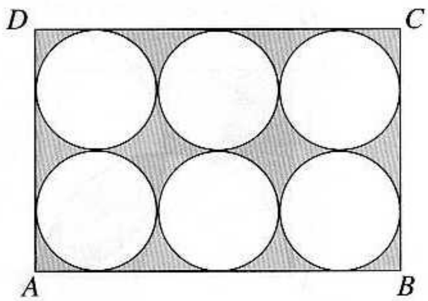
29. Determine el área y el perímetro de la región sombreada sabiendo que el radio del círculo es 18 cm y que O es el centro del círculo.



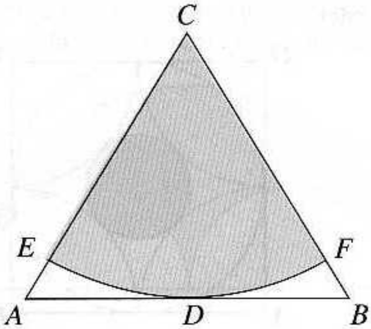
30. $ABCD$ es un cuadrado de 16 cm de lado. Sobre cada uno de sus lados se describen dos semicircunferencias congruentes de diámetro 8 cm cada una. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



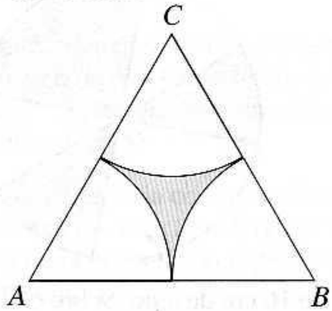
31. Los lados del rectángulo $ABCD$ miden 24 cm y 16 cm. Los 6 círculos son tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Qué porcentaje del área del rectángulo, aproximadamente, está sombreada?



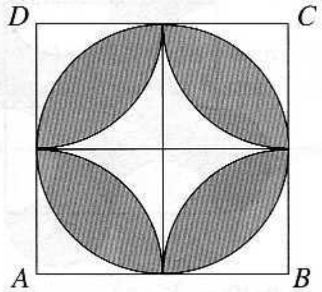
32. El triángulo ABC es equilátero de lado 12 cm. Determine el área y el perímetro de la región sombreada, sabiendo que $\widehat{EDF}$ es arco de circunferencia de centro C y radio $\overline{CD}$.



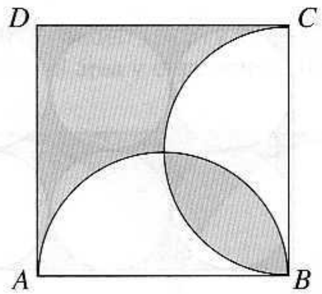
33. El triángulo ABC es equilátero de lado 12 cm. Con centro en cada uno de los vértices se han dibujado arcos de circunferencia de 6 cm de radio. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



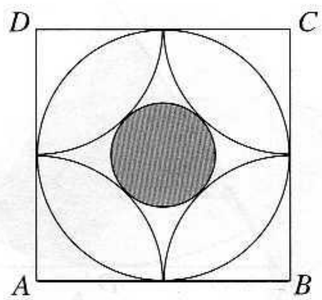
34. En el cuadrado $ABCD$ de 8 cm de lado se ha inscrito un círculo y, con centro en cada uno de los vértices del cuadrado, se han dibujado arcos de circunferencia de 4 cm de radio. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



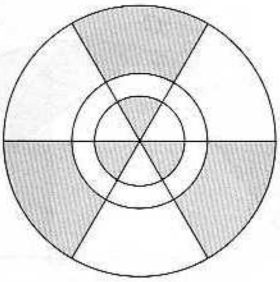
35. $ABCD$ es un cuadrado de 12 cm de lado. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se han trazado semicircunferencias. Determine el área y el perímetro de la región sombreada.



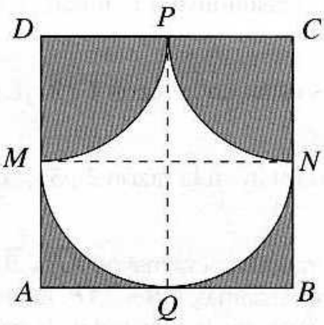
36. El cuadrado $ABCD$ está circunscrito al círculo de 4 cm de diámetro. Los arcos corresponden a cuartos de circunferencias con centro en cada uno de los vértices del cuadrado. El círculo interior es tangente a estos cuatro arcos. Determine el radio y el área del círculo interior.



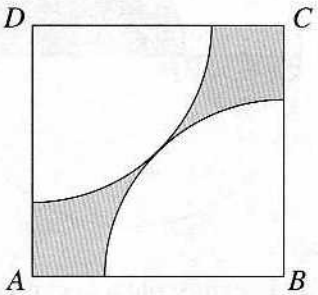
37. La figura muestra 3 círculos concéntricos de radios 2 cm, 3 cm y 6 cm. Determine el área de la región sombreada.



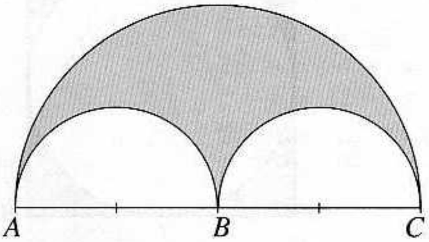
38. Determine el área y el perímetro de la región **no** sombreada sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de lado 10 cm y los arcos $\widehat{MP}$ y $\widehat{NP}$ son cuartos de circunferencia y el arco $\widehat{MQN}$ es una semicircunferencia.



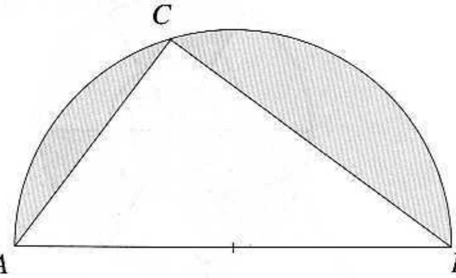
39. $ABCD$ es un cuadrado de 6 cm de lado y en su interior se han trazado 2 arcos de circunferencia tangentes entre sí; estos arcos corresponden a cuartos de circunferencia. Determine el área de la región sombreada.



40. Determine el área y el perímetro de la región sombreada sabiendo que la semicircunferencia mayor tiene un radio de 20 cm y que las semicircunferencias interiores son congruentes, tangentes a la circunferencia mayor y tangentes entre sí.



41. En la figura, el triángulo ABC está inscrito en la semicircunferencia de radio 10 cm. Si BC mide 16 cm, determine el área y el perímetro de la región sombreada.



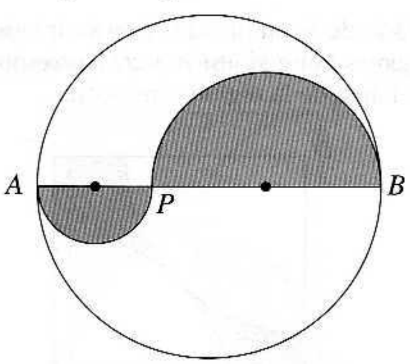
42. Si el radio de un círculo aumenta al doble, ¿en qué porcentaje aumentan su perímetro y su área?

43. Si el radio de un círculo disminuye a la mitad, ¿en qué porcentaje disminuyen su perímetro y su área?

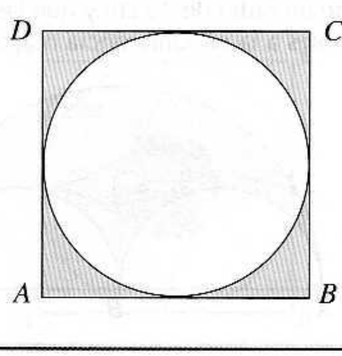
44. Los radios de 2 círculos están en la razón 1 : 3. ¿En qué razón están sus perímetros y sus áreas?

45. Los radios de 2 círculos están en la razón 2 : 5. ¿En qué razón están sus perímetros y sus áreas?

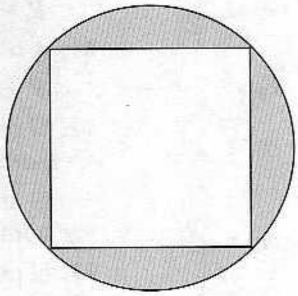
46. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia mayor, $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son diámetros de las dos semicircunferencias interiores. Además, $PB = 2AP$. Determine el perímetro y el área de la región sombreada, sabiendo que la longitud de la circunferencia mayor es 12π cm.



47. En la figura, el cuadrado está circunscrito a la circunferencia. ¿Qué porcentaje del área del cuadrado es el área de la región sombreada? (Aproxime el valor de π a 3,14).



48. El cuadrado está inscrito en el círculo. ¿Qué porcentaje aproximado del área del círculo es el área de la región sombreada?



Soluciones

1. a) $A = 225\pi$ cm^2
$P = 30\pi$ cm
b) $A = 18\pi$ cm^2
$P = 6\sqrt{2}\,\pi$ cm
c) $A = 2{,}25\pi$ cm^2
$P = 3\pi$ cm
d) $A = 20\pi$ cm^2
$P = 4\sqrt{5}\,\pi$ cm

2. a) $\frac{3}{8}$ cm
b) 7,5 cm
c) 8,25 cm
d) 0,015 cm

3. a) 0,75 cm
b) 11 cm
c) 2,5 cm
d) $\sqrt{0{,}3}$ cm

4. a) 1 cm
b) $\frac{1}{\pi}$ cm
c) $\frac{3}{2}$ cm
d) $\frac{75}{\pi}$ cm

5. $5\sqrt{2}$

6. 6π cm

7. 24π cm

8. $\frac{64}{3}\pi$ cm^2

9. $7{,}2\pi$ cm

10. $\frac{17}{3}\pi$ cm

11. 20π cm

12. $1{,}296\pi$ cm

13. 16π cm^2

14. 363π cm^2

15. $31{,}25\pi$ cm^2

16. $\frac{10}{3}\pi$ cm^2

17. $\frac{1.024}{9}\pi$ cm^2

18. $A = 450(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
$P = (60\pi + 180)$ cm

19. $A = (1.024\pi - 512)$ cm^2
$P = (64\pi + 64\sqrt{2})$ cm

20. $A = (96\pi - 144\sqrt{3})$ cm^2
$P = (8\pi + 24)$ cm

21. 108°

22. 31,25°

23. 60 cm

24. 16,8 cm

25. 96 cm

26. $A = (24 - 4\pi)$ cm^2
$P = (12 + 4\pi)$ cm

27. $A = (50 - 12{,}5\pi)$ cm^2
$P = (5\pi + 10)$ cm

28. $A = (100 + 25\pi)$ cm^2

$P = 20\pi$ cm

29. $A = 162\pi$ cm^2
$P = (18\pi + 36)$ cm

30. $A = 256$ cm^2
$P = 32\pi$ cm

31. 21,5%

32. $A = 18\pi$ cm^2
$P = (2\pi\sqrt{3} + 12\sqrt{3})$ cm

33. $A = (36\sqrt{3} - 18\pi)$ cm^2
$P = 6\pi$ cm

34. $A = (32\pi - 64)$ cm^2
$P = 16\pi$ cm

35. $A = 72$ cm^2
$P = (24 + 12\pi)$ cm

36. $A = (12 - 8\sqrt{2})$ cm^2
$r = (2\sqrt{2} - 2)$ cm

37. $15{,}5\pi$ cm^2

38. $A = 50$ cm^2
$P = 10\pi$ cm

39. $(36 - 9\pi)$ cm^2

40. $A = 100\pi$ cm^2
$P = 40\pi$ cm

41. $A = (50\pi - 96)$ cm^2
$P = (28 + 10\pi)$ cm

42. El perímetro se duplica, es decir, aumenta en 100%.
El área se cuadruplica, es decir, aumenta en 300%.

43. El perímetro disminuye en 50%.
El área disminuye en 75%.

44. Sus perímetros están en razón 1 : 3.
Sus áreas están en razón 1 : 9.

45. Sus perímetros están en razón 2 : 5.
Sus áreas están en razón 4 : 25.

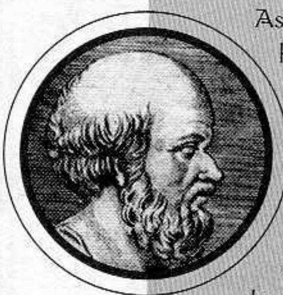
46. $A = 10\pi$ cm^2
$P = (6\pi + 12)$ cm

47. Es 21,5%, aproximadamente.

48. Es 36,3%, aproximadamente.

ERATÓSTENES

(Cirene, c. 284 a.J.C.-Alejandría, c. 192 a.J.C.)

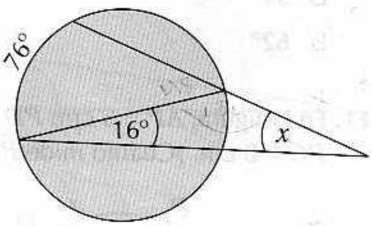


Astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego. Vivió en Atenas hasta que fue llamado a Alejandría (245 a.J.C.) para educar a los hijos de Tolomeo III y para dirigir la biblioteca de la ciudad. Célebre en matemáticas por la criba que lleva su nombre, utilizada para hallar los números primos, y por su mesolabio, instrumento de cálculo usado para resolver la media proporcional, fue el primero en establecer la longitud de la circunferencia de la Tierra (252.000 estadios: casi 40 millones de metros) con un error de unos 90 kilómetros respecto de las estimaciones actuales. También calculó la oblicuidad de la eclíptica por medio de la observación de las diferencias existentes entre las altitudes del Sol durante los solsticios de verano e invierno.

Prueba de selección múltiple

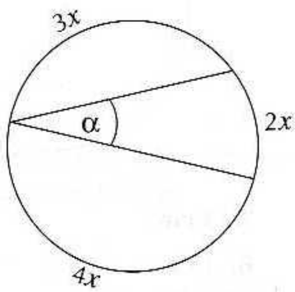
1. ¿Cuál es el valor de x en la figura?

A. 22°
B. 30°
C. 32°
D. 38°
E. 44°



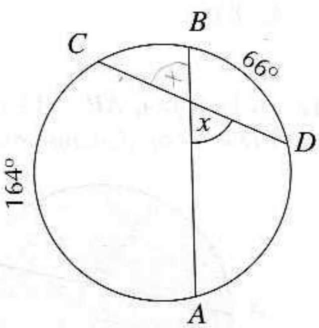
2. ¿Cuánto mide α en la figura?

A. 20°
B. 40°
C. 80°
D. 36°
E. 72°



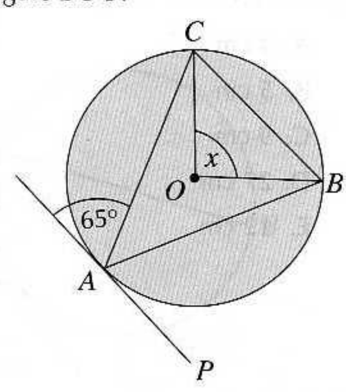
3. ¿Cuánto mide x en la figura?

A. 115°
B. 65°
C. 98°
D. 49°
E. 32,5°



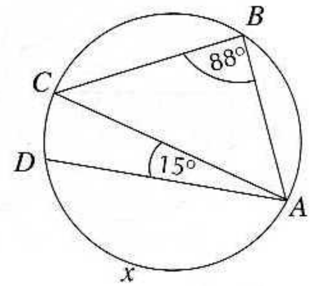
4. El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{BC}$, $\overline{AP}$ es tangente a la circunferencia en A; O es el centro de la circunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo BOC?

A. 25°
B. 50°
C. 100°
D. 65°
E. 130°



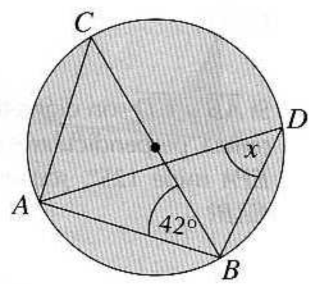
5. El ángulo DAC mide 15°; el ángulo ABC mide 88°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{AD}$?

A. 103°
B. 118°
C. 59°
D. 146°
E. 80,5°

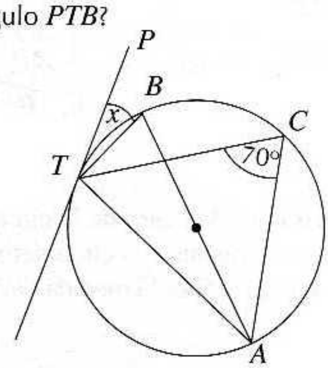


6. Si $\overline{BC}$ es diámetro de la circunferencia y el ángulo ABC mide 42°, ¿cuánto mide el ángulo ADB?

A. 42°
B. 84°
C. 48°
D. 24°
E. 21°

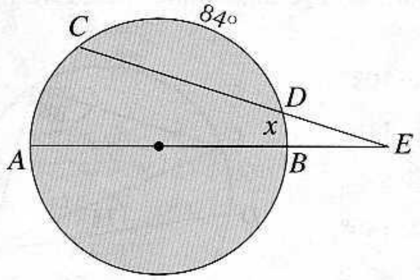


7. Si $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia en el punto T y $\overline{AB}$ es diámetro, ¿cuánto mide el ángulo PTB?



A. 40°
B. 80°
C. 35°
D. 20°
E. 70°

8. Si $\overline{AB}$ es el diámetro de la circunferencia y el ángulo DEB mide 18°, ¿cuánto mide el arco $\overset{\frown}{BD}$?



A. 57°

B. 66°

C. 33°

D. 60°

E. 24°

9. Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros de la circunferencia, perpendiculares entre sí y el ángulo EPA mide 125°, ¿cuánto mide el ángulo EAB?

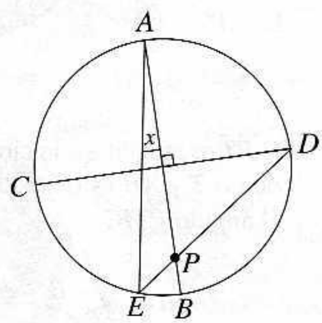
A. 10°

B. 20°

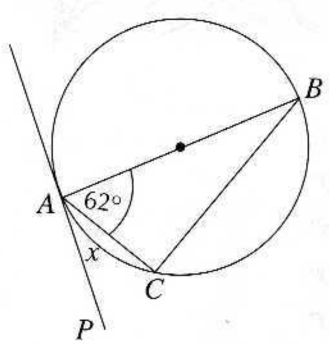
C. 25°

D. 31°

E. 62°



10. Si $\overline{AB}$ es el diámetro de la circunferencia y $\overline{AP}$ es tangente a la circunferencia en el punto A, ¿cuál es la medida del arco $\overset{\frown}{AC}$?



A. 14°

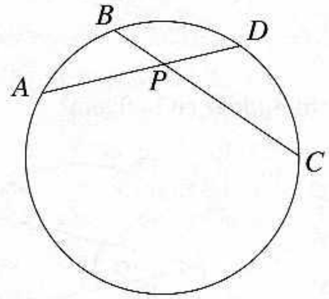
B. 28°

C. 56°

D. 31°

E. 62°

11. En la figura, AP = 6 cm; PD = 4 cm; PC = 8 cm. ¿Cuánto mide $\overline{PB}$?



A. 3 cm

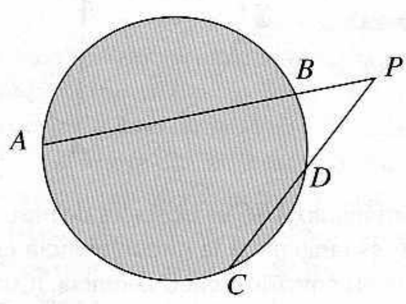
B. 4 cm

C. 5 cm

D. 6 cm

E. 8 cm

12. En la figura, AP = 12 cm; AB = 9 cm; PD = 4 cm. ¿Cuánto mide $\overline{CD}$?



A. 4 cm

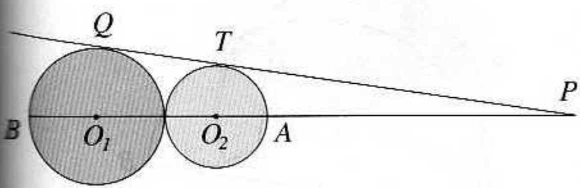
B. 5 cm

C. 9 cm

D. 27 cm

E. 12 cm

13. Las circunferencias de centros O_1 y O_2 son tangentes entre sí. Sus radios miden 4 cm y 3 cm, respectivamente. $AP = 18$ cm. ¿Cuánto mide PQ?



A. 16 cm

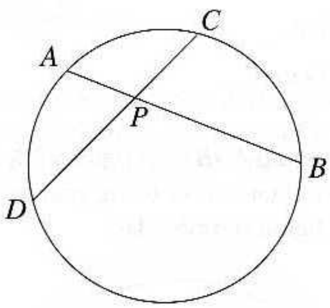
B. $16\sqrt{3}$ cm

C. $4\sqrt{2}$ cm

D. 4 cm

E. $8\sqrt{2}$ cm

14. En la figura, $AP = 4$ cm; $PB = 12$ cm; $CP = 6$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{CD}$?



A. 2 cm

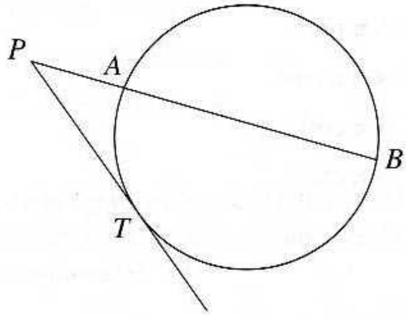
B. 8 cm

C. 14 cm

D. 24 cm

E. 48 cm

15. En la figura, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia en T. $AP = 2$ cm; $AB = 6$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{PT}$?



A. $2\sqrt{3}$ cm

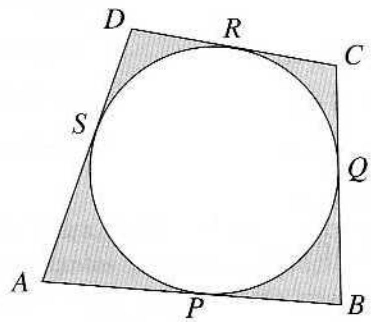
B. $3\sqrt{2}$ cm

C. 4 cm

D. 16 cm

E. 12 cm

16. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito en la circunferencia, siendo P, Q, R y S los puntos de tangencia. $PB = 2$ cm; $CQ = 3$ cm; $DR = 4$ cm; $AS = 6$ cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero?



A. 15 cm

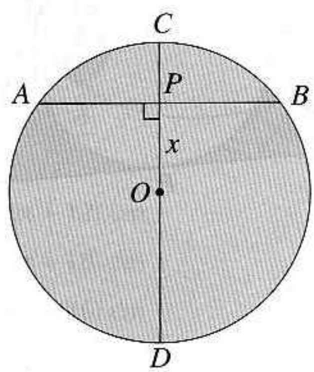
B. 30 cm

C. 60 cm

D. 16 cm

E. Otro valor

17. En la figura, O es el centro de la circunferencia de radio 5 cm; $AB = 8$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{OP}$?



A. 1 cm

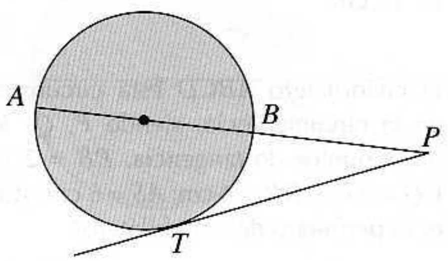
B. 2 cm

C. 3 cm

D. 4 cm

E. Falta información

18. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia; $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia en el punto T; $TP = 12$ cm; $BP = 8$ cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



A. 4 cm

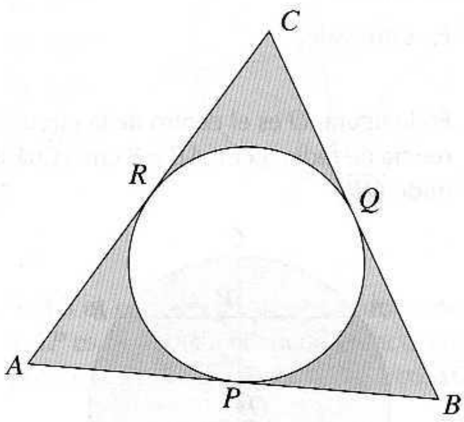
B. 5 cm

C. 6 cm

D. 9 cm

E. 10 cm

19. La circunferencia está inscrita en el triángulo ABC; P, Q y R son los puntos de tangencia. El perímetro del triángulo es 40 cm y $BP = 7$ cm; $AB = 15$ cm. ¿Cuánto mide $\overline{CQ}$?



A. 5 cm

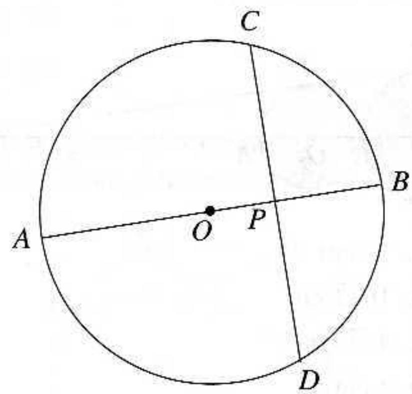
B. 6 cm

C. 7 cm

D. 8 cm

E. Falta información.

20. El la figura, $OP = 3$ cm; $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia; $CP = PD = 4$ cm. ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia?



A. 4 cm

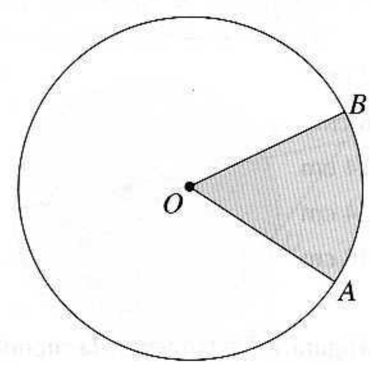
B. 5 cm

C. 6 cm

D. 8 cm

E. 10 cm

21. Si el ángulo AOB de la figura mide 60° y el radio del círculo es 6 cm, ¿cuál es el área de la figura sombreada?



A. $3\,\pi$ cm^2

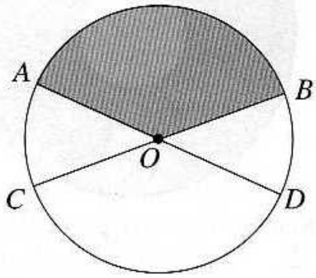
B. $6\,\pi$ cm^2

C. $4{,}5\,\pi$ cm^2

D. $2\,\pi$ cm^2

E. $4\,\pi$ cm^2

22. El arco $\overset{\frown}{BD}$ mide 45°, el radio mide 7,5 cm y O es el centro de la circunferencia. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



A. $(7{,}5 + \frac{45}{8}\pi)$ cm

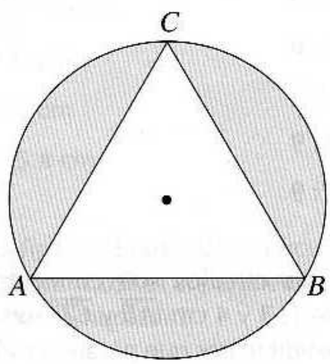
B. $(15 + \frac{45}{8}\pi)$ cm

C. 60π cm

D. $\frac{45}{8}\pi$ cm

E. $\frac{56{,}25}{4\pi}$ cm

23. El triángulo equilátero ABC está inscrito en la circunferencia de radio $4\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A. $36\sqrt{3}$ cm^2

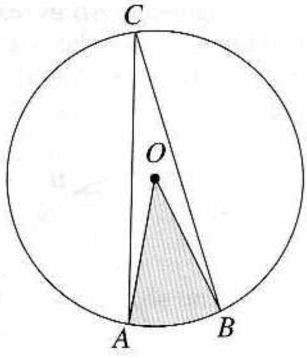
B. $48\pi - 18\sqrt{3}$ cm^2

C. $16\pi - 36\sqrt{3}$ cm^2

D. $48\pi - 36\sqrt{3}$ cm^2

E. $16\pi - 18\sqrt{3}$ cm^2

24. En la figura, el ángulo ACB mide 18° y $\overline{OA}$ mide 8 cm. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A. 18π cm^2

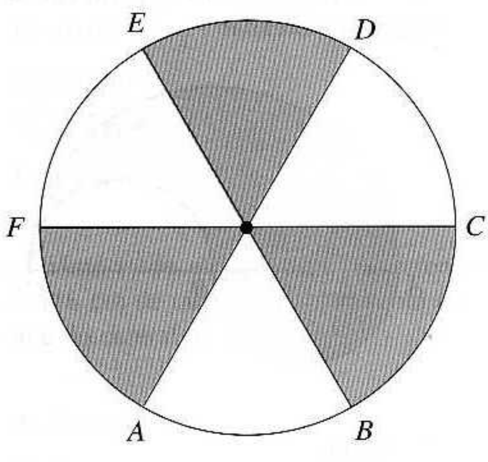
B. $1{,}8\pi$ cm^2

C. 64π cm^2

D. $1{,}6\pi$ cm^2

E. $6{,}4\pi$ cm^2

25. En la figura, A, B, C, D, E y F son puntos equidistantes en una circunferencia de radio 6 cm. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



A. $(6\pi + 12)$ cm

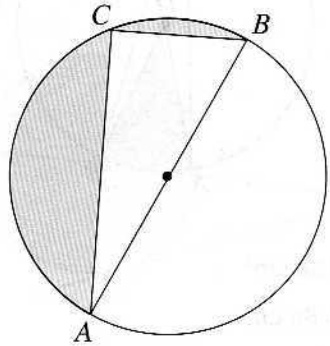
B. $(6\pi + 18)$ cm

C. $(6\pi + 36)$ cm

D. $(12\pi + 12)$ cm

E. $(12\pi + 36)$ cm

26. En la figura siguiente, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de radio 5 cm. Si $\overline{CB}$ mide 6 cm, ¿cuál es el área de la región sombreada?



A. $(25\pi - 24)$ cm^2

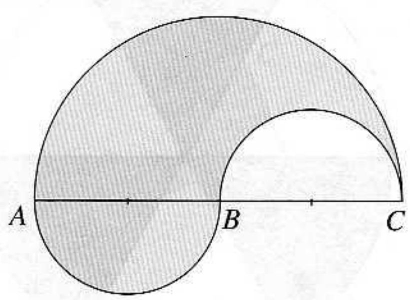
B. $(25\pi - 12)$ cm^2

C. $(12{,}5\pi - 24)$ cm^2

D. $(12{,}5\pi - 6)$ cm^2

E. $(25\pi - 6)$ cm^2

27. En la figura, B es punto medio de $\overline{AC}$; $AC = 4$ cm. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



A. 8π cm

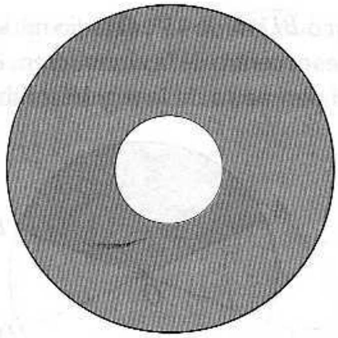
B. 6π cm

C. 4π cm

D. 3π cm

E. 2π cm

28. En la figura, los radios de los círculos están en la razón 1 : 3. ¿Qué fracción del área del círculo mayor es la región sombreada?



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{8}{9}$

E. $\frac{1}{6}$

29. Si los radios de 2 circunferencias están en la razón 1 : 3, ¿en qué razón están sus áreas?

A. 1 : 3

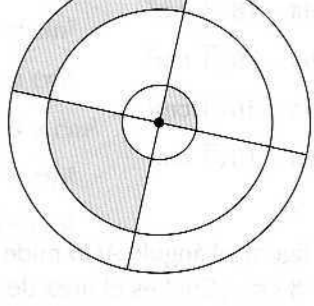
B. 1 : 6

C. 2 : 3

D. 2 : 9

E. 1 : 9

30. Los tres círculos son concéntricos de radios 1, 3 y 4 cm. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas perpendiculares que pasan por el centro. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A. 13π cm^2

B. $\dfrac{\pi + 7\pi}{4}$ cm^2

C. 4π cm^2

D. 8π cm^2

E. $\dfrac{2\pi + \pi}{4}$ cm^2

31. ¿Cuál es el área del sector circular de un círculo de radio 12 cm, correspondiente a un ángulo central de 45º?

A. 18 cm^2

B. $18\,\pi$ cm^2

C. 36 cm^2

D. $36\,\pi$ cm^2

E. $3\,\pi$ cm^2

32. ¿Cuál es el radio de un círculo si su perímetro es 26 cm?

A. 13 cm

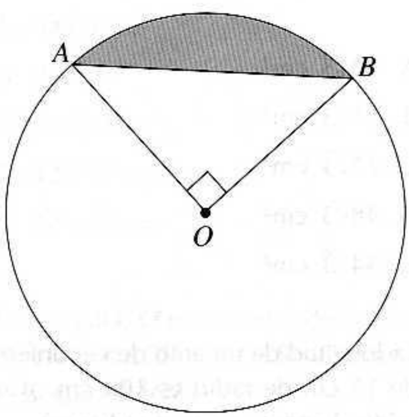
B. $\dfrac{13}{\pi}$ cm

C. $13\,\pi$ cm

D. 6,5 cm

E. $6{,}5\,\pi$ cm

33. En la figura, el radio de la circunferencia es 14 cm. ¿Cuál es el perímetro del sector circular sombreado?



A. 21π

B. $7\pi + 14$

C. $7\pi + 14\sqrt{2}$

D. $7\pi + 7\pi r$

E. $14\pi + 7\sqrt{2}$

34. ¿Cuál es el radio de un círculo cuya área es $A = 125\pi$ cm^2?

A. 5 cm

B. $5\sqrt{5}$ cm

C. 15 cm

D. $15\sqrt{5}$ cm

E. 25 cm

35. ¿Cuál es el área del sector circular correspondiente a un ángulo de 40° y a un radio de 12 cm?

A. $3{,}6\pi$ cm^2

B. 6π cm^2

C. 8π cm^2

D. 12π cm^2

E. 16π cm^2

36. ¿Cuánto mide el arco de circunferencia de 16 cm de radio correspondiente a un ángulo central de 45º?

A. 2π cm

B. 4π cm

C. 6π cm

D. 8π cm

E. 12π cm

37. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio?

A. 16 cm

B. 40 cm

C. 80 cm

D. $40\sqrt{2}$ cm

E. $80\sqrt{2}$ cm

38. ¿Cuál es el área de un círculo circunscrito a un cuadrado de lado 5 cm?

A. $2{,}5\pi$ cm^2

B. $6{,}25\pi$ cm^2

C. 10π cm^2

D. $12{,}5\pi$ cm^2

E. 25π cm^2

39. Un triángulo equilátero de 36 cm de lado está inscrito en una circunferencia. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

A. 6 cm

B. 12 cm

C. 18 cm

D. $12\sqrt{3}$ cm

E. $18\sqrt{3}$ cm

40. ¿Cuál es el perímetro del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de $10\sqrt{3}$ cm de radio?

A. 30 cm

B. 60 cm

C. 90 cm

D. $30\sqrt{3}$ cm

E. $90\sqrt{3}$ cm

41. El área de un sector circular de 12 cm de radio es $28{,}8\pi$ cm^2. ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente?

A. 18°

B. 24°

C. 36°

D. 45°

E. 72°

42. La longitud de un arco de circunferencia de 50 cm de radio es $6{,}25\pi$ cm. ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente?

A. 11,25°

B. 22,5°

C. 31,25°

D. 16°

E. 45°

43. El área de un sector circular de 18 cm de radio es 36π cm^2. ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente?

A. 20°

B. 25°

C. 40°

D. 36°

E. 45°

44. Una circunferencia de 8 cm de radio está circunscrita a un triángulo equilátero. ¿Cuál es el área del triángulo?

A. $18\sqrt{3}$ cm^2

B. $24\sqrt{3}$ cm^2

C. $27\sqrt{3}$ cm^2

D. $48\sqrt{3}$ cm^2

E. $54\sqrt{3}$ cm^2

45. La longitud de un arco de circunferencia de 15 cm de radio es 10π cm. ¿Cuánto mide el ángulo correspondiente?

A. 15°

B. 30°

C. 60°

D. 120°

E. 150°

46. El área del sector circular correspondiente a un ángulo de 40° es 25π cm². ¿Cuánto mide el radio?

A. 5 cm

B. 10 cm

C. 15 cm

D. 20 cm

E. 25 cm

47. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado circunscrito a una circunferencia cuya área es $6,25\pi$ cm²?

A. 10 cm

B. 20 cm

C. 40 cm

D. $10\sqrt{2}$ cm

E. $20\sqrt{2}$ cm

48. ¿Cuál es el perímetro del círculo circunscrito a un cuadrado de lado 9 cm?

A. 9π cm

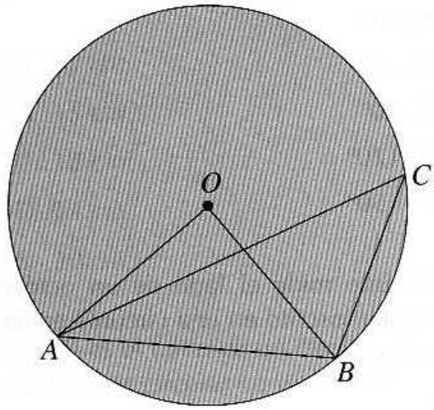
B. $9\sqrt{2}$ cm

C. $9\pi\sqrt{2}$ cm

D. $12\pi\sqrt{2}$ cm

E. $18\pi\sqrt{2}$ cm

49. En la figura, O es el centro de la circunferencia y $\measuredangle ACB = \measuredangle OAB$. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle AOB$?



A. 22,5°

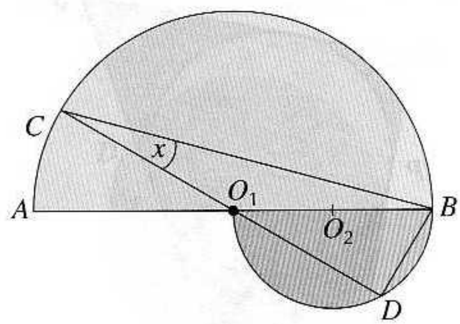
B. 30°

C. 45°

D. 60°

E. 90°

50. En la figura, O_1 y O_2 son centros de dos semicircunferencias y el ángulo ABD mide 35°. ¿Cuánto mide el ángulo DCB?



A. 17,5°

B. 35°

C. 27,5°

D. 55°

E. Falta información

51. El área de un sector circular de radio 9 cm es 27π cm². ¿Cuál es la medida del ángulo correspondiente?

A. 30°

B. 45°

C. 90°

D. 120°

E. 150°

52. ¿Cuánto mide el lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio r?

A. $2r$

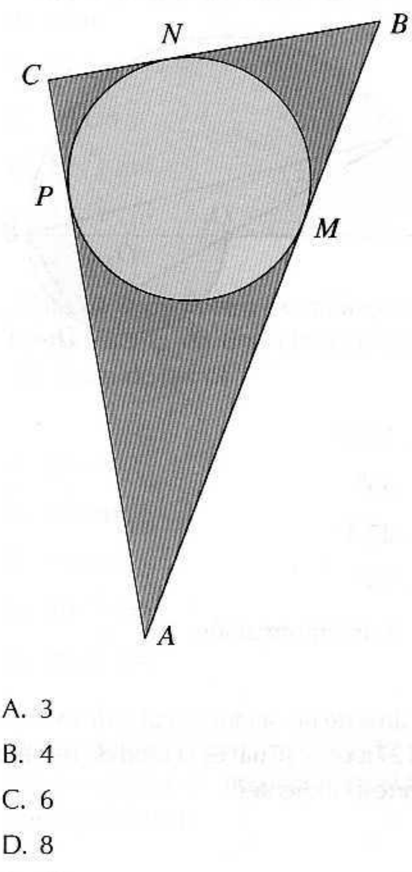
B. $r\sqrt{2}$

C. $2r\sqrt{2}$

D. $r\sqrt{2\sqrt{2}}$

E. $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

53. En la figura, la circunferencia está inscrita en el triángulo ABC cuyo perímetro es 38 cm, AM = 12 cm y CN = 3 cm. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{MB}$?



A. 3

B. 4

C. 6

D. 8

E. 12

54. ¿Cuál es el área de un sector circular de radio 15 cm, correspondiente a un ángulo de 120°?

A. 25π cm²

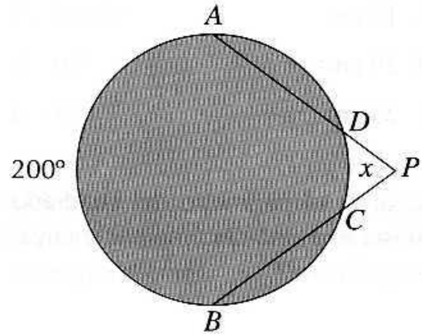
B. 30π cm²

C. 45π cm²

D. 50π cm²

E. 75π cm²

55. ¿En la figura, el ángulo APB mide 55°? ¿Cuál es el valor de x?



A. 145°

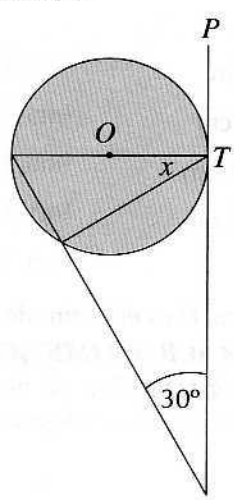
B. 72,5°

C. 127,5°

D. 135°

E. 90°

56. En la figura, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia de centro O en el punto T. ¿Cuál es el valor de x?



A. 15°

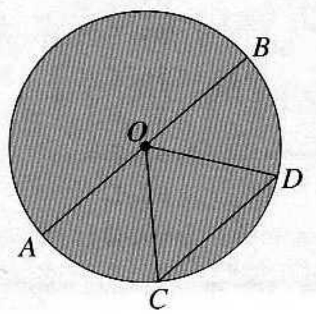
B. 25°

C. 30°

D. 60°

E. 75°

57. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de radio 10 cm, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y el ángulo COD mide 72°. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{AC}$?



A. 2π cm

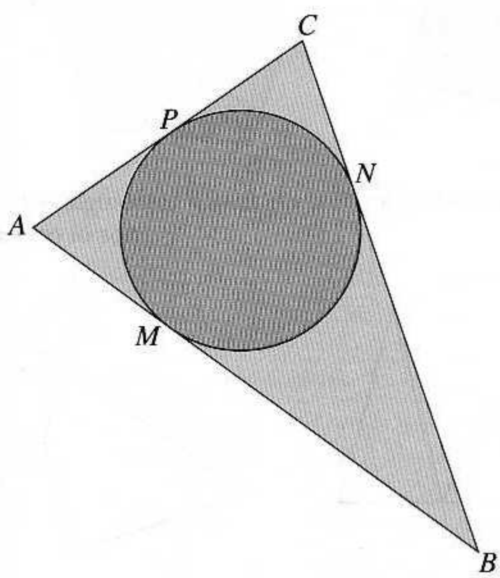
B. 3π cm

C. $5{,}6\pi$ cm

D. 6π cm

E. $7{,}2\pi$ cm

58. En la figura, la circunferencia está inscrita en el triángulo ABC; siendo M, N y P los puntos de tangencia. Además, $AB = 10$ cm, $AM = 4$ cm y $CN = 5$ cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?



A. 12 cm

B. 15 cm

C. 18 cm

D. 24 cm

E. 30 cm

59. ¿Cuál es el radio de un círculo si el área del sector circular correspondiente a un ángulo de 120° es 48π cm²?

A. 4 cm

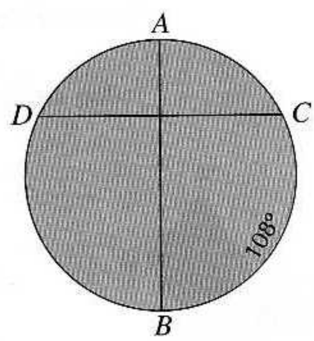
B. 6 cm

C. 8 cm

D. 12 cm

E. 16 cm

60. En la figura, las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares y los arcos $\widehat{DA}$ y $\widehat{AC}$ son congruentes. ¿Cuánto mide el arco $\widehat{AD}$?



A. 30°

B. 36°

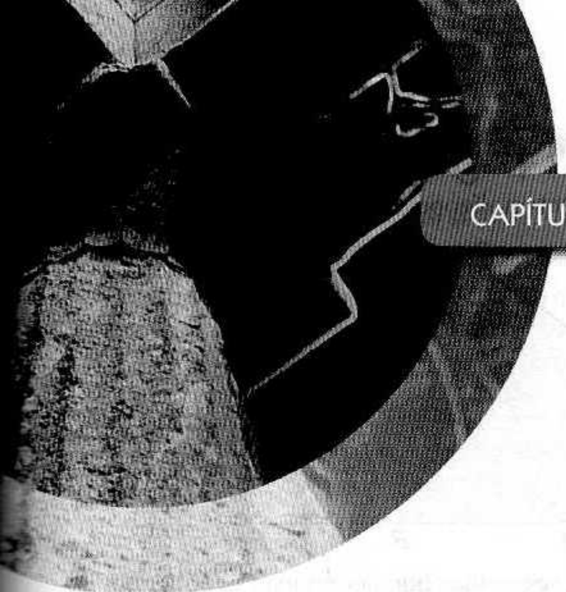
C. 60°

D. 72°

E. 90°

Soluciones

1. A	**16.** B	**31.** B	**46.** C
2. B	**17.** C	**32.** B	**47.** B
3. B	**18.** B	**33.** C	**48.** C
4. C	**19.** A	**34.** B	**49.** E
5. D	**20.** E	**35.** E	**50.** C
6. C	**21.** B	**36.** B	**51.** D
7. D	**22.** B	**37.** E	**52.** E
8. D	**23.** D	**38.** D	**53.** B
9. A	**24.** E	**39.** D	**54.** E
10. B	**25.** C	**40.** C	**55.** E
11. A	**26.** C	**41.** E	**56.** C
12. B	**27.** C	**42.** B	**57.** B
13. B	**28.** D	**43.** C	**58.** E
14. C	**29.** E	**44.** D	**59.** D
15. C	**30.** C	**45.** D	**60.** D

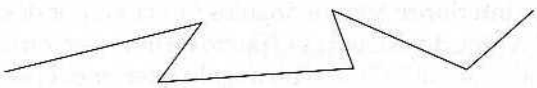


CAPÍTULO 7

Polígonos

Definición y elementos básicos 7.1

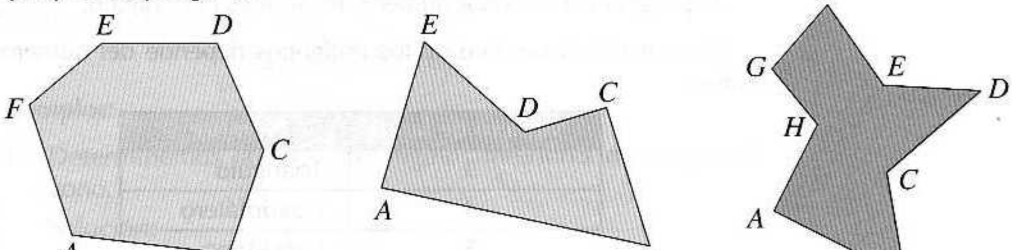
Se llama línea poligonal a la unión continua de segmentos, de modo que dos segmentos sucesivos tienen sólo un extremo en común, como el de la figura:



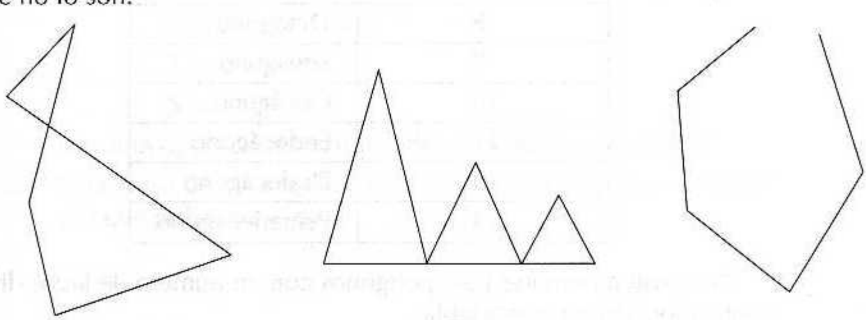
Una poligonal cerrada simple es aquella que no puede cortarse a sí misma, es decir, aquella en la cual dos segmentos no sucesivos no pueden tener puntos en común.

Un **polígono** es la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplos de polígonos:

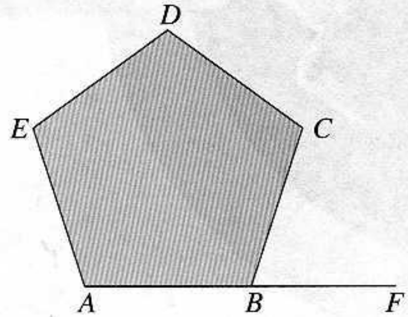


Las siguientes figuras no son polígonos: observe en cada caso por qué no lo son.



Elementos de un polígono

Consideremos el siguiente polígono:



Lados: son los trazos o segmentos que determinan el polígono. En la figura, los lados son AB; BC; CD; DE y EA.

Vértices: Son los puntos de intersección de dos lados consecutivos. Los vértices del polígono de la figura son A, B, C, D y E. En general, un polígono se nombra por sus vértices.

Diagonales: Son los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos. Algunas de las diagonales del polígono de la figura son AC, AD, BD y CE.

Ángulos interiores: Son los ángulos formados por dos lados consecutivos. El vértice del ángulo es el punto de intersección de estos lados. En la figura, el ángulo EAB es un ángulo interior del polígono.

Ángulos exteriores: Son los ángulos formados por un lado del polígono y la prolongación de un lado consecutivo, de modo que el vértice del ángulo es el punto de intersección de estos lados. El ángulo FBC es un ángulo exterior del polígono.

El número de lados de un polígono es igual al número de vértices, al número de ángulos interiores y al número de ángulos exteriores.

El polígono con menor número de lados es el triángulo.

En general, el nombre de los polígonos depende del número de lados:

Número de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Endecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono

No existen nombres para polígonos con un número de lados diferente a los dados en esta tabla.

En general, los polígonos de más de 10 lados se mencionan sólo indicando el número de lados.

Un polígono se dice **convexo** si todos sus ángulos interiores miden menos de 180°.

Si alguno de los ángulos de un polígono mide más de 180°, entonces este polígono se llama **cóncavo**.

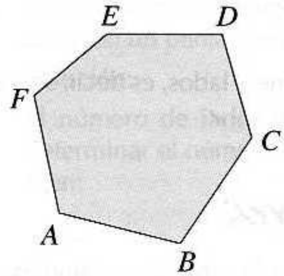


Figura 1

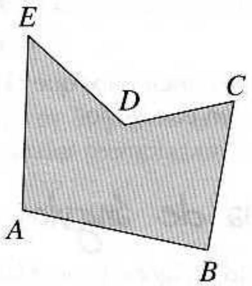


Figura 2

La Figura 1 es un polígono convexo y la Figura 2 es un polígono cóncavo. En la figura 2, el ángulo interior CDE mide más de 180°.

Propiedades de los polígonos convexos 7.2

Suma de ángulos interiores

Si un polígono tiene n lados, entonces la suma de sus ángulos interiores, S_i, está dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Ejemplos:

1) Determinemos la suma de ángulos interiores de un pentágono.

   Solución:

   El pentágono es el polígono de 5 lados; por lo tanto, para determinar la suma de sus ángulos interiores reemplazamos n por 5 en $S_i = (n-2)180°$ y tenemos:

   $$S_i = (5-2) \cdot 180°$$
   $$S_i = 3 \cdot 180°$$
   $$S_i = 540°$$

   La suma de ángulos interiores de un pentágono es 540°.

2) Si la suma de los ángulos interiores de un polígono es 1.260°, ¿de qué polígono se trata?

Solución:

Debemos determinar el número de lados del polígono cuya suma de ángulos interiores es 1.260°. Para ello reemplazamos esta suma en la fórmula $S_i = (n-2) \cdot 180°$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} 1.260° &= (n-2) \cdot 180° \\ \frac{1.260}{180} &= n-2 \\ 7 &= n-2 \\ 9 &= n \end{aligned}$$

y concluimos que el polígono tiene 9 lados, es decir, se trata de un eneágono.

Suma de ángulos exteriores

Si un polígono tiene n lados, entonces la suma de sus ángulos exteriores, S_e, es siempre 360°, es decir:

$$S_e = 360°$$

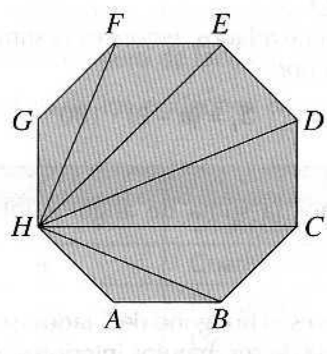
Número de diagonales trazadas desde un vértice

Si un polígono tiene n lados, entonces el número de diagonales d que se pueden trazar desde cualquiera de sus vértices es:

$$d = n - 3$$

¿Cómo podemos visualizar la propiedad anterior?

Consideremos, por ejemplo, un octógono, es decir, un polígono de 8 lados.



Desde uno de sus vértices, por ejemplo desde el vértice H, podemos trazar diagonales a cualquiera de los otros, con la excepción de los vértices contiguos (A y G) y del mismo vértice H. Por lo tanto, desde un vértice cualquiera podemos trazar diagonales a todos los otros con la excepción de tres de ellos.

$$d = n - 3$$

Número total de diagonales

Si un polígono tiene n lados, entonces el número total de diagonales D que se pueden trazar entre sus vértices es:

$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Ejemplos:

1. Determinemos el número total de diagonales que pueden trazarse en un pentágono.

   Solución:

   El número de lados del pentágono es 5; por lo tanto, para determinar el número total de diagonales reemplazamos n por 5 en:

   $$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

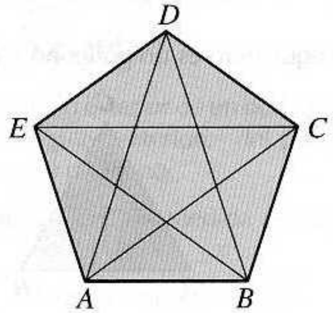
   y obtenemos: $$D = \frac{5 \cdot (5-3)}{2}$$

   $$D = 5$$

   Entonces, en un pentágono podemos trazar 5 diagonales en total.

   Explicaremos en forma empírica la obtención de la fórmula. Para que sea realmente una demostración de ella, debemos reemplazar el caso particular, en este caso 5, por el caso general, es decir, n.

   Dibujemos el pentágono y sus diagonales:



   Desde cada uno de sus vértices (5) podemos trazar 2 diagonales, ($d = n - 3$); eso nos da un total de 10 diagonales. Pero cada una de ellas está considerada 2 veces (desde cada extremo); por lo tanto, debemos dividir el número obtenido (10) por 2, y obtenemos las 5 diagonales del pentágono.

2. Si en un polígono se pueden trazar un total de 9 diagonales, ¿de qué polígono se trata?

   Solución:

   Para determinar el número de lados del polígono debemos reemplazar el número de diagonales en la fórmula:

   $$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

y obtenemos:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 9$$

$$n \cdot (n-3) = 18$$

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

$$(n+3)(n-6) = 0$$

Aquí obtuvimos una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$n_1 = -3 \quad ; \quad n_2 = 6$$

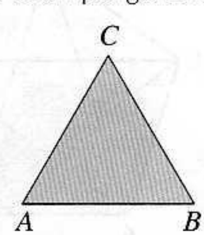
Pero como en este caso n representa el número de lados del polígono, este no puede ser un número negativo; por lo tanto, descartamos la solución $n = -3$ y concluimos que el polígono tiene 6 lados, es decir, se trata de un hexágono.

7.3 Polígonos regulares

Un polígono se dice regular si es un polígono convexo, si todos sus lados tienen igual medida y si todos sus ángulos también tienen igual medida.

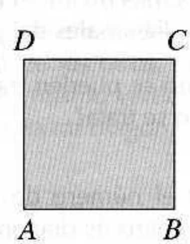
Ejemplos:

1. El triángulo equilátero es un polígono regular.



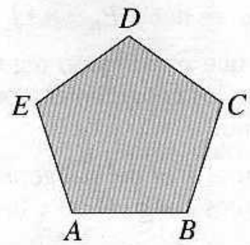
Por definición, sus tres lados miden lo mismo y sus tres ángulos también.

2. Un cuadrado es un polígono regular.



Sus cuatro lados miden lo mismo y sus cuatro ángulos también.

3. La siguiente figura muestra un pentágono regular.



Sus cinco lados tienen igual medida y sus 5 ángulos también.

Veremos a continuación cómo podemos determinar la medida de cada ángulo interior y de cada ángulo exterior de un polígono regular.

Medida del ángulo interior de un polígono regular

La medida de cada ángulo interior de un polígono regular se calcula dividiendo la suma de ángulos interiores del polígono por el número de lados.

Así, si el polígono tiene n lados, entonces cada ángulo interior mide:

$$\text{Ángulo interior} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Medida del ángulo exterior de un polígono regular

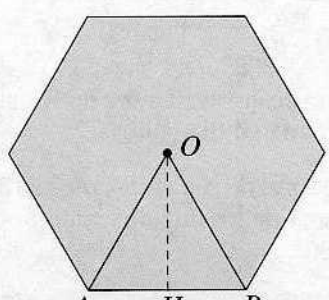
La medida de cada ángulo exterior de un polígono regular se calcula dividiendo la suma de ángulos exteriores del polígono, que es 360°, por el número de lados del polígono.

Si el polígono tiene n lados, la medida de cada ángulo exterior mide:

$$\text{Ángulo exterior} = \frac{360°}{n}$$

Perímetros y áreas de polígonos regulares

Consideremos un polígono regular de n lados, cada uno de longitud l.



Para calcular su perímetro, P_n, basta multiplicar el número de lados por la longitud de éstos, es decir, $P_n = n \cdot l$.

Podemos observar que el polígono regular de n lados puede ser subdividido en n triángulos congruentes, con un vértice común, que es el centro del polígono.

Así, para determinar el área del polígono A_n basta calcular el área de uno de estos triángulos congruentes y multiplicarla por el número de lados del polígono.

En la figura, el área A el triángulo AOB es $A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH$

El segmento OH se llama apotema del polígono y se denota por ρ (rho) y el segmento $\overline{AB}$ es un lado del polígono y su longitud es l. Así, el área A_n del polígono es:

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \rho$$

Como $n \cdot l$ es el perímetro del polígono de n lados, entonces podemos calcular su área multiplicando la mitad del perímetro por la apotema.

Es decir, $A_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot \rho$

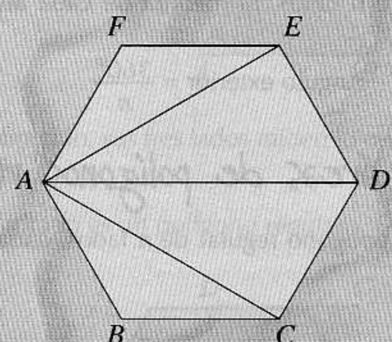
Ejercicios resueltos

1. Demostremos que la suma de ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180°$.

Solución:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ los ángulos interiores del polígono. La suma de estos ángulos coincide con la suma de ángulos interiores de los triángulos que se pueden determinar trazando todas las diagonales desde un vértice del polígono.

Como sabemos, desde un vértice cualquiera de un polígono de n lados podemos trazar $(n-3)$ diagonales, determinando $(n-2)$ triángulos.



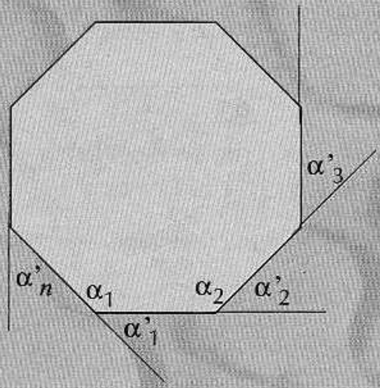
(En la figura se muestra un hexágono. Desde uno de sus vértices trazamos 3 diagonales y se determinan 4 triángulos).

La suma de ángulos interiores de cada triángulo es 180° y como tenemos $(n-2)$ triángulos, la suma de los ángulos interiores del polígono de n lados es $S = (n-2) \cdot 180°$.

2. Demostremos que la suma de ángulos exteriores de un polígono de n lados es 360°.

Solución:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ los ángulos interiores del polígono y sean $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n$, sus ángulos exteriores.



Cada ángulo interior con el exterior respectivo forma un ángulo extendido; por lo tanto, ambos suman 180°.

Esto es $(\alpha_1 + \alpha'_1) + (\alpha_2 + \alpha'_2) + \ldots + (\alpha_n + \alpha'_n) = n \cdot 180°$

Asociando los términos, tenemos:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n) = n \cdot 180°$

Pero sabemos que la suma de ángulos interiores es $(n - 2) \cdot 180°$, entonces reemplazamos y tenemos:

$(n - 2) \cdot 180° + (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n) = n \cdot 180°$

de donde:

$(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n) = n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180°$

es decir:

$(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n) = 180° \cdot (n - (n - 2)) = 360°$

Por lo tanto, tenemos que la suma de ángulos exteriores de un polígono es igual a 360°, independientemente del número de lados de él.

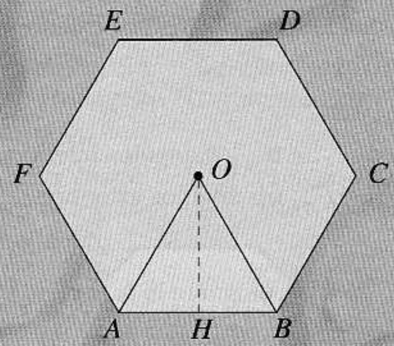
3. Determinemos el perímetro y el área de un hexágono regular de 10 cm de lado.

Solución:

El perímetro se calcula multiplicando el número de lados por la longitud de cada uno. Así:

$P = 6 \cdot 10$ cm

$P = 60$ cm



Para determinar el área, primero calculamos el área "a" del triángulo equilátero AOB de lado 10 cm. Esta es $a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, donde $b = 10$ y $h = 5\sqrt{3}$ (aplicando teorema de Pitágoras al triángulo AHO)

Así, $a = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

El área A del hexágono es 6 veces el área del triángulo AOB, es decir, $A = 150\sqrt{3}$ cm^2.

4. Determinemos la medida de un ángulo interior de un pentágono regular.

Solución:

Sabemos que la suma de ángulos interiores de un polígono está dada por:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

En este caso, $n = 5$ y además el polígono es regular; por lo tanto, todos sus ángulos tienen igual medida y si x representa esa medida, tenemos:

$$x = \frac{3 \cdot 180°}{5}$$

$$x = 108°$$

Concluimos que la medida de un ángulo interior de un pentágono regular es 108°.

5. Determinemos la medida de un ángulo interior de un dodecágono regular.

Solución:

Al igual que en el caso anterior, sabemos que la suma de los ángulos interiores de un dodecágono es:

$$S_i = 180° \cdot (12 - 10)$$

$$S_i = 1.800°$$

Y si x representa la medida de cada uno, para determinar su valor dividimos la suma total por el número de ellos, es decir:

$$x = \frac{1.800°}{12}$$

$$x = 150°$$

Concluimos que la medida de un ángulo interior de un dodecágono regular es 150°.

6. Determinemos la medida de un ángulo interior de un polígono regular de 16 lados.

Solución:

La suma de los ángulos interiores del polígono de 16 lados está dada por:

$$S_i = (16 - 2) \cdot 180°$$

Es decir, $S_i = 2.520°$

Para determinar la medida x de cada ángulo, dividimos la suma por el número de lados, que es 16, entonces obtenemos $x = 157{,}5°$.

$$x = 157°\ 30'$$

7. El ángulo interior de un polígono regular mide 135°. ¿De qué polígono se trata?

Solución:

Si n representa el número de lados del polígono que queremos determinar, entonces sabemos que la suma de los ángulos interiores está dada por $S_i = (n - 2) \cdot 180°$. Como se trata de un polígono regular, todos sus ángulos interiores miden lo mismo y esta medida es igual a la suma de todos sus ángulos interiores dividida por el número de ángulos (que coincide con el número de lados); así tenemos:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 135°$$

Esto es:

$$(n - 2) \cdot 180° = 135°n$$
$$180°n - 360° = 135°n$$
$$45°n = 360°$$
$$n = 8$$

Concluimos entonces que el polígono regular cuyo ángulo interior mide 135° tiene 8 lados, es decir, es el octógono.

8. Determinemos el polígono regular cuyo ángulo exterior mide 30°.

Solución:

Sabemos que la suma de ángulos exteriores de cualquier polígono es 360°. Si n representa el número de lados del polígono, entonces la medida de un ángulo exterior está dada por $\frac{360°}{n}$, es decir:

$$30° = \frac{360°}{n}$$
$$30°n = 360°$$
$$n = 12°$$

Concluimos entonces que en el dodecágono regular la medida de un ángulo exterior es 30°.

9. En un polígono regular se pueden trazar en total 35 diagonales. ¿Cuál es la medida de un ángulo interior?

Solución:

Primero debemos determinar cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 35 diagonales; esto está dado por:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35$$

$$n(n-3) = 70$$

$$n^2 - 3n = 70$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n+7)(n-10) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $n_1 = {}^-7$ y $n_2 = 10$

Pero como n representa el número de lados del polígono, este no puede ser un número negativo; por lo tanto, el polígono tiene 10 lados. Ahora debemos determinar la medida de un ángulo interior del decágono regular, la que está dada por:

$$x = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$x = \frac{180°(10-2)}{10}$$

$$x = \frac{180° \cdot 8}{10}$$

$$x = 144°$$

La medida del ángulo interior del decágono regular es entonces 144°.

10. Determinemos el número de lados del polígono en el cual la suma de ángulos interiores es igual al doble de la suma de los ángulos exteriores.

Solución:

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados está dada por $S_i = 180°(n-2)$ y la suma de los ángulos exteriores está dada por $S_e = 360°$.

Tenemos entonces $S_i = 2 \cdot S_e$

Es decir, $180°(n-2) = 2 \cdot 360°$

$$180°n - 360° = 720°$$

$$180°n = 1.080°$$

$$n = 6°$$

Por lo tanto, el polígono que cumple la condición dada tiene 6 lados, es decir, se trata de un hexágono.

Ejercicios

1. Determine la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
2. Determine la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.
3. Determine la suma de los ángulos interiores de un pentágono.
4. Determine la suma de los ángulos interiores de un hexágono.
5. Determine la suma de los ángulos interiores de un heptágono.
6. Determine la suma de los ángulos interiores de un octógono.
7. Determine la suma de los ángulos interiores de un eneágono.
8. Determine la suma de los ángulos interiores de un decágono.
9. Determine la suma de los ángulos interiores de un endecágono.
10. Determine la suma de los ángulos interiores de un dodecágono.
11. Determine la suma de los ángulos interiores de un pentadecágono.
12. Determine la suma de los ángulos interiores de un polígono de 13 lados.
13. Determine la suma de los ángulos interiores de un polígono de 22 lados.
14. Determine la suma de los ángulos interiores de un polígono de 18 lados.
15. Determine la suma de los ángulos interiores de un polígono de 14 lados.
16. Determine el número de lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 1.260º.
17. Determine el número de lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 1.440º.
18. Determine el número de los lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 360º.
19. Determine el número de los lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 900º.
20. Determine el número de los lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 1.080.
21. Determine el número de los lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 1.800º.
22. Determine el número de los lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 2.160º.
23. Determine el número de los lados del polígono sabiendo que la suma de los ángulos interiores es 2.340º.
24. Determine el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un dodecágono.
25. Determine el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un decágono.
26. Determine el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un pentadecágono.
27. Determine el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un polígono de 16 lados.
28. Determine el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un polígono de 21 lados.
29. Determine el número total de diagonales que se pueden trazar en un triángulo.
30. Determine el número total de diagonales que se pueden trazar en un cuadrilátero.

31. Determine el número total de diagonales que se pueden trazar en un endecágono.

32. Determine el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 16 lados.

33. Determine el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 18 lados.

34. Determine el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 13 lados.

35. Determine el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar en total 27 diagonales.

36. Determine el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar en total 20 diagonales.

37. Determine el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar en total 54 diagonales.

38. Determine el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar en total 90 diagonales.

39. Determine el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar en total 5 diagonales.

40. Determine el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar en total 14 diagonales.

41. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un pentágono?

42. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un hexágono?

43. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un decágono?

44. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un octógono?

45. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior de un dodecágono?

46. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un pentágono?

47. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un hexágono?

48. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un octógono?

49. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un dodecágono?

50. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide 135°?

51. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide 120°?

52. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide 144°?

53. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interior mide 160°?

54. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interior mide 162°?

55. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo exterior mide 20°?

56. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo exterior mide 40°?

57. ¿Cuál es el polígono regular cuyos ángulos interiores y exteriores miden lo mismo?

58. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior mide 60°?

59. ¿Cuál es el polígono regular de menor número de lados en el cual la medida de cada ángulo exterior es menor que la medida de cada ángulo interior? Justifique.

60. ¿Cuál es el polígono en el cual la suma de ángulos interiores excede en 720° a la suma de ángulos exteriores?

61. Determine el perímetro y el área de un hexágono regular de 16 cm de lado.

62. Determine el perímetro y el área de un hexágono regular de 35 cm de lado.

Soluciones

1. 180°
2. 360°
3. 540°
4. 720°
5. 900°
6. 1.080°
7. 1.260°
8. 1.440°
9. 1.620°
10. 1.800°
11. 2.340°
12. 1.980°
13. 3.600°
14. 2.880°
15. 2.160°
16. 9
17. 10
18. 4
19. 7
20. 8
21. 12
22. 14
23. 15
24. 9
25. 7
26. 12
27. 13
28. 18
29. 0
30. 2
31. 44
32. 104
33. 135
34. 65
35. 9
36. 8
37. 12
38. 15
39. 5
40. 7
41. 108°
42. 120°
43. 144°
44. 135°
45. 150°
46. 72°
47. 60°
48. 45°
49. 30°
50. El octógono
51. El hexágono
52. El decágono
53. 18
54. 20
55. 18
56. 9
57. El cuadrado o rectángulo
58. El hexágono regular
59. El pentágono
60. El octógono
61. $P = 96$ cm
    $A = 384\sqrt{3}$ cm^2
62. $P = 210$ cm
    $A = 1.837{,}5\sqrt{3}$ cm^2

Polígonos inscritos y circunscritos 7.4

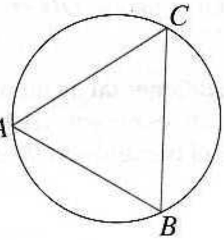
Se llama polígono **inscrito** en una circunferencia a aquel cuyos vértices son todos puntos de la circunferencia y, en consecuencia, sus lados son cuerdas de la circunferencia.

La circunferencia se dice **circunscrita** al polígono.

Un polígono es inscriptible en una circunferencia si existe un punto del plano equidistante de todos sus vértices. Este punto es el centro de la circunferencia circunscrita.

Ejemplo:

El triángulo ABC de la figura está inscrito en la circunferencia.

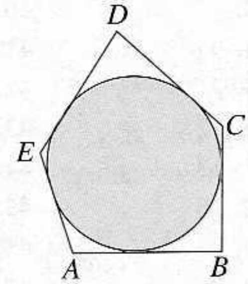


Se llama polígono **circunscrito** a una circunferencia a aquel polígono cuyos lados son tangentes a la circunferencia.

Un polígono es **circunscriptible** a una circunferencia si existe en el plano un punto que equidiste de los lados del polígono. Este punto es el centro de la circunferencia inscrita.

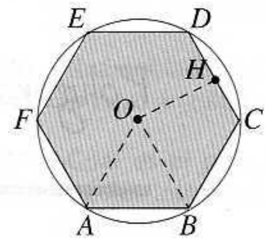
Ejemplo:

El pentágono de la figura está circunscrito a la circunferencia.



Algunos conceptos

Consideremos el siguiente polígono regular (en este caso es un hexágono) inscrito en una circunferencia:



El punto O, que es el centro de la circunferencia circunscrita, es también el **centro** del polígono regular; en este caso, del hexágono.

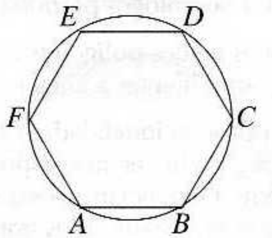
Un **ángulo central** de un polígono regular es un ángulo cuyo vértice está en el centro del polígono y cuyos lados son los segmentos determinados por el centro y los puntos extremos de un lado de él, es decir, dos vértices consecutivos. En la figura, el ángulo AOB es un ángulo central del polígono.

Se llama **apotema** de un polígono regular a un segmento de recta que une el centro del polígono con el punto medio de uno de sus lados. En general, se denota por la letra griega ρ_n, donde n denota el número de lados del polígono. En la figura, $\overline{OH}$ es una apotema del hexágono y escribimos $OH = \rho_6$.

Se llama **triángulo fundamental** de un polígono regular al triángulo isósceles que tiene por vértices el centro del polígono y los dos extremos de un lado. En la figura, el triángulo AOB es un triángulo fundamental del polígono regular.

Propiedades

1. Si se divide una circunferencia en tres o más arcos congruentes, las cuerdas que unen los puntos extremos sucesivos de estos arcos determinan un polígono regular inscrito.



La circunferencia de la figura se dividió en 6 arcos congruentes mediante los puntos A, B, C, D, E y F; las cuerdas dibujadas determinadas por esos puntos conforman el hexágono regular.

2. Si se divide una circunferencia en tres o más arcos congruentes, las tangentes trazadas a la circunferencia por los puntos de división forman un polígono regular circunscrito.

3. Todo polígono regular puede ser inscrito en una circunferencia.

4. Todo triángulo puede ser inscrito en una circunferencia. El centro de la circunferencia circunscrita al triángulo es el punto de intersección de las simetrales de sus lados. Este punto se llama **circuncentro**.

5. Un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia si sus ángulos opuestos son suplementarios (Ver página 334).

6. El recíproco de la propiedad anterior también es cierto. Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios.

7. Si un polígono está circunscrito a una circunferencia, entonces las bisectrices de sus ángulos interiores se intersecan en el centro de la circunferencia inscrita.

8. Todo triángulo se puede circunscribir a una circunferencia. El centro de esta circunferencia es la intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo. Este punto se llama **incentro**.

9. Un cuadrilátero se puede circunscribir a una circunferencia si la suma de las medidas de dos lados opuestos es igual a la suma de las medidas de los otros dos (Ver página 334).

10. El recíproco de la propiedad anterior también es cierto. Si un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia, entonces la suma de las medidas de dos lados opuestos es igual a la suma de las medidas de los otros dos.

Polígonos semejantes y longitud de la circunferencia

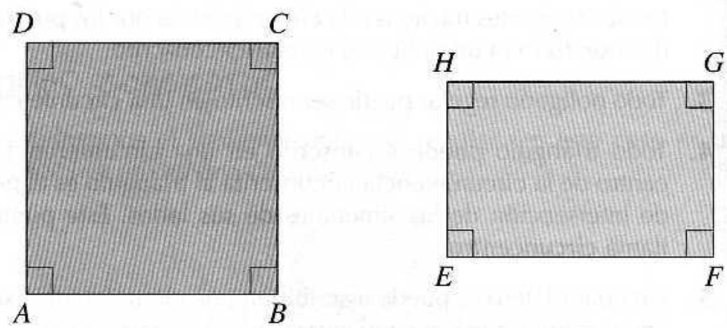
Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados homólogos proporcionales.

Los lados homólogos de dos polígonos regulares son aquellos que unen los vértices correspondientes a ángulos congruentes.

A diferencia de la proporcionalidad en triángulos, en el caso de polígonos con más de 3 lados es necesario que se cumplan ambas condiciones para determinar semejanza, es decir, sus ángulos deben ser respectivamente congruentes y sus lados homólogos respectivamente proporcionales.

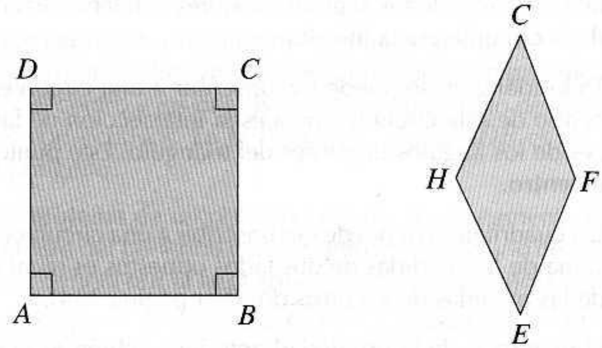
Ejemplo 1:

El cuadrado $ABCD$ y el rectángulo $EFGH$ tienen sus ángulos congruentes (ángulos rectos) y, sin embargo, ellos no son semejantes pues sus lados no son proporcionales.



Ejemplo 2:

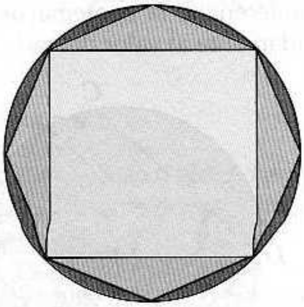
El cuadrado $ABCD$ y el rombo $EFGH$ tienen sus lados proporcionales y, sin embargo, no son semejantes pues sus ángulos no son congruentes.



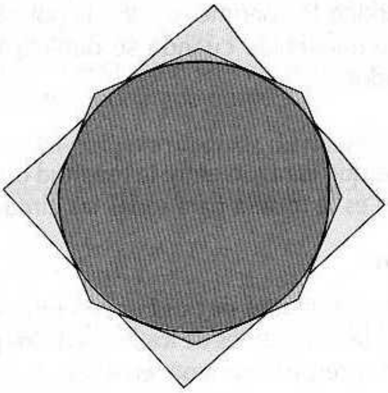
Propiedades

1. Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.
2. Si dos polígonos regulares son semejantes, entonces la razón entre sus lados es igual a la razón entre sus radios y es igual a la razón entre sus apotemas.

3. La razón entre el perímetro de un polígono regular y el radio de la circunferencia circunscrita es constante para todos los polígonos regulares con el mismo número de lados.
4. El perímetro de un polígono regular inscrito de $2n$ lados es mayor que el polígono regular inscrito de n lados en la misma circunferencia.

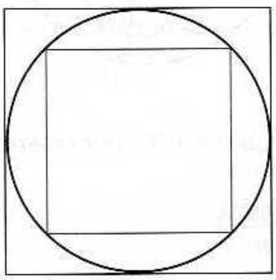


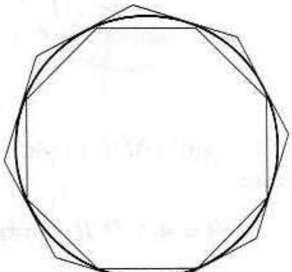
5. El perímetro de un polígono regular circunscrito de $2n$ lados es menor que el polígono regular circunscrito de n lados a la misma circunferencia.



Longitud de la circunferencia y área del círculo

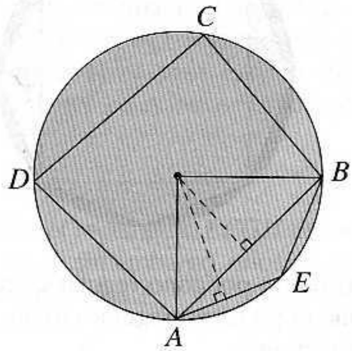
Consideremos un polígono regular inscrito en una circunferencia y un polígono regular circunscrito a ella, ambos con el mismo número de lados.





Observemos que al duplicar el número de lados, el perímetro del polígono regular inscrito aumenta, mientras que el perímetro del polígono regular circunscrito disminuye, es decir, a medida que se va duplicando el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia, la diferencia entre sus perímetros va disminuyendo, llegando a ser tan pequeña como se desee y tan cercana a la longitud de la circunferencia como se desee.

A medida que se duplica el número de lados de un polígono regular inscrito en una circunferencia, la apotema se hace cada vez mayor, acercándose indefinidamente al valor del radio de la circunferencia.



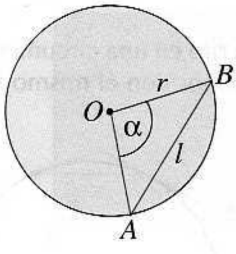
Así podemos decir que la longitud de la circunferencia es el límite común al que tienden los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito a la circunferencia cuando se duplica indefinidamente el número de sus lados.

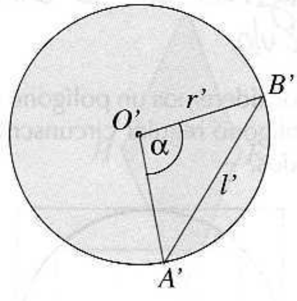
- Demostremos que la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es la misma para todas las circunferencias.

Demostración:

Sean C y C' las longitudes de dos circunferencias; r y r' sus respectivos radios y l y l' las longitudes de los lados de los polígonos regulares de n lados inscritos respectivamente en ellas.

Debemos demostrar que $\dfrac{C}{2r} = \dfrac{C'}{2r'}$





El triángulo AOB es semejante al triángulo $A'B'C'$ por criterio $A.A$, ya que:

$\measuredangle AOB = \measuredangle A'O'B'$ (ambos miden $\dfrac{360^\circ}{n}$)

$\measuredangle OBA = \measuredangle O'B'A'$ (porque ambos triángulos son isósceles con el ángulo no basal igual)

Entonces se cumple $\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'}$

También: $\frac{nl}{r} = \frac{nl'}{r'}$

Pero cuando n crece indefinidamente, nl "tiende " a C y nl' "tiende" a C', entonces tenemos $\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'}$, de donde obtenemos, $\frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'}$.

Observaciones:

- La razón $\frac{C}{2r}$ se denota por π.
- π es un número irracional, por lo tanto, no es posible expresarlo en forma racional (o como cociente de dos números enteros). Algunas aproximaciones de él son: $\pi = 3{,}14$; $\pi = \frac{22}{7}$.
- La fórmula $\frac{C}{2r} = \pi$ nos permite calcular la longitud de la circunferencia conociendo su radio: $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

La longitud de la circunferencia se calcula multiplicando el doble de su radio por π.

En forma similar, podemos obtener el **área de un círculo** considerando que ésta es igual al límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia cuando el número de lados de los polígonos aumenta indefinidamente.

Sea así A_n el área del polígono regular de n lados

A_n es igual a n veces el área del triángulo fundamental del polígono.

Es decir, $A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \rho$

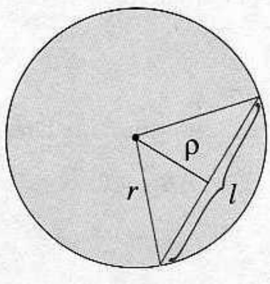
Pero $(n \cdot l)$ es el perímetro del polígono de n lados P_n.

Entonces tenemos $A_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot \rho$

Además, sabemos que si el número de lados del polígono aumenta indefinidamente, la apotema ρ tiende a ser el radio de la circunferencia y entonces el perímetro del polígono tiende a ser igual al perímetro de la circunferencia, que como sabemos es $C = 2 \cdot \pi \cdot r$. Reemplazando, nos queda:

$A_o = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r$ es decir, $A_n = \pi \cdot r^2$

El área del círculo se calcula multiplicando el cuadrado de su radio por π.



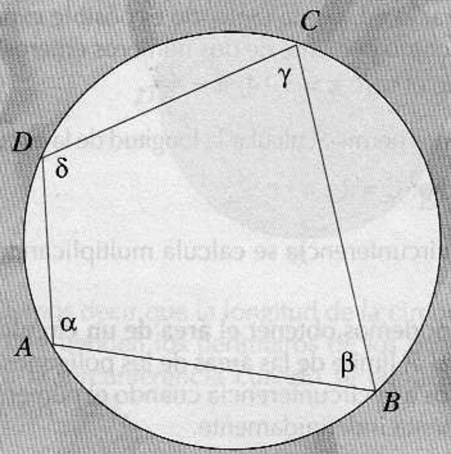
Ejercicios resueltos

1. Demostremos que en todo cuadrilátero inscrito los ángulos opuestos son suplementarios.

Solución:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y sean α, β, γ y δ sus ángulos interiores.

Debemos demostrar que: $\alpha + \gamma = 180°$ y $\beta + \delta = 180°$



Tenemos que el ángulo α es un ángulo inscrito en la circunferencia, determinado por el arco $\overset{\frown}{BCD}$ y, por lo tanto, $\alpha = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$.

Por otro lado, el ángulo γ también es ángulo inscrito en la circunferencia y está determinado por el arco $\overset{\frown}{BAD}$; por lo tanto, $\gamma = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$.

Así, $\alpha + \gamma = \frac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD}}{2}$

Pero la suma de los arcos $\overset{\frown}{BCD}$ y $\overset{\frown}{BAD}$ es igual al ángulo completo, es decir, a 360°.

Entonces, $\alpha + \gamma = 180°$.

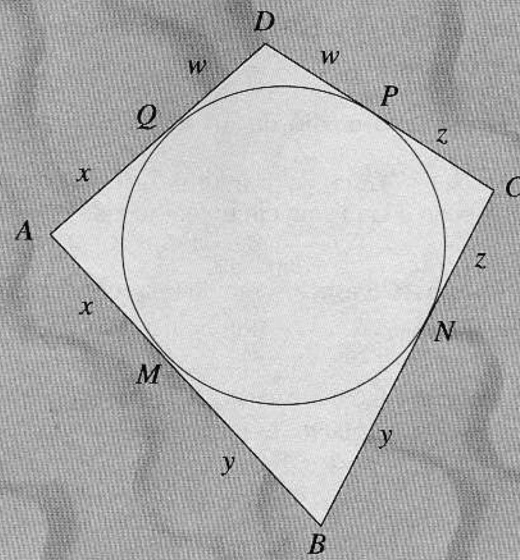
De la misma manera se obtiene que: $\beta + \delta = 180°$.

2. Demostremos que en todo cuadrilátero circunscrito la suma de sus lados opuestos es igual.

Solución:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito a la circunferencia.

Por demostrar: $AB + CD = BC + AD$



Sean M, N, P y Q los puntos de tangencia de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ con la circunferencia, respectivamente.

Aplicando la propiedad de la tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella, tenemos que:

$$AM = AQ = x$$
$$BM = BN = y$$
$$CN = CP = z$$
$$DP = DQ = w$$

De esta forma: $AB + CD = AM + MB + CP + PD = x + y + z + w$

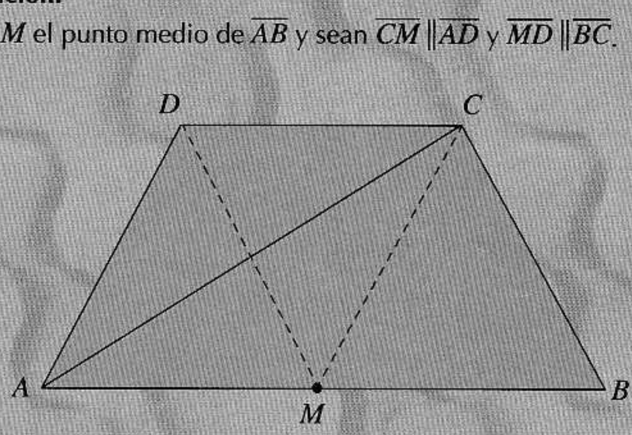
y $BC + AD = BN + NC + AQ + QD = y + z + x + y$

y por lo tanto, $AB + CD = BC + AD$

3. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $AD = DC = CB = \frac{1}{2}$ de AB y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Demostremos que $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

Solución:

Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y sean $\overline{CM} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$.



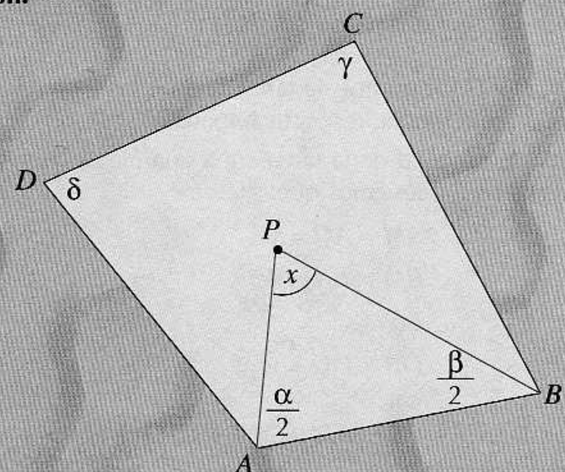
Los cuadriláteros $AMCD$ y $BMDC$ son paralelogramos y se cumple $MC = AD$ y $MD = BC$.

Pero como M es punto medio de AB y $DC = \frac{1}{2}AB$, se tiene que $AM = DM = CM = BM$, o sea, los puntos A, D, C y B son concíclicos, es decir, pertenecen a la misma circunferencia de centro M y de radio $\overline{AM}$.

Entonces, el ángulo ACB está inscrito en una semicircunferencia y, por lo tanto, mide 90°. Así, $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

4. Demostremos que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los otros dos ángulos.

Solución:



Sean α, β, γ y δ los ángulos interiores del cuadrilátero y sean $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ las bisectrices de α y β, respectivamente.

Tenemos que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Debemos demostrar que el ángulo $APB = \frac{\gamma + \delta}{2}$

En el triángulo APB, tenemos: $x + \frac{\alpha + \beta}{2} = 180°$

$$x = 180° - \frac{(\alpha + \beta)}{2} \quad (*)$$

Pero, $\alpha + \beta = 360 - (\gamma + \delta)$, de donde obtenemos,

$$\frac{(\alpha + \beta)}{2} = 180 - \frac{(\gamma + \delta)}{2}$$

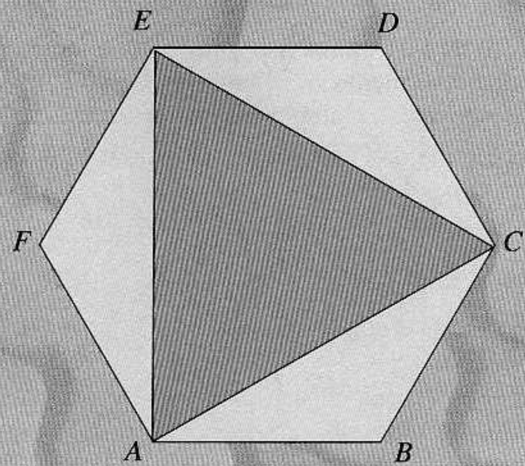
reemplazando en (*) nos queda:

$$x = 180 - \left[180 - \left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)\right]$$

es decir, $$x = \frac{(\gamma + \delta)}{2}$$

5. Demostremos que en el hexágono regular $ABCDEF$, el triángulo formado por las diagonales $\overline{AE}$, $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ es equilátero.

Solución:



Como se trata de un hexágono regular, todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos también lo son:

Así, tenemos:

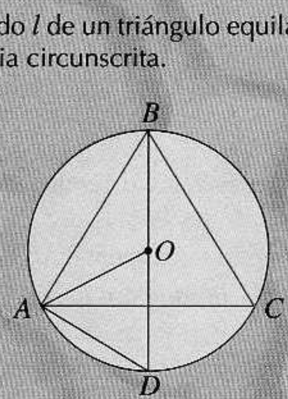
$\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EF}$

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle CDE \cong \measuredangle EFA$

$\overline{BC} \cong \overline{ED} \cong \overline{AF}$

Entonces, los triángulos ABC, CDE y EFA son congruentes por criterio $A.L.A$, y se cumple que $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{AE}$. Por lo tanto, el triángulo ACE es equilátero.

6. Determinemos el lado l de un triángulo equilátero en función del radio r de la circunferencia circunscrita.



Solución:

El triángulo equilátero ABC de la figura está inscrito en la circunferencia de centro O.

El triángulo ABD es rectángulo en A porque está inscrito en una semicircunferencia.

El triángulo AOB es isósceles de base $\overline{AB}$, porque $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios; los ángulos con vértices en A y en B miden 30°, pues $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ son bisectrices de los ángulos del triángulo ABC.

El ángulo OAD mide 60° (la diferencia entre 90° y 30°).

El triángulo AOD está formado por dos radios (OA y OD) y además uno de sus ángulos (ángulo con vértice en A) mide 60°; por lo tanto, es equilátero. Entonces, $\overline{AD}$ también es igual a un radio.

Aplicamos teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABD y tenemos:

$$(\overline{AD})^2 + (\overline{AB})^2 = (\overline{BD})^2$$

Reemplazando, nos queda:

$$(r)^2 + (l)^2 = (2r)^2$$

$$r^2 + l^2 = 4r^2$$

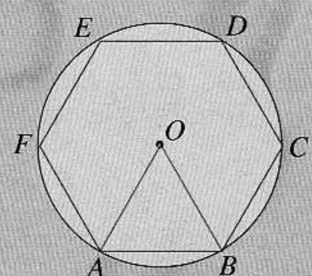
Y despejando, tenemos que:

$$l^2 = 3r^2$$

De donde obtenemos:

$$l = r\sqrt{3}$$

7. Determinemos el lado l del hexágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita.



Solución:

El hexágono $ABCDEF$ está inscrito en la circunferencia de centro O y radio r, y los vértices del hexágono dividen la circunferencia en 6 arcos de igual medida.

Consideremos el triángulo fundamental AOB:

Es un triángulo isósceles porque dos de sus lados son radios de la circunferencia.

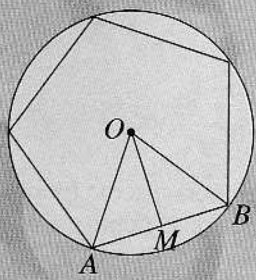
El ángulo AOB mide 60° porque está determinado por un arco equivalente a la sexta parte de la circunferencia.

Entonces los ángulos basales (con vértices en A y en B) también miden 60°.

Por lo tanto, el triángulo AOB es un triángulo equilátero, y concluimos que el lado $\overline{AB}$ mide lo mismo que el radio de la circunferencia.

Es decir: $l = r$

8. Determinemos la apotema de un polígono regular inscrito en una circunferencia en función del radio de la circunferencia y del lado del polígono.



Solución:

En este caso se ha dibujado un pentágono, pero la solución dada es independiente del número de lados del polígono.

Queremos expresar la apotema $\overline{OM}$ en términos de la medida del lado $\overline{AB}$, denotado por l, y del radio r de la circunferencia circunscrita.

El triángulo AOM es rectángulo en M y M es punto medio del lado $\overline{AB}$.

$\overline{OA}$ es radio de la circunferencia circunscrita.

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo AOM:

$$AM^2 + OM^2 = OA^2$$

reemplazando nos queda:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + x^2 = r^2$$

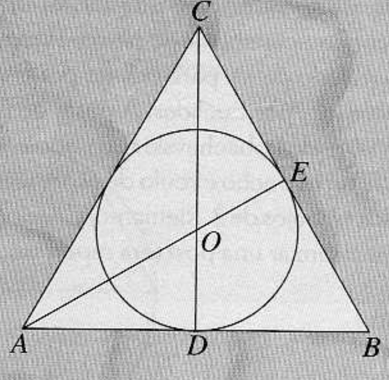
es decir:

$$x^2 = r^2 - \frac{l^2}{4}$$

de donde obtenemos:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$$

9. Determinemos el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero en función de un lado del triángulo.



Solución:

Tracemos la altura $\overline{CD}$ del triángulo equilátero, que coincide con la transversal de gravedad y con la bisectriz.

En el triángulo ABC tenemos:

Lado $\overline{AC}$ mide: "l"

Lado $\overline{AD}$ mide: $\frac{l}{2}$

Lado $\overline{CD}$ mide: $\frac{l}{2}\sqrt{3}$

El centro de la circunferencia inscrita (punto O) es la intersección de las bisectrices, que coincide con el punto de intersección de las transversales de gravedad, G.

Sabemos que si G es el centro de gravedad del triángulo, se cumple: $CG : GD = 2 : 1$

Entonces OD, que es el radio de la circunferencia inscrita, equivale a la tercera parte de la altura, es decir, $OD = \frac{1}{3}\,CD$ y $CD = \frac{l}{2}\sqrt{3}$, de donde obtenemos:

$$r = \frac{1}{6} \cdot l \cdot \sqrt{3}$$

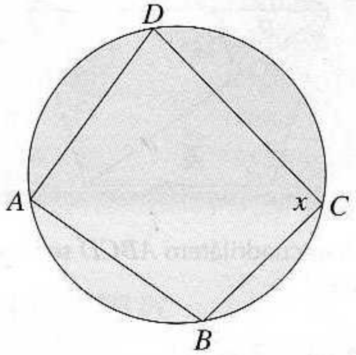
NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKI

(Nizhni Novgorod, Rusia, 1792-Kazán, id., 1856)

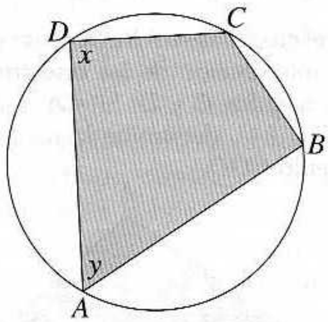
Matemático ruso. Hijo de una familia de funcionarios de baja calificación, entró en la Universidad de Kazán a la edad de 14 años. En 1820 fue nombrado decano de la facultad de Física y Matemáticas; en 1827, rector. El tiempo y la atención demandados por sus obligaciones administrativas no impidieron a Lobachevski desarrollar una importantísima labor académica que cristalizó en 1829 con la publicación de una geometría particular, la denominada hiperbólica, que no respetaba el postulado de las paralelas de Euclides, pero que aun así era lógicamente correcta. Al demostrar la coherencia interna de esta geometría «no-euclídea», probó asimismo que el postulado de las paralelas no podía deducirse del resto de los postulados propuestos por Euclides. A pesar de la trascendencia de sus descubrimientos, la obra de Lobachevski fue poco apreciada en su tiempo y apenas trascendió de un estrecho círculo de especialistas en su Rusia natal, y tuvo que esperar a los trabajos de B. Riemann y F. Klein sobre los fundamentos de la geometría para alcanzar una postrera repercusión.

Ejercicios

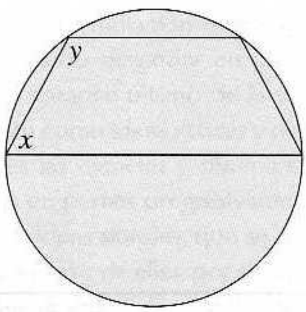
1. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en la circunferencia. Determine la medida del ángulo x si se sabe que el ángulo BAD mide 75°.



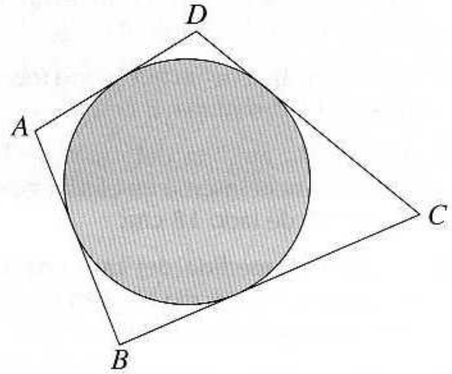
2. Determine la medida de los ángulos x e y del cuadrilátero sabiendo que este está inscrito en la circunferencia y que las medidas de los ángulos con vértices en B y C son $(x - 10)°$ y $(y + 40)°$, respectivamente.



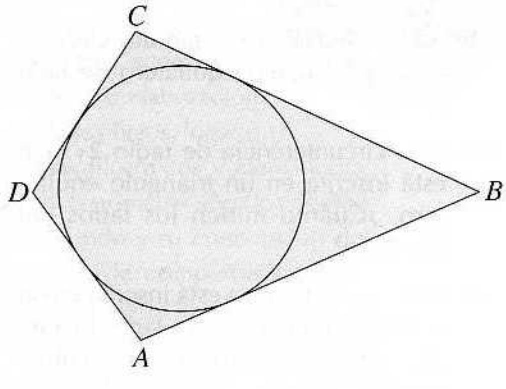
3. El trapecio isósceles está inscrito en la semicircunferencia y la razón entre los ángulos x e y es 1 : 4. Determine la medida de ellos.



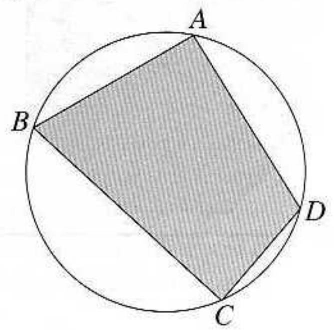
4. En la figura, la circunferencia está inscrita en el cuadrilátero. Las medidas de sus lados son: AB = 16 cm; BC = 21cm; CD = 19 cm. ¿Cuánto mide el lado AD?



5. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito a la circunferencia. Sus lados miden $AB = (4x + 2)$; $BC = (4x)$; $CD = (2x + 1)$; $AD = (3x)$. Determine el valor de "x" y la medida de cada uno de sus lados.



6. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en la circunferencia. La medida del ángulo BCD es 106°; el ángulo ADC mide el doble del ángulo ABC. Determine la medida de cada uno de los ángulos.



7. El perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia es $24\sqrt{2}$ cm. Determine el diámetro de dicha circunferencia.

8. ¿Cuánto mide el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio?

9. ¿Cuál es el área de un hexágono regular cuyos lados miden 8 cm?

10. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero de lado 18 cm?

11. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero de lado 12 cm?

12. ¿Cuál es el área del círculo inscrito en el triángulo equilátero de lado 24 cm?

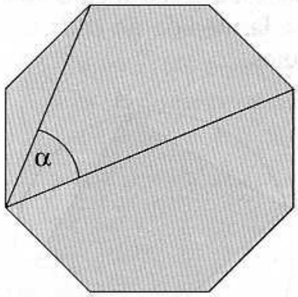
13. ¿Cuál es el área del círculo circunscrito al triángulo equilátero de lado 10 cm?

14. ¿Cuál es el área del círculo circunscrito al triángulo equilátero de lado 30 cm?

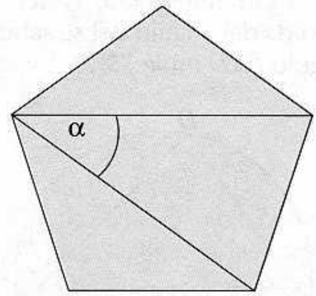
15. Una circunferencia de radio $2\sqrt{3}$ cm está inscrita en un triángulo equilátero. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

16. Una circunferencia está inscrita en un triángulo equilátero de lado 36 cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

17. El octágono de la figura es regular. Determine el valor de α.



18. El pentágono de la figura es regular. Determine el valor de α.



19. En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que:

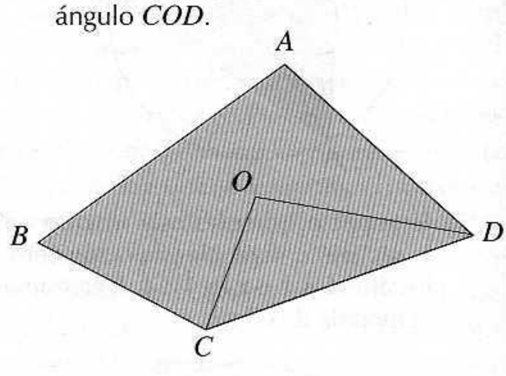
$$m\sphericalangle A = \frac{4}{5}\, m\sphericalangle D;$$

$$m\sphericalangle B = \frac{2}{3}\, m\sphericalangle A;$$

$$m\sphericalangle C = \frac{3}{4}\, m\sphericalangle B.$$

Determine la medida aproximada de todos los ángulos del cuadrilátero.

20. En el cuadrilátero $ABCD$, O es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos C y D. Si $\sphericalangle A = 102°$ y $\sphericalangle B = 64°$, determine la medida del ángulo COD.



Soluciones

1. 105°
2. $x = 95°$
   $y = 70°$
3. $x = 36°$
   $y = 144°$
4. $AD = 14$ cm
5. $x = 3$;
   $AB = 14$ cm
   $BC = 12$ cm
   $CD = 7$ cm
   $AD = 9$ cm
6. $\sphericalangle BAD = 74°$
   $\sphericalangle ABC = 60°$
   $\sphericalangle ADC = 120°$
7. 12 cm
8. $10\sqrt{3}$ cm
9. $96\sqrt{3}$ cm
10. $3\sqrt{3}$ cm
11. $2\sqrt{3}$ cm
12. $48\,\pi$ cm^2
13. $33,\overline{3}\,\pi$ cm^2
14. $300\,\pi$ cm^2
15. 12 cm
16. $6\sqrt{3}$ cm
17. 45°
18. 36°
19. $\sphericalangle A = 105{,}36°$
    $\sphericalangle B = 70{,}24°$
    $\sphericalangle C = 52{,}68°$
    $\sphericalangle D = 131{,}7°$
20. 83°

RENÉ DESCARTES

(La Haye, Francia, 1596-Estocolmo, Suecia, 1650)

Filósofo y matemático francés. Se educó en el colegio jesuita de La Flèche (1604-1612), donde gozó de un cierto trato de favor en atención a su delicada salud. Obtuvo el título de bachiller y de licenciado en derecho por la facultad de Poitiers (1616), y a los veintidós años partió hacia los Países Bajos, donde sirvió como soldado en el ejército de Mauricio de Nassau. En 1619 se enroló en las filas del duque de Baviera; el 10 de noviembre, en el curso de tres sueños sucesivos, experimentó la famosa «revelación» que lo condujo a la elaboración de su método. En 1628 decidió instalarse en los Países Bajos, lugar que consideró más favorable para cumplir los objetivos filosóficos y científicos que se había fijado, y residió allí hasta 1649. Los cinco primeros años los dedicó principalmente a elaborar su propio sistema del mundo y su concepción del hombre y del cuerpo humano, que estaba a punto de completar en 1633 cuando, al tener noticia de la condena de Galileo, renunció a la publicación de su obra, que tendría lugar póstumamente. En 1637 apareció su famoso Discurso del método, presentado como prólogo a tres ensayos científicos. Descartes proponía una duda metódica, que sometiese a juicio todos los conocimientos de la época, aunque, a diferencia de los escépticos, la suya era una duda orientada a la búsqueda de principios últimos sobre los cuales cimentar sólidamente el saber. Este principio lo halló en la existencia de la propia conciencia que duda, en su famosa formulación «pienso, luego existo». Sobre la base de esta primera evidencia, pudo desandar en parte el camino de su escepticismo, hallando en Dios el garante último de la verdad de las evidencias de la razón, que se manifiestan como ideas «claras y distintas». El método cartesiano, que propuso para todas las ciencias y disciplina, consiste en descomponer los problemas complejos en partes progresivamente más sencillas hasta hallar sus elementos básicos, las ideas simples, que se presentan a la razón de un modo evidente, y proceder a partir de ellas, por síntesis, a reconstruir todo el complejo, exigiendo a cada nueva relación establecida entre ideas simples la misma evidencia de éstas. En 1649 se desplazó a Estocolmo, donde murió cinco meses después de su llegada a consecuencia de una neumonía.

Prueba de selección múltiple

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un heptágono?

A. 540°

B. 720°

C. 900°

D. 1.080°

E. 1.260°

2. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un pentadecágono?

A. 5

B. 9

C. 12

D. 35

E. 90

3. ¿Cuál es la medida del ángulo exterior de un dodecágono regular?

A. 30°

B. 36°

C. 45°

D. 60°

E. 72°

4. ¿Cuál es el número de lados de un polígono regular cuyo ángulo exterior mide 24°?

A. 8

B. 10

C. 12

D. 15

E. 18

5. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de 20 lados?

A. 1.980°

B. 2.160°

C. 2.340°

D. 2.880°

E. 3.240°

6. ¿Cuántas diagonales, en total, se pueden trazar en un octógono?

A. 5

B. 20

C. 54

D. 40

E. 44

7. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide 135°?

A. El hexágono

B. El heptágono

C. El octógono

D. El decágono

E. El dodecágono

8. La suma de los ángulos interiores de un polígono es 2.160°. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en él?

A. 44

B. 77

C. 65

D. 54

E. 90

9. ¿Cuál es el número de lados del polígono en el cual se pueden trazar un total de 54 diagonales?

A. 8

B. 9

C. 10

D. 12

E. 13

10. ¿Cuál es la medida de cada ángulo exterior de un pentágono regular?

A. 72°

B. 36°

C. 30°

D. 108°

E. 120°

11. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interior mide 160º?

A. 12
B. 16
C. 18
D. 24
E. 36

12. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular en el cual la diferencia entre su ángulo interior y su ángulo exterior es 100º?

A. 6
B. 9
C. 10
D. 12
E. No existe tal polígono

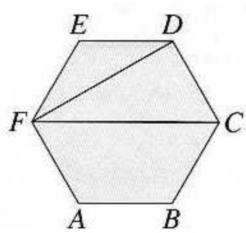
13. ¿Cuál es el área de un hexágono regular cuyos lados miden 10 cm de longitud?

A. $(5 \cdot \sqrt{3})\text{cm}^2$
B. $(10 \cdot \sqrt{3})\text{cm}^2$
C. $(25 \cdot \sqrt{3})\text{cm}^2$
D. $(50 \cdot \sqrt{3})\text{cm}^2$
E. $(150 \cdot \sqrt{3})\text{cm}^2$

14. ¿Cuál es el área del círculo circunscrito al triángulo equilátero de lado 12 cm?

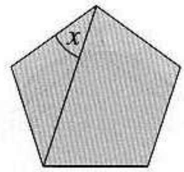
A. $48\,\pi\ \text{cm}^2$
B. $12\,\pi\ \text{cm}^2$
C. $24\,\pi\ \text{cm}^2$
D. $72\,\pi\ \text{cm}^2$
E. $144\,\pi\ \text{cm}^2$

15. La figura muestra un hexágono regular. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por las diagonales $\overline{FC}$ y $\overline{FD}$?



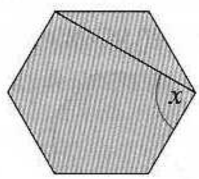
A. 15º
B. 24º
C. 30º
D. 36º
E. 45º

16. La figura muestra un pentágono regular. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



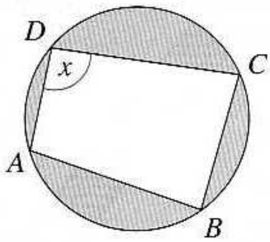
A. 15º
B. 30º
C. 36º
D. 45º
E. 72º

17. La figura muestra un hexágono regular. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



A. 30º
B. 36º
C. 45º
D. 90º
E. 135º

18. ¿Cuál es la medida del ángulo x de la figura, si se sabe que el ángulo ABC mide 110º?



A. 60°

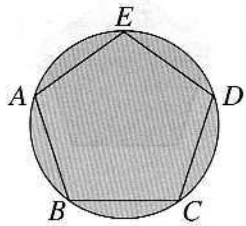
B. 70°

C. 110°

D. 120°

E. 130°

19. El pentágono regular $ABCDE$ está inscrito en la circunferencia. ¿Cuál es la medida del arco ABD?



A. 54°

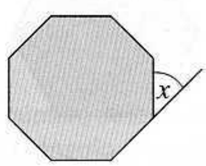
B. 108°

C. 162°

D. 216°

E. 300°

20. ¿Cuál es la medida del ángulo x de la figura si se trata de un octógono regular?



A. 20°

B. 24°

C. 30°

D. 45°

E. 60°

21. ¿Cuál es la medida del lado "l" de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r?

A. $l = r$

B. $l = \frac{r}{2}$

C. $l = r\sqrt{2}$

D. $l = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

E. $l = 2r\sqrt{2}$

22. Si el perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es 72 cm, ¿cuál es el área del círculo?

A. $A = 6\pi$ cm²

B. $A = 12\pi$ cm²

C. $A = 24\pi$ cm²

D. $A = 36\pi$ cm²

E. $A = 144\pi$ cm²

23. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado circunscrito a una circunferencia si el lado del cuadrado inscrito en la misma mide $3\sqrt{2}$?

A. 6 cm

B. 12 cm

C. $6\sqrt{2}$ cm

D. $12\sqrt{2}$ cm

E. $6\sqrt{3}$ cm

24. ¿Cuál es la medida de la apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r?

A. $\rho = r$

B. $\rho = \frac{r}{2}$

C. $\rho = r\sqrt{2}$

D. $\rho = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

E. $\rho = 2r\sqrt{2}$

25. Un cuadrado inscrito en una circunferencia tiene un perímetro de $60\sqrt{2}$. ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia?

A. 15 cm

B. 30 cm

C. 60 cm

D. $15\sqrt{2}$ cm

E. $30\sqrt{2}$ cm

26. El área del hexágono regular inscrito en una cirunferencia es $A = 96\sqrt{3}$ cm^2. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

A. 4 cm

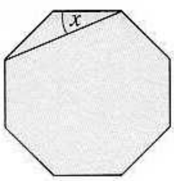
B. $4\sqrt{3}$ cm

C. 8 cm

D. $8\sqrt{3}$ cm

E. $4\sqrt{6}$ cm

27. La figura muestra un octógono regular. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



A. 22,5°

B. 45°

C. 30°

D. 36°

E. 45°

28. ¿Cuál es la medida de la apotema del hexágono inscrito en una circunferencia de radio 6 cm?

A. 6 cm

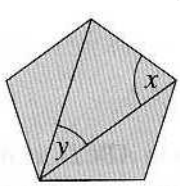
B. $\sqrt{3}$ cm

C. $2\sqrt{3}$ cm

D. $3\sqrt{3}$ cm

E. $6\sqrt{3}$ cm.

29. La figura muestra un pentágono regular. ¿Cuál es la suma de los ángulos x e y?



A. 72°

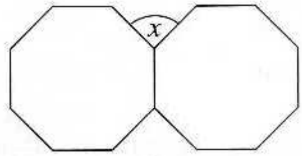
B. 108°

C. 120°

D. 144°

E. 150°

30. La figura muestra dos octógonos regulares congruentes, con un lado común. ¿Cuál es la medida del ángulo x?



A. 60°

B. 75°

C. 90°

D. 100°

E. 110°

31. Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. ¿Cuánto mide el lado?

A. 4 cm

B. 5 cm

C. 6 cm

D. 8 cm

E. 10 cm

32. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio $6\sqrt{2}$ cm?

A. 24 cm

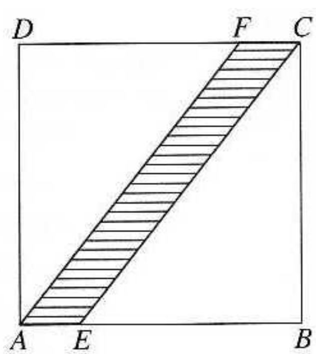
B. 48 cm

C. $24\sqrt{2}$ cm

D. $40\sqrt{2}$ cm

E. $48\sqrt{2}$ cm

33. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado 16 cm; $EC = AF = 20$ cm. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



A. 44 cm

B. 48 cm

C. 32 cm

D. 36 cm

E. 28 cm

34. El cuadrilátero *ABCD* está inscrito en una circunferencia. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son necesariamente verdaderas?

I. La diagonal $\overline{AC}$ es diámetro del círculo.

II. Los ángulos opuestos son suplementarios.

III. La suma de los pares de lados opuestos es la misma.

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo I y III

E. Sólo II y III

35. El cuadrilátero *ABCD* está circunscrito a una circunferencia, siendo *P*, *Q*, *R* y *S* los puntos de tangencia, respectivamente. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. Los ángulos opuestos son suplementarios.

II. La suma de los pares de lados opuestos es la misma.

III. $AP = AS$

A. Sólo I

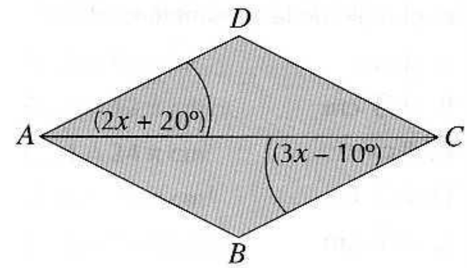
B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo II y III

E. I, II y III

36. El cuadrilátero de la figura *ABCD* es un rombo. ¿Cuál es el valor de x?



A. 20º

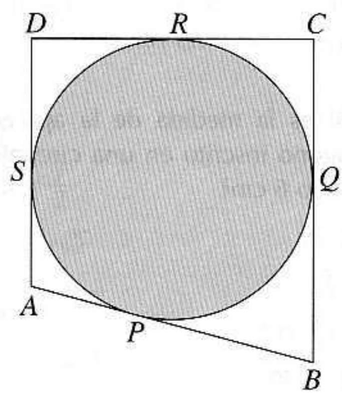
B. 30º

C. 34º

D. 70º

E. 74º

37. El cuadrilátero *ABCD* está circunscrito a la circunferencia, siendo *P*, *Q*, *R* y *S* los puntos de tangencia. Si $AP = 2$; $BQ = 5$; $BC = 9$ y $AD = 5$, ¿cuál es su perímetro?



A. 16 cm

B. 20 cm

C. 24 cm

D. 28 cm

E. 42 cm

38. Si un trapecio *ABCD*, con $AD \parallel BC$ está inscrito en una circunferencia, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. El trapecio es isósceles.

II. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia.

III. Arco AD = arco BC

A. Sólo I

B. Sólo III

C. Sólo I y II

D. Sólo I y III

E. I, II y III

39. Dos pentágonos son semejantes y dos lados homólogos miden 6 cm y 9 cm, respectivamente. Si el perímetro del pentágono más pequeño es 37 cm, ¿cuál es el perímetro del pentágono mayor?

A. 46 cm

B. 55 cm

C. 74 cm

D. 55,5 cm

E. 45,5 cm

40. El área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es $A = 54\sqrt{3}\ cm^2$. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

A. 4 cm

B. 6 cm

C. 8 cm

D. 12 cm

E. 16 cm

41. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de lado 9 cm?

A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ cm

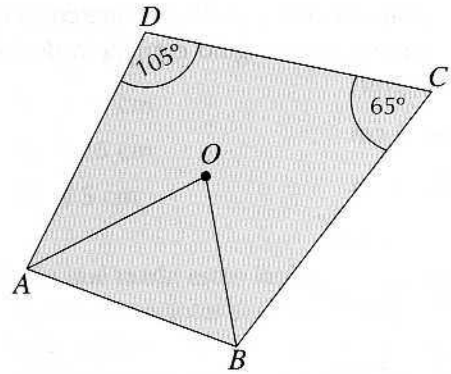
B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm

C. $\sqrt{3}$ cm

D. $3\sqrt{3}$ cm

E. $6\sqrt{3}$ cm

42. En la figura, $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BO}$ son bisectrices de los ángulos BAD y ABC respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo AOB?



A. 75°

B. 85°

C. 115°

D. 37,5°

E. 57,5°

43. ¿Cuál es el perímetro del triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia de 18 cm de radio?

A. 36 cm

B. 72 cm

C. $36\sqrt{3}$ cm

D. $72\sqrt{3}$ cm

E. $108\sqrt{3}$ cm

44. ¿Cuál es el perímetro de una circunferencia inscrita en un triángulo equilátero de lado 30 cm?

A. $5\pi\sqrt{3}$ cm

B. $10\pi\sqrt{3}$ cm

C. $15\pi\sqrt{3}$ cm

D. 10π cm

E. 15π cm

45. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero de lado $24\sqrt{3}$ cm?

A. 8 cm

B. 12 cm

C. $4\sqrt{3}$ cm

D. $8\sqrt{3}$ cm

E. $12\sqrt{3}$ cm

46. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}$ cm?

A. 1 cm

B. 3 cm

C. $\sqrt{3}$ cm

D. $\frac{3}{2}$ cm

E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

47. El área del círculo circunscrito a un hexágono regular es 144π cm^2. ¿Cuál es el área del hexágono?

A. $36\sqrt{3}$ cm^2

B. $72\sqrt{3}$ cm^2

C. $144\sqrt{3}$ cm^2

D. $108\sqrt{3}$ cm^2

E. $216\sqrt{3}$ cm^2

48. ¿Cuáles de las siguientes figuras geométricas son siempre inscriptibles?

I. Un triángulo escaleno.

II. Un trapecio isósceles.

III. Un trapecio rectángulo.

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo II y III

E. I, II y III

49. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A. Si todos los vértices de un polígono son puntos de una circunferencia, entonces el polígono está inscrito en la circunferencia.

B. Si todos lo lados de un polígono son tangentes a una circunferencia, entonces el polígono está circunscrito a la circunferencia.

C. No es posible inscribir una circunferencia en un rectángulo.

D. Siempre es posible inscribir una circunferencia en un rombo.

E. Siempre es posible inscribir una circunferencia en un trapecio.

50. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 1 cm?

A. 2 cm

B. 4 cm

C. $2\sqrt{2}$ cm

D. $4\sqrt{2}$ cm

E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

51. ¿Cuál es el área de un hexágono regular si su apotema mide $\sqrt{3}$ cm?

A. 3 cm^2

B. 6 cm^2

C. $2\sqrt{3}$ cm^2

D. $3\sqrt{3}$ cm^2

E. $6\sqrt{3}$ cm^2

52. ¿En qué razón se encuentran los perímetros de dos polígonos semejantes de n lados cada uno, si sus lados homólogos están en la razón 2 : 5?

A. 2 : 5

B. 4 : 25

C. $2^n : 5^n$

D. $4^n : 25^n$

E. $2n : 5$

53. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Los polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.

II. Las áreas de polígonos regulares con el mismo número de lados son entre sí como los cuadrados de las longitudes de dos lados homólogos cualesquiera.

III. El área de un polígono regular es igual al producto de su semiperímetro por la longitud de su apotema.

A. Sólo I

B. Sólo II

C. Sólo I y II

D. Sólo I y III

E. I, II y III

54. El perímetro de un polígono regular es $P = 8\frac{\sqrt{3}}{3}$ y uno de sus lados mide $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

E. 16

55. Los lados de dos triángulos equiláteros miden 28 cm y 8 cm respectivamente. ¿En qué razón están sus áreas?

A. 28 : 8

B. 28 : 4

C. 14 : 4

D. 49 : 4

E. 49 : 16

56. Las áreas de dos polígonos regulares con el mismo número de lados están en la razón $2 : \sqrt{a}$. ¿En qué razón están sus perímetros?

A. $\sqrt{2} : a$

B. $1 : a$

C. $\sqrt{2} : \sqrt[4]{a}$

D. $2 : \sqrt[4]{a}$

E. $\sqrt{2} : a^2$

57. Los perímetros de dos polígonos semejantes son 36 cm y 45 cm respectivamente. Si uno de los lados del más pequeño mide 3 cm, ¿cuál es la medida del lado homólogo?

A. 3,25 cm

B. 3,5 cm

C. 3,75 cm

D. 4,25 cm

E. 4 5 cm

58. ¿En qué razón están las áreas de dos polígonos semejantes si uno de los lados del más pequeño es igual a los tres quintos del lado correspondiente en el polígono mayor?

A. 1 : 3

B. 3 : 5

C. 1 : 5

D. 5 : 9

E. 9 : 25

59. Las áreas de dos polígonos semejantes son 72 cm² y 8 cm². Uno de los lados del polígono menor mide 3 cm. ¿Cuál es la medida del lado homólogo en el polígono mayor?

A. 4 cm

B. 6 cm

C. 8 cm

D. 9 cm

E. 12 cm

60. Las áreas de dos polígonos semejantes son 5 cm² y 60 cm². Uno de los lados del polígono mayor mide $6\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es la medida del lado homólogo en el polígono menor?

A. 2 cm

B. 3 cm

C. 6 cm

D. $2\sqrt{3}$ cm

E. $3\sqrt{3}$ cm

Soluciones

1. C	**11.** C	**21.** C	**31.** E	**41.** D	**51.** E
2. C	**12.** B	**22.** E	**32.** B	**42.** B	**52.** A
3. A	**13.** E	**23.** A	**33.** B	**43.** E	**53.** E
4. D	**14.** A	**24.** D	**34.** B	**44.** B	**54.** E
5. E	**15.** C	**25.** B	**35.** D	**45.** B	**55.** D
6. B	**16.** C	**26.** C	**36.** B	**46.** A	**56.** C
7. C	**17.** D	**27.** A	**37.** D	**47.** E	**57.** C
8. B	**18.** B	**28.** D	**38.** D	**48.** C	**58.** E
9. D	**19.** D	**29.** B	**39.** D	**49.** E	**59.** D
10. A	**20.** D	**30.** C	**40.** B	**50.** C	**60.** B

CAPÍTULO 8

Lugares geométricos

Lugar geométrico (L.G.) 8.1

En geometría, acostumbramos a llamar **lugar geométrico** a la ubicación en el espacio de un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición.

Esta condición debe ser tan clara, que nos permita determinar para cada punto del espacio si éste la satisface o no y según eso determinamos si el punto en cuestión pertenece o no al lugar geométrico.

En general, para demostrar la existencia de un lugar geométrico debemos probar dos proposiciones:

a) Que todos los puntos del lugar geométrico cumplan la condición que lo define.

b) Que cualquier punto que no está en el lugar geométrico no cumpla la condición.

En este texto nos limitamos a comentar algunos lugares geométricos en el plano.

Las iniciales L.G. simbolizan las palabras lugar geométrico.

La circunferencia

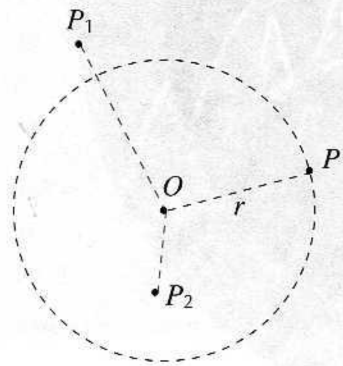
> El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto dado O se denomina **circunferencia**.

El punto dado O se llama **centro** y la distancia de cualquier punto del lugar geométrico al centro se denomina **radio** y se denota por r.

Para demostrar que $\odot(O, r)$ es el lugar geométrico enunciado debemos verificar que:

a) Todos los puntos de la circunferencia cumplan la condición de estar a la misma distancia del centro.

b) No exista un punto que no esté en la circunferencia y que cumpla la condición del lugar geométrico.



Notamos que ambas proposiciones se verifican, es decir:

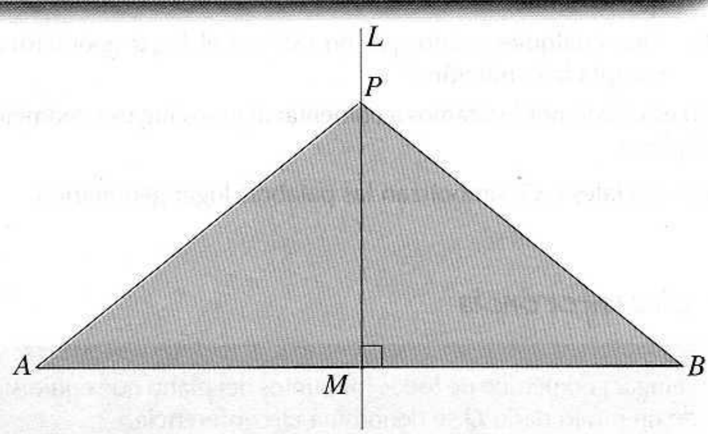
a) Sólo los puntos de la circunferencia están a la distancia r del centro.

b) No hay otro punto que no esté en la circunferencia y que cumpla la condición.

- P_1 está en el exterior de la circunferencia y $OP_1 > r$.
- P_2 está en el interior de la circunferencia y $OP_2 < r$.

La simetral de un segmento

El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento dado es una recta perpendicular al segmento en su punto medio, y se denomina **simetral** del segmento.



Demostrémoslo.

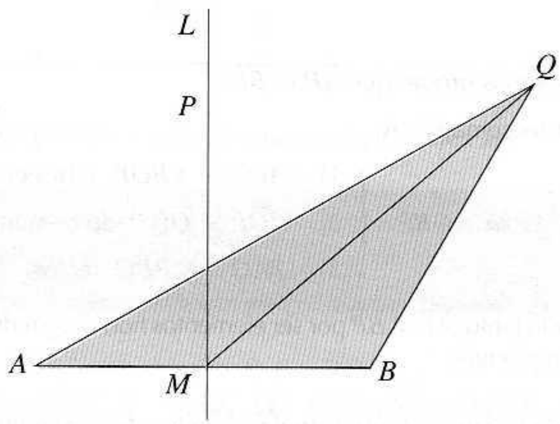
Sea $\overline{AB}$ el segmento dado, M su punto medio y L la simetral.

a) Todos los puntos de L satisfacen la condición del L.G.:
Sea P un punto cualquiera de L.
Debemos probar que $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.
Unimos A con P y B con P.
Por teorema L.A.L.

$$\triangle AMP \cong \triangle BMP \begin{cases} 1) \quad \overline{AM} \cong \overline{BM} \text{ (M punto medio)} \\ 2) \ \sphericalangle PMA \cong \sphericalangle PMB \text{ (rectos)} \\ 3) \ \overline{PM} \text{ lado común} \end{cases}$$

Por lo tanto, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ por ser elementos homólogos de triángulos congruentes.

b) No existe otro punto fuera de la simetral que equidiste de los extremos del trazo $\overline{AB}$.



Supongamos que Q, situado fuera de la simetral, equidista de los extremos de $\overline{AB}$. Llegaremos a una contradicción, lo que nos indicará que nuestra suposición es falsa.

$\overline{AQ} \cong \overline{BQ} \Rightarrow \triangle ABQ$ isósceles.

Como M es punto medio, $\overline{QM}$ es la transversal de gravedad en triángulo isósceles y coincide con la altura.

Por lo tanto, $\overline{QM} \perp \overline{AB}$.

Por otro lado, $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ (P punto de la simetral). Esto es absurdo porque contradice el postulado que dice que una recta tiene una sola perpendicular en un mismo punto (M).

Por lo tanto, es falso que Q esté fuera de la simetral, es decir, no existe un punto fuera de la simetral que cumpla con la condición del lugar geométrico.

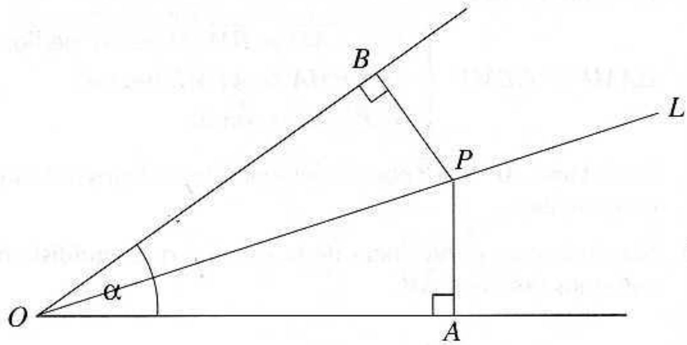
La bisectriz de un ángulo

El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo se denomina **bisectriz** del ángulo.

Sea AOB el ángulo dado y L la bisectriz.

a) Todos los puntos de L (bisectriz) equidistan de los lados del ángulo.

Sea P un punto cualquiera de L.



Debemos probar que $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

Por teorema A.L.A.

$$\triangle OAP \cong \triangle OBP \begin{cases} 1) \ \sphericalangle AOP \cong \sphericalangle BOP \ (L \text{ bisectriz}) \\ 2) \ \overline{OP} \cong \overline{OP} \ (\text{lado común}) \\ 3) \ \sphericalangle PAO \cong \sphericalangle PBO \ (\text{rectos}) \end{cases}$$

Por lo tanto, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ por ser elementos homólogos de triángulos congruentes.

b) Todo punto que equidiste de los lados del triángulo está sobre la bisectriz.

Sea P un punto sobre L equidistante de los lados del ángulo AOB; esto es, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Debemos demostrar que L es bisectriz, es decir, que:

$\sphericalangle POA \cong \sphericalangle POB$.

Por teorema L.L.A.

$$\triangle OAP \cong \triangle OBP \begin{cases} 1) \ \overline{PA} \cong \overline{PA} \ (\text{hipótesis}) \\ 2) \ \sphericalangle OAP \cong \sphericalangle OBP \ (\text{rectos}) \\ 3) \ \overline{OP} \cong \overline{OP} \ (\text{lado común}) \end{cases}$$

Por lo tanto, $\sphericalangle POA \cong \sphericalangle POB$ por ser elementos homólogos de triángulos congruentes.

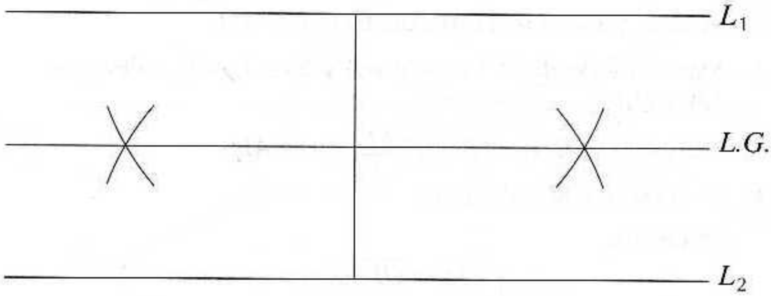
Hasta ahora hemos demostrado los lugares geométricos enunciados.

A continuación, veremos cómo construir algunos lugares geométricos que supondremos verdaderos.

La paralela media

> El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos rectas paralelas dadas es la paralela media.

Para construir este lugar geométrico basta trazar la simetral de un segmento ubicado entre las paralelas y que sea perpendicular a ambas.



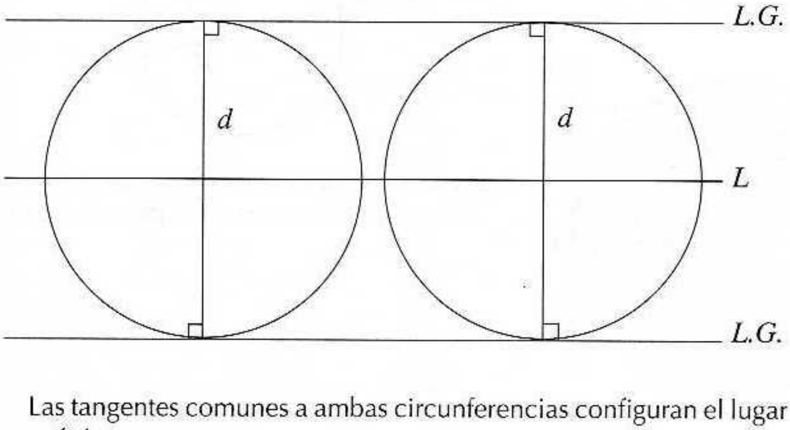
Este lugar geométrico puede enunciarse también así:

> El lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias tangentes a dos rectas paralelas es la paralela media.

Las tangentes a todas las circunferencias con centro sobre una recta dada y radio dado.

> El lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia determinada de una recta dada consta de las dos paralelas, una a cada lado de la recta, trazadas a dicha distancia.

Para construir dicho lugar geométrico basta dibujar dos circunferencias con centro en cualquier punto de la recta L y cuyo radio es la distancia dada d.



Las tangentes comunes a ambas circunferencias configuran el lugar geométrico.

Centro de todas las circunferencias tangentes a dos rectas secantes

> El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos rectas secantes consta de las bisectrices de los ángulos que forman dichas rectas.

1. Sean L_1 y L_2 las rectas dadas; $L_1 \cap L_1 = \{O\}$.

2. Marcamos desde O dos puntos A y B en L_1 y L_2, tales que, $OA = OB$.

3. $\odot(A, r) \cap \odot(B, r) = \{P, Q\}$; $\dfrac{AB}{2} < r < AB$.

4. P y Q son puntos del $L.\ G.$

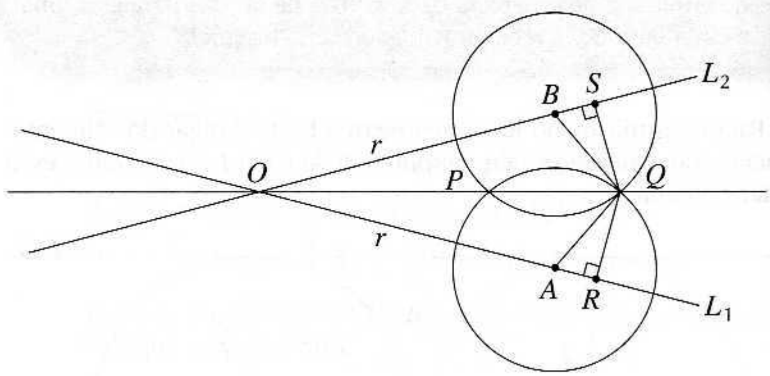
En efecto:

5. $\triangle OAQ \cong \triangle OBQ \begin{cases} \overline{OA} \cong \overline{OB} \text{ (por construcción)} \\ \overline{OQ} \cong \overline{OQ} \text{ (lado común)} \\ \overline{AQ} \cong \overline{BQ} \text{ (ambos miden } r) \end{cases}$ (L.L.L)

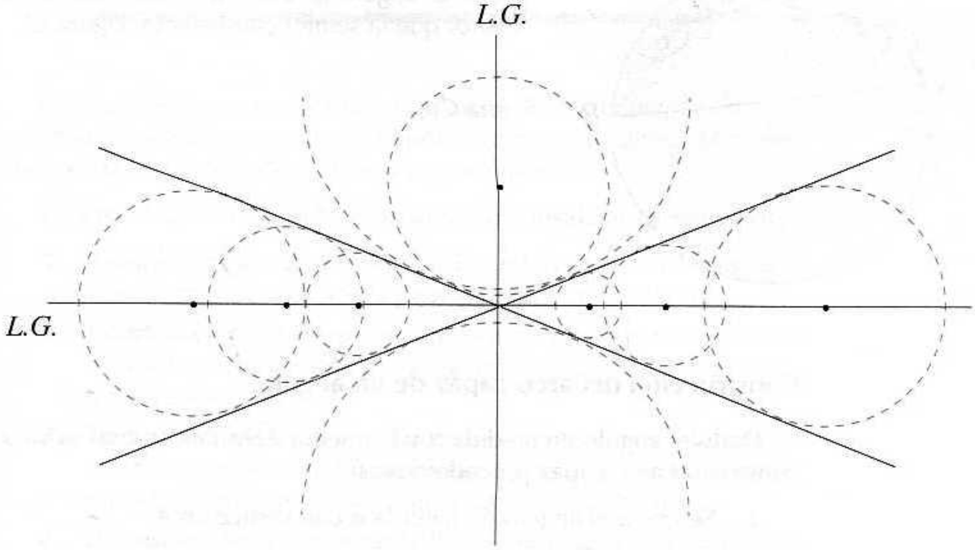
6. Trazamos $\overline{QS} \perp L_2$ y $\overline{QR} \perp L_1$

7. $\triangle ORQ \cong \triangle OSQ \begin{cases} \overline{OQ} \cong \overline{OQ} \text{ (lado común)} \\ \measuredangle ROQ \cong \measuredangle SOQ \text{ (congruencia anterior)} \\ \measuredangle ROQ \cong \measuredangle SOQ \text{ (ambos son rectos)} \end{cases}$ (A.L.A)

8. Luego $\overline{QS} \cong \overline{QR}$ y Q es el centro de una circunferencia tangente a L_1 y a L_2.



Observamos que el lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.



Arco capaz

El lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos de medida α inscritos o semiinscritos que subtienden el mismo arco en una circunferencia se llama arco capaz del ángulo α.

Si el ángulo es agudo, el arco capaz es mayor que la semicircunferencia (Figura A).

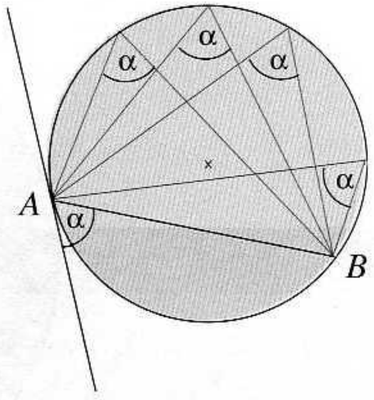


Figura A

Si el ángulo es recto, el arco capaz es exactamente media circunferencia (Figura B).

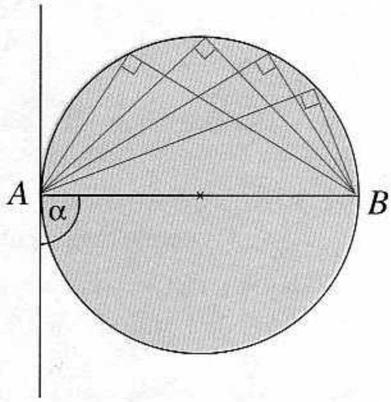
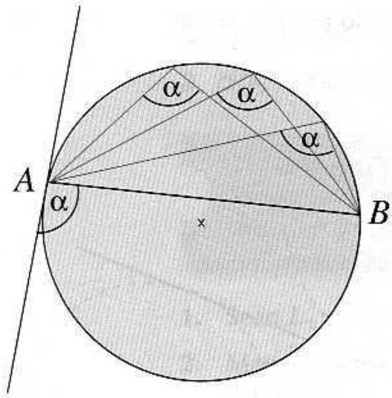


Figura B



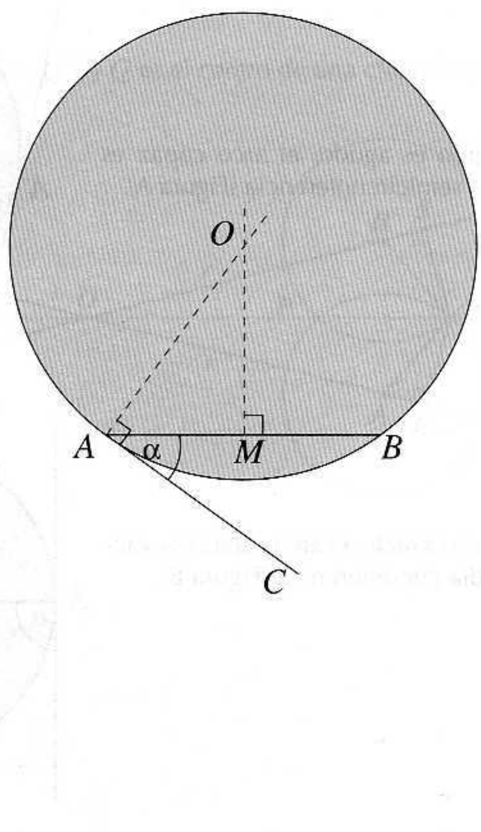
Si el ángulo es obtuso, el arco capaz es menor que la semicircunferencia (Figura C).

Figura C)

Construcción del arco capaz de un ángulo

Dado el ángulo de medida α y la cuerda $\overline{AB}$ sobre la cual se va a construir el arco capaz procedemos así:

1. Se copia el ángulo de medida α con vértice en A.
2. Se copia $\overline{AB}$ sobre un lado del ángulo.
3. Se traza la perpendicular al otro lado del ángulo en el vértice en A.
4. Se traza la simetral a la cuerda $\overline{AB}$.
5. La intersección de la perpendicular a $\overline{AC}$ en A con la simetral a la cuerda $\overline{AB}$ nos da el punto O, centro de la ⊙ (O, $\overline{OA}$) que contiene el arco capaz de α.



Aplicaciones de lugar geométrico 8.2

Los lugares geométricos que estudiamos anteriormente, así como muchos otros que sería largo de enunciar, tienen una aplicación concreta en la resolución de problemas geométricos.

Para resolver dichos problemas vamos a considerar cuatro etapas:

1. **Análisis**: Se hace una figura auxiliar estimando los datos y estableciendo las condiciones para los elementos pedidos.
2. **Construcción**: Se construye la figura necesaria para solucionar el problema, guiándose por la figura auxiliar y utilizando exactamente los datos.
3. **Demostración**: Se demuestra que la figura construida corresponde a la solución del problema y que los elementos determinados cumplen con las condiciones del problema.
4. **Discusión**: Basándonos en la figura construida y la demostración hecha, en este punto debemos determinar si el problema propuesto:

   a) Tiene solución única.

   b) Tiene más de una solución.

   c) No tiene solución.

Ejercicios resueltos

1. Encontremos los puntos que equidistan de dos rectas paralelas dadas y de los lados de un ángulo dado.

   Análisis:

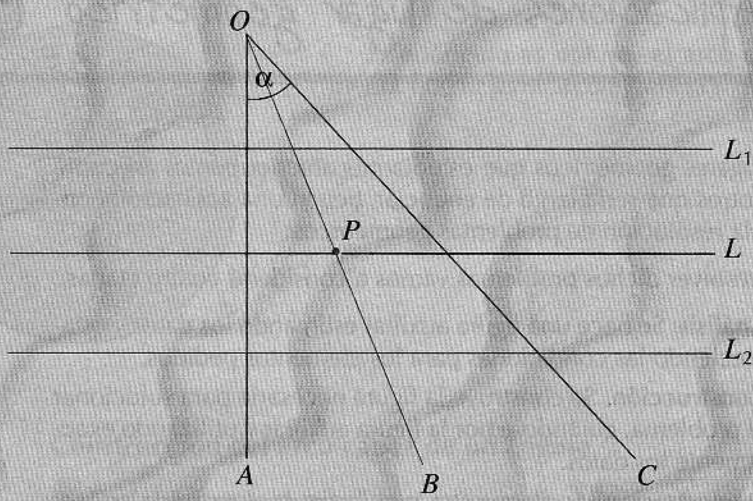
   Sean L_1 y L_2 rectas paralelas.

   Sea AOC ángulo dado.

   1) Todos los puntos que equidistan de dos rectas paralelas dadas están sobre la paralela media L (lugar geométrico).

   2) Todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo AOC están sobre la bisectriz del ángulo $\overrightarrow{OB}$ (lugar geométrico).

   De 1) y 2) podemos decir que los puntos que satisfacen el problema están en la intersección de la paralela L y la bisectriz $\overrightarrow{OB}$.



Construcción:

1. Dibujamos $L_1 \parallel L_2$.
2. Dibujamos la paralela media L (lugar geométrico).
3. Dibujamos un ángulo cualquiera, AOC.
4. Dibujamos la bisectriz de $\measuredangle AOC$, ($\overrightarrow{OB}$).
5. El punto $\{P\} = L \cap \overrightarrow{OB}$ es el punto pedido.

Figura A)

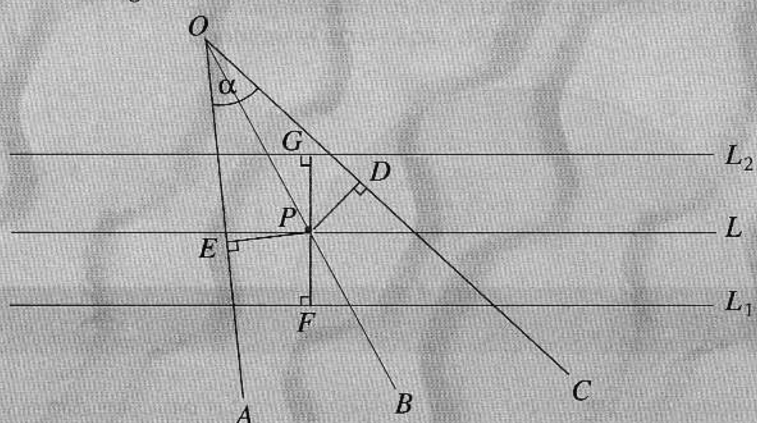


Figura B)

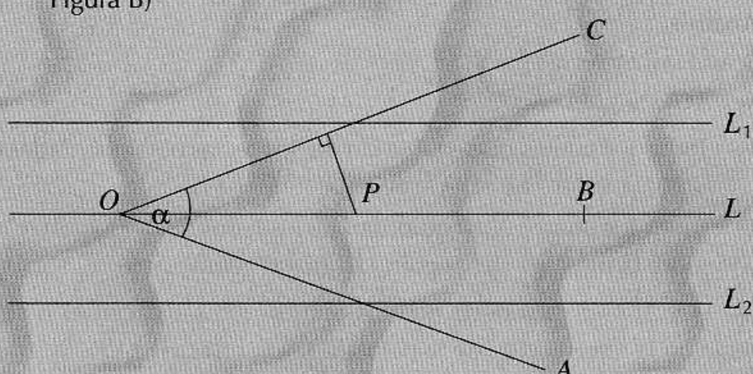
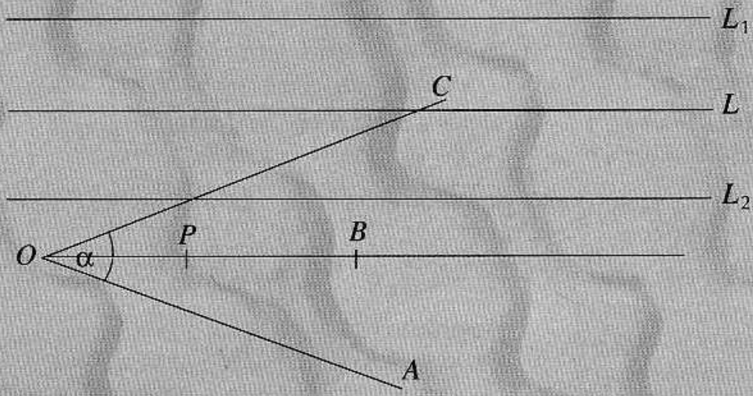


Figura C)



Discusión:

a) Hay una solución si L y $\overrightarrow{OB}$ son secantes (Figura A).

b) Hay infinitas soluciones si L y $\overrightarrow{OB}$ coinciden (Figura B).

c) No hay solución si L y $\overrightarrow{OB}$ Son paralelas (Figura C).

Demostración:

P es solución ya que:

$\overline{PF} \cong \overline{PG}$ ($P \in$ paralela media entre L_1 y L_2)

$\overline{PE} \cong \overline{PD}$ ($P \in \overrightarrow{OB}$ bisectriz del ángulo AOC).

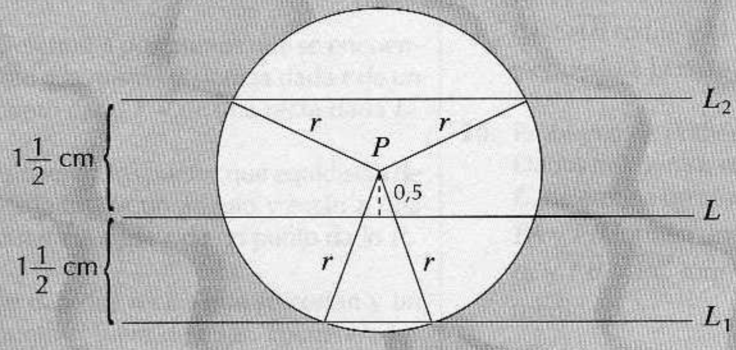
2. Dada una recta L y un punto P ubicado a $\frac{1}{2}$ cm de L, encontremos los puntos que están a $1\frac{1}{2}$ cm de L y a una distancia dada r de P.

Análisis:

Los puntos pedidos deben satisfacer:

1) El lugar geométrico de todos los puntos que están a 1,5 cm de la recta L; en la figura L_1 y L_2.

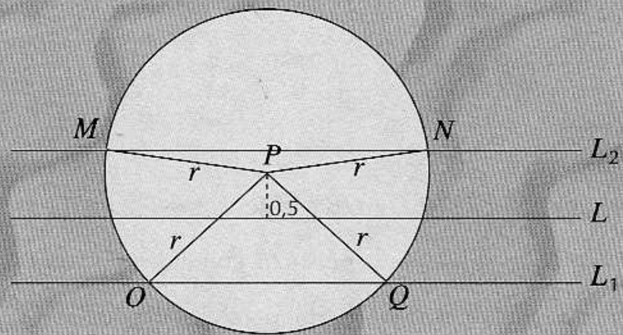
2) El lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia dada del punto P; en la figura, la $\odot(P, r)$.



De 1) y 2) vemos que los puntos pedidos están en la intersección de la $\odot(P, r)$ con las rectas L_1 y L_2.

Construcción:

1) Dibujamos L y P a 0,5 cm de L.
2) Dibujamos L_1 y L_2 paralelas a L a 1,5 cm de distancia.
3) Dibujamos $\odot(P, r)$.
4) M, N, O, Q son puntos que están en la intersección de los dos lugares geométricos.



Demostración:

M, N, O, Q están a 1,5 cm de L (sobre las paralelas).

M, N, O, Q están a r cm de P (sobre $\odot(P, r)$).

Discusión:

Si $r < 1$ cm, no hay solución.

Si $r = 1$ cm, hay una solución.

Si $1 < r < 2$ cm, hay dos soluciones.

Si $r = 2$ cm, hay tres soluciones.

Si $r > 2$ cm, hay cuatro soluciones.

Haz las figuras de los cuatro primeros casos.

Ejercicios

1. Construye el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una circunferencia que son paralelas a una recta dada $\overleftrightarrow{AB}$.

2. Construye una circunferencia que pase por los puntos P y Q y cuyo centro se encuentre en una recta dada $\overleftrightarrow{AB}$.

3. Dadas dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, construye una circunferencia de radio dado r que sea tangente a ambas rectas.

4. Dado un punto P y una recta $\overleftrightarrow{AB}$, $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, construye una circunferencia de radio dado r que contenga a P y sea tangente a la recta dada $\overleftrightarrow{AB}$.

5. Dadas dos rectas, $L_1 \parallel L_2$, construye una circunferencia que intersecte sobre L_1 una cuerda de longitud dada AB y sea tangente a L_2.

6. Dada una circunferencia $\odot(O, r)$ y una recta L que no intersecte la circunferencia, traza una secante a la $\odot$, paralela a L de modo que la cuerda intersectada por la circunferencia sea de longitud dada a.

7. Construye una circunferencia con radio dado, que sea tangente a una recta dada en un punto P de ella.

8. Dados los puntos A y B, hallar un punto P que se encuentre a la distancia r_1 de A y r_2 de B.

9. Determina dos puntos que se encuentran a la misma distancia dada r de un punto dado P y de una recta dada L.

10. Encuentra los puntos que equidistan de los lados de un ángulo y están a una distancia dada r de un punto dado P.

11. Se dan dos rectas que se cortan y un punto P fuera de ellas. Encuentra los puntos que equidistan de estas rectas y están a una distancia r de P.

12. Dados dos puntos, P_1 y P_2, y un ángulo, encuentra los puntos del plano que equidisten de los lados del ángulo y de los puntos P_1 y P_2.

13. Dadas dos rectas que se cortan y dos puntos, uno en cada recta, encuentra los puntos que equidistan de las rectas y que equidistan de los puntos dados.

14. Encuentra los puntos que están a una distancia r de una recta dada L_1 y que equidistan de dos rectas paralelas, L_2 y L_3.

15. Encuentra los puntos que están a una distancia dada r de un punto dado P y equidistan de los lados de un ángulo dado.

16. Encuentra los puntos que equidistan de dos puntos dados y están a una distancia dada de una recta dada.

17. Dada una cuerda de longitud a, construye el arco capaz de un ángulo agudo, de un ángulo recto y de un ángulo obtuso.

18. Dado un ángulo agudo de medida α, construye su arco capaz sobre una cuerda de longitud a y sobre una cuerda de longitud b.

19. Determina el lugar geométrico del vértice C de todos los triángulos cuya base $\overline{AB}$ es fija y el ángulo de medida γ opuesto a la base, es constante.

20. Problema de Pothenot o de la carta. Dados tres puntos no colineales A, B y C, determina un cuarto punto P tal que $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ formen un ángulo de medida α, y $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ formen otro ángulo de medida β.

Soluciones

1. El $L.G.$ pedido es una perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por el centro de la circunferencia.

2. El centro P de la circunferencia pedida se encuentra intersectando la simetral del segmento $\overline{PQ}$ con la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Su radio es $\overline{OP}$, siendo O el punto de intersección de la simetral con la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

3. El centro de la circunferencia pedida se encuentra en la intersección de dos rectas que están a la distancia r de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Hay 4 soluciones.

4. El centro de la circunferencia pedida se encuentra en la intersección de la recta L paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ a la distancia r y la $\odot(P, r)$. El problema tiene solución sólo si la distancia de P a $\overleftrightarrow{AB}$ es menor o igual a $2r$.

5. Intersectando la simetral de $\overline{AB}$ con L_2 hallamos C. Intersectando la simetral de $\overline{BC}$ con la simetral de $\overline{AB}$ encontramos el centro O de la circunferencia pedida. Su radio es $\overline{OA}$.

6. Desde O se traza $L_1 \perp L$. A ambos lados de L_1 se trazan L_2 y L_3 paralelas a L_1 a la distancia $\frac{a}{2}$. $L_2 \cap \odot (O, r) = \{A, B\}$. $L_3 \cap \odot (O, r) = \{C, D\}$. Las rectas $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ satisfacen las condiciones iniciales. El problema tiene solución sólo si $a < 2r$.

7. Hay dos soluciones. El centro de las circunferencias pedidas se encuentran en la perpendicular a la recta dada en P a la distancia r de P. (r es la medida del radio dado.)

8. Los puntos pedidos se encuentran en la intersección de $\odot(A, r_1)$ y $\odot(B, r_2)$.

9. Los puntos pedidos están en la intersección de la $\odot(P, r)$ y la recta paralela a L a la distancia r de ella.

10. Los puntos pedidos se encuentran en la intersección de la bisectriz del ángulo con la $\odot(P, r)$.

11. Los puntos pedidos se encuentran en la intersección de la bisectriz del ángulo formado por la rectas con la $\odot(P, r)$.

12. Los puntos pedidos se encuentran en la intersección de la bisectriz del ángulo (o de su suplemento) y la simetral del segmento $\overline{P_1P_2}$.

13. Los puntos pedidos están en la intersección de la simetral del segmento formado por ambos puntos y la bisectriz del ángulo formado por la semirrectas que contienen a los puntos dados.

14. Los puntos pedidos se encuentran en la intersección de la paralela media a L_2 y L_3 y ambas paralelas a L_1 a la distancia r.

15. Los puntos pedidos están en la intersección de la bisectriz del ángulo y la $\odot(P, r)$.

16. Los puntos pedidos están en la intersección de la simetral del segmento generado por los puntos dados y las paralelas a la recta dada a la distancia dada.

17. Ver página 360.

18. Ver página 360.

19. El $L.\ G.$ pedido es el arco capaz de γ sobre el segmento $\overline{AB}$.

20. El punto P se encuentra en la intersección del arco capaz del ángulo de medida α sobre $\overline{AB}$ y el arco capaz del ángulo de medida β sobre $\overline{BC}$.

Construcción de triángulos 8.3

Un triángulo está determinado si se puede dibujar en el plano, y para ello debemos conocer tres elementos (lados o ángulos interiores) de él, de los que, a lo menos uno debe ser lineal (lado). Estos tres elementos deben ser independientes entre sí, es decir, conociendo dos de ellos no es posible concluir el tercero.

Un elemento de un triángulo se dice dependiente de otros si éste se puede obtener al conocer los demás; por ejemplo, un ángulo de un triángulo es dependiente de los otros dos.

Un triángulo queda **exactamente determinado** si se conocen tres elementos independientes de él.

Un triángulo está **indeterminado** si se conocen **menos** de tres elementos de él independientes entre sí.

Un triángulo está **sobredeterminado** si se conocen **más** de tres elementos de él independientes entre sí.

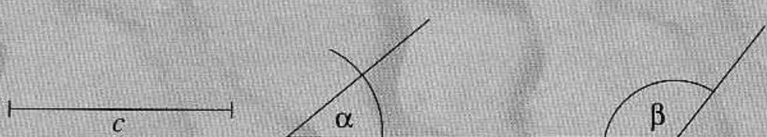
El problema de construir un triángulo consiste en dibujar un triángulo congruente con otro que ya existe y que cumple con determinadas condiciones.

Para resolver problemas de construcción de triángulos debemos seguir los mismos pasos que para resolver cualquier problema geométrico, es decir, análisis, construcción, demostración y discusión.

Ejercicios resueltos

1. Construir un triángulo dados c, α y β.

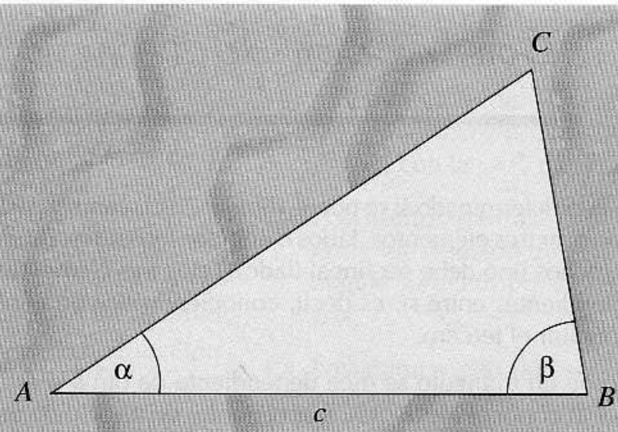
Datos:



Análisis:

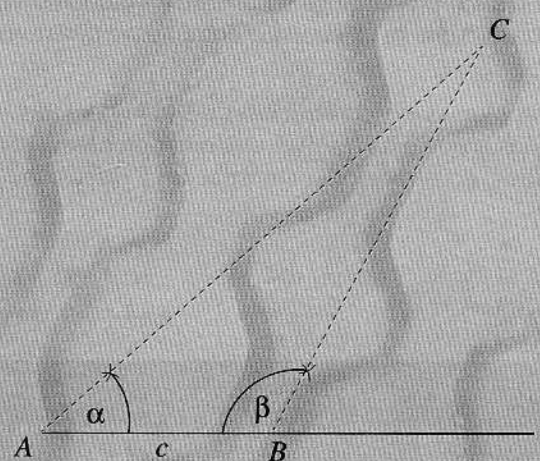
Construimos un triángulo cualquiera y marcamos en él los datos dados.

Observamos en él que el lado de medida c determina los vértices A y B. El vértice C queda determinado al intersectar los lados libres de los ángulos de medidas α y β copiados en A y B, respectivamente.



Construcción:

1) Copiamos el lado de medida c, determinando con ello los vértices A y B.
2) Copiamos el ángulo de medida α con vértice en A y el de medida β con vértice en B.
3) Prolongando los lados libres de los ángulos obtenemos en su intersección el vértice C.



Demostración:

Por construcción, el triángulo ABC construido corresponde exactamente al triángulo pedido (Teorema de congruencia, A.L.A.).

Discusión:

Este problema tiene solución única cuando $\alpha + \beta < 180°$ y no tiene solución cuando $\alpha + \beta \geq 180°$.

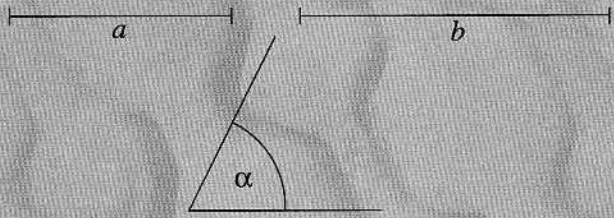
2. Construir un triángulo dados a, b y α.

Consideremos dos casos:

1) $a < b$
2) $a > b$

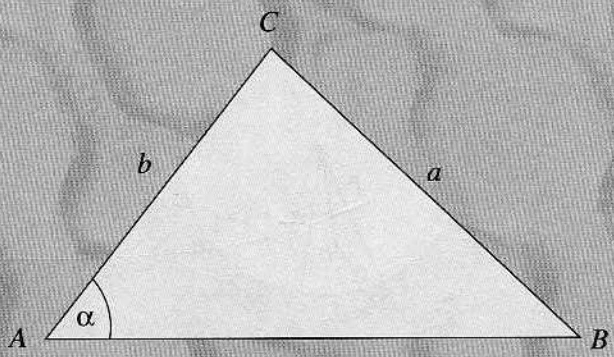
Caso: $a < b$

Datos:



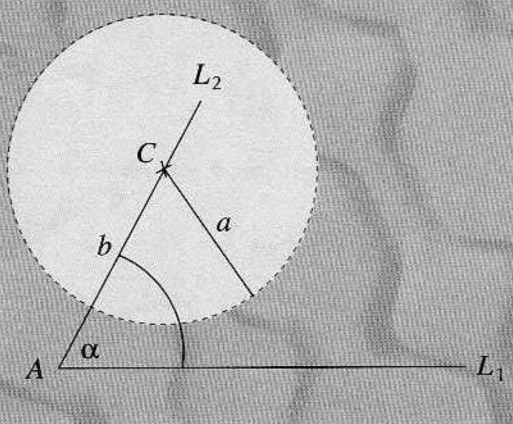
Análisis:

Dibujamos el triángulo auxiliar, marcamos en él los datos y observamos que el ángulo de medida α determina el vértice A. Con centro en A y radio b, determinamos el vértice C. Con centro en C y radio a, encontramos B.



Construcción:

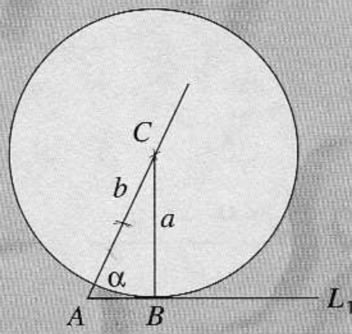
1) Se copia el ángulo de medida α con vértice A y lados L_1 y L_2.
2) $\odot(A, b) \cap L_2$ determina el vértice C.
3) $\odot(C, a) \cap L_1$ determina el vértice B.



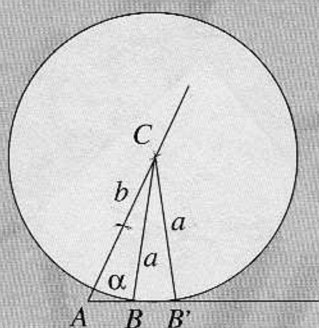
Discusión:

Observamos que con los datos dados, el problema no tiene solución, ya que $\odot(C, a)$ no intersecta a L_1.

Si $\odot(C, a)$ es tangente a L_1, el problema tiene solución única: un triángulo rectángulo en B.



Si $\odot(C, a)$ es secante a L_1, el problema tiene dos soluciones, $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C$.

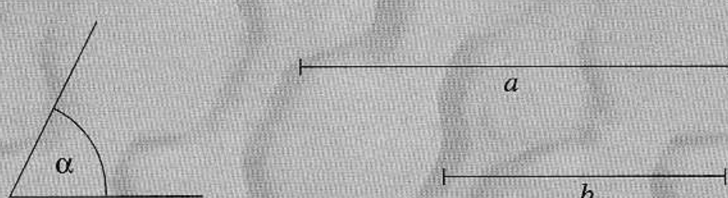


Esta última situación muestra por qué el teorema de congruencia L.L.A. exige que el ángulo congruente sea el opuesto al lado mayor.

En la figura vemos dos triángulos, ABC y $AB'C$, que tienen dos lados (a y b) y el ángulo opuesto al menor de ellos (α) iguales y, sin embargo, no son congruentes.

Caso 2: $a > b$

Datos:

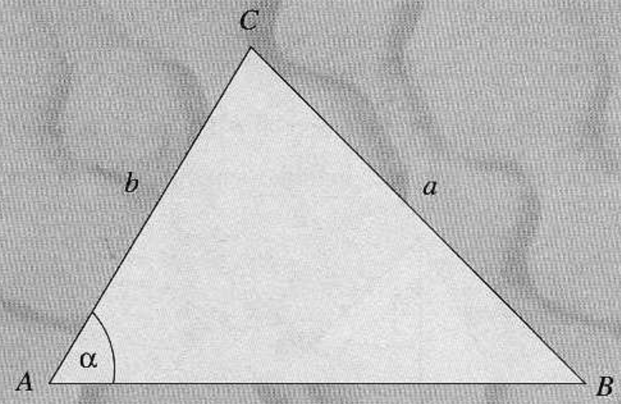


Análisis:

Dibujamos un triángulo auxiliar, marcamos los datos y observamos que el ángulo de medida α determina el vértice A; con centro en A y radio b determinamos C, y con centro en C y con radio a determinamos B.

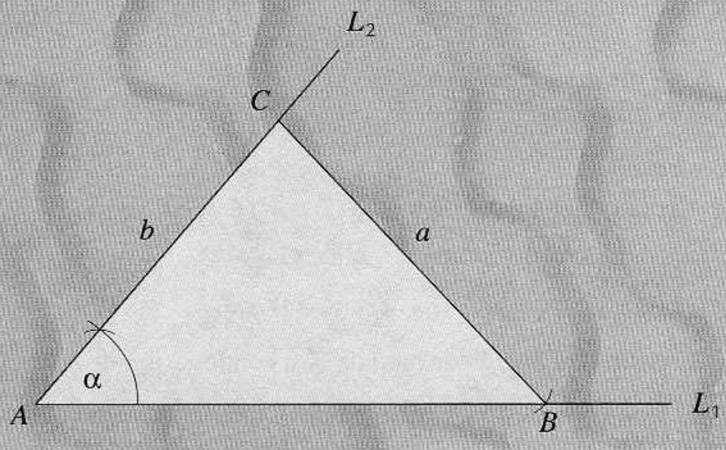
Construcción:

1) Copiamos el ángulo de medida α con vértice A y lados L_1 y L_2.
2) $\odot(A, b) \cap L_2$ determina el vértice C.
3) $\odot(C, a) \cap L_1$ determina el vértice B.



Demostración:

Por construcción, el triángulo ABC construido corresponde exactamente al triángulo pedido (Teorema de congruencia, L.L.A.).

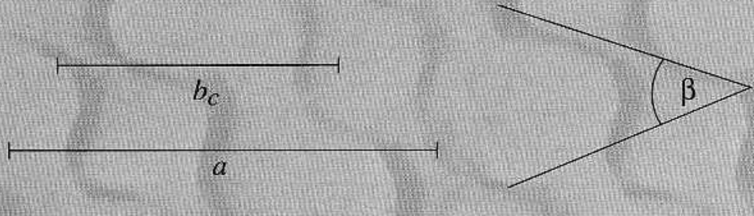


Discusión:

El problema tiene solución única cuando $a > b$. Si $a = b$, la solución es un triángulo isósceles y si $a < b$, lo vimos en el caso 1.

3. Construir un triángulo dados β, b_c y a.

Datos:



Análisis:

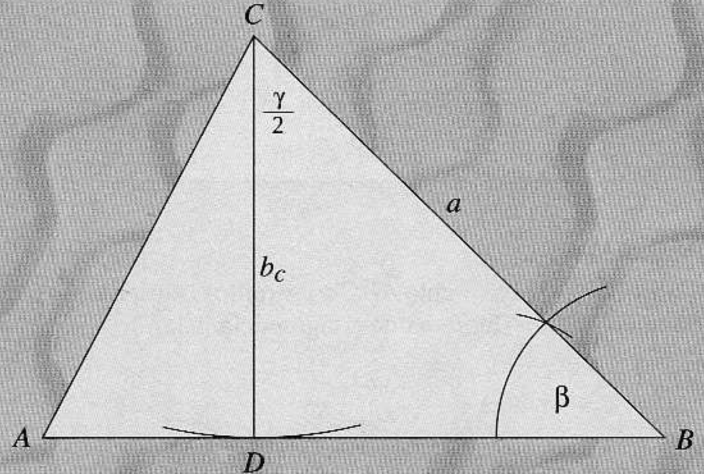
Dibujamos un triángulo auxiliar, marcamos en él los datos y observamos que:

El ángulo de medida β determina el vértice B.

$\odot(B, a)$ determina C.

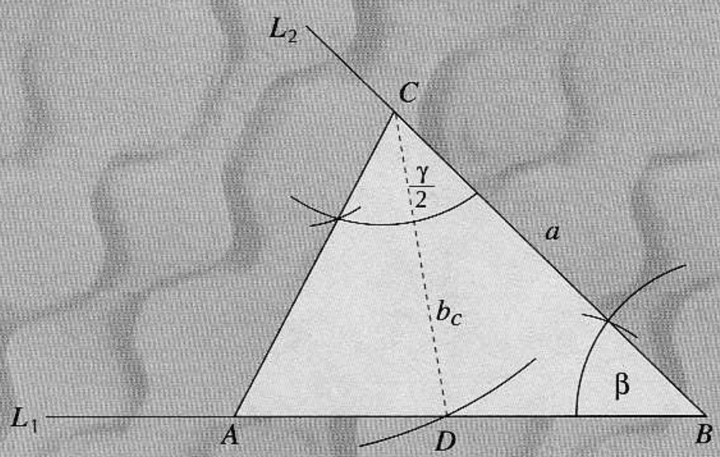
$\odot(C, b_c)$ determina D y el ángulo BCD de medida $\frac{\gamma}{2}$.

Copiando $\frac{\gamma}{2}$ más allá de b_c, el lado libre del ángulo de medida $\frac{\gamma}{2}$ intersectado con el lado libre del ángulo de medida β determina A.



Construcción:

1) Copiamos el ángulo de medida β con vértice B y lados L_1 y L_2.
2) $\odot(B, a) \cap L_2$ determina el vértice C.
3) $\odot(C, b_c) \cap L_1$ determina el vértice D y $\frac{\gamma}{2}$.
4) Copiamos el ángulo de medida $\frac{\gamma}{2}$ a continuación de b_c.
5) El lado libre del ángulo de medida $\frac{\gamma}{2}$ intersectado con el lado libre del ángulo de medida β determina A.



Demostración:

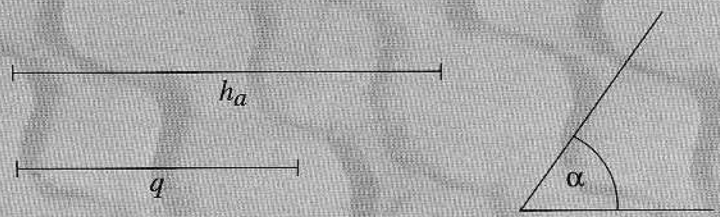
Por construcción, el triángulo ABC construido cumple las condiciones del problema.

Discusión:

El problema no tiene solución si $b_c \geqslant a$; tiene solución única si b_c es igual a la distancia de C a L_1 y tiene dos soluciones si $a > b_c >$ distancia entre C y L_1.

4. Construir un triángulo dados α, h_a y q.

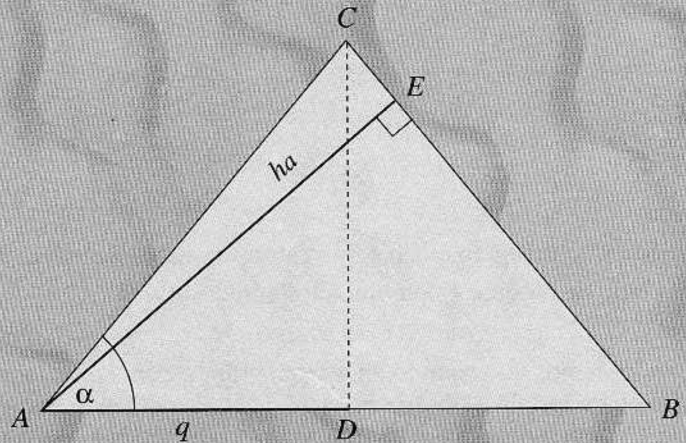
Datos:



Análisis:

Dibujamos un triángulo auxiliar, marcamos los datos y obervamos que:

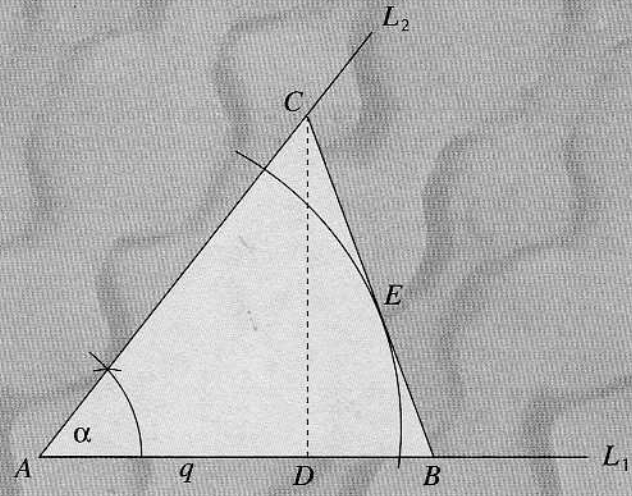
1) El ángulo de medida α determina el vértice A.
2) $\odot(A, q)$ determina en $\overline{AB}$ el punto D (pie de altura).
3) La perpendicular a $\overline{AD}$ en D intersección lado libre del ángulo de medida α, determina el vértice C.
4) E es el punto de tangencia de $\odot(A, h_a)$ y lado $\overline{CB}$.
5) $\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{AD}$ determina el vértice B.



Construcción:

1) Copiamos el ángulo de medida α con vértice en A y lados L_1 y L_2.
2) La $\odot(A, q) \cap L_1$ determina el punto D. Se tiene $AD = q$.
3) Perpendicular a L_1 en $D \cap L_2 = \{C\}$

4) La $\odot(A, h_a)$ y la tangente a esta circunferencia que pase por C determinan sobre L_1 el vértice B.



Discusión:

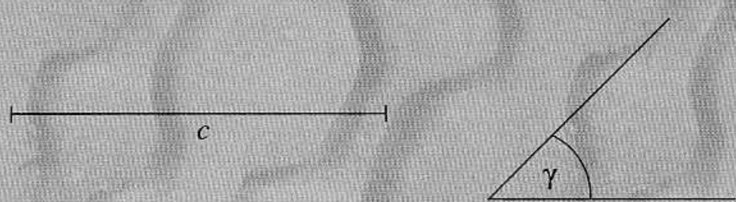
Si el vértice C queda dentro de la circunferencia de centro A y radio h_a, el problema no tiene solución.

Si el vértice C queda sobre la circunferencia de centro A y radio h_a, la solución es un triángulo rectángulo en C.

Si el vértice C queda fuera de la circunferencia de centro A y radio h_a, el problema tiene solución única.

5. Construir un triángulo dados c, γ y sabiendo que $a : b = 1 : 2$.

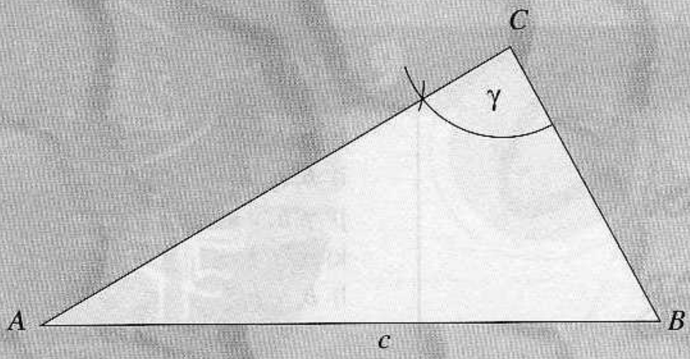
Datos:



Análisis:

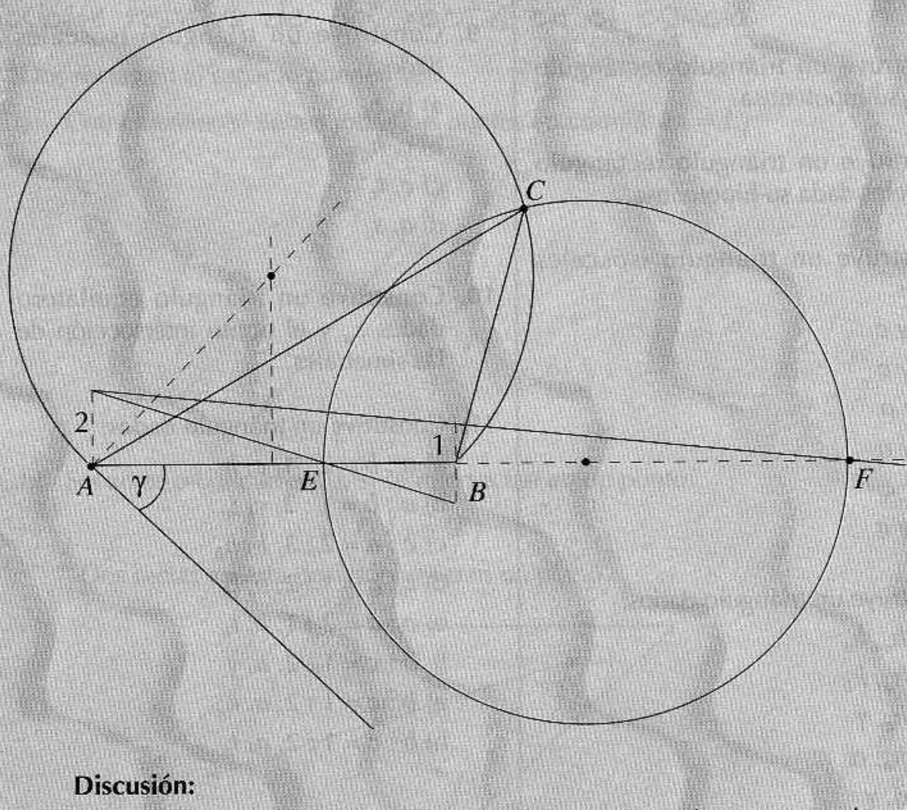
Dibujamos un triángulo auxiliar, marcamos los datos y observamos que:

1) El lado de medida c determina los vértices A y B.
2) El L.G. del tercer vértice C es el arco capaz de γ.
3) Recordemos que cuando en un triángulo se conoce un lado (c) y la razón de los otros dos ($a : b = 1 : 2$), el L.G. del tercer vértice (C) es la circunferencia que tiene por diámetro el segmento determinado por los dos puntos que dividen armónicamente (un punto de división interior y un punto de división exterior) al lado conocido en la razón dada. Esta circunferencia se denomina **Circunferencia de Apolonio**.
4) La intersección de los L.G. enunciados en 2) y 3) determina el tercer vértice C del triángulo ABC pedido.



Construcción:

1) Copiamos el segmento $\overline{AB}$ de medida c y determinamos los vértices A y B.
2) Construimos el arco capaz de γ.
3) Construimos la circunferencia de Apolonio con diámetro $\overline{EF}$, siendo E el punto de división interior de $\overline{AB}$ y F el punto de división exterior de $\overline{AB}$ en la razón 2 : 1.
4) La intersección del arco capaz de γ y la circunferencia de Apolonio del punto 3) determina el vértice C.



Discusión:

Este problema siempre tiene solución. Si dibujamos el arco capaz de γ hacia el lado opuesto, encontramos otra ubicación para el tercer vértice (C').

Ejercicios

1. Construye un triángulo dados:

a) a, b, c
b) a, α, b
c) b, β, c
d) a, β, γ
e) b, α, γ
f) b, c, α
g) b, γ, β
h) c, b, γ
i) a, c, α

2. Construye un triángulo rectángulo dados:

a) α y b
b) a y b
c) β y a
d) γ y a
e) γ y b
f) a y c

3. Construye un triángulo rectángulo dada su hipotenusa.

4. Construye un triángulo rectángulo isósceles dada su hipotenusa.

5. Construye un triángulo isósceles dados:

a) α y c
b) β y c
c) γ y a
d) β y a
e) γ y c
f) α y a

6. Construye un triángulo dados:

a) b, h_c, h_a
b) c, h_a, h_b
c) c, h_c, γ
d) a, h_a, α
e) p, q, γ
f) a, t_a, α
g) c, t_c, α
h) p, h_c, t_c
i) b, t_b, h_b
j) γ, u, v
k) p, q, t_c
l) b, γ, b_c

7. Construye un triángulo rectángulo dados:

a) a, h_a
b) b, s_b
c) c, s_c
d) a, h_c
e) c, q
f) p, q

8. Construye un triángulo rectángulo isósceles dado h_a.

9. Construye un triángulo isósceles dados:

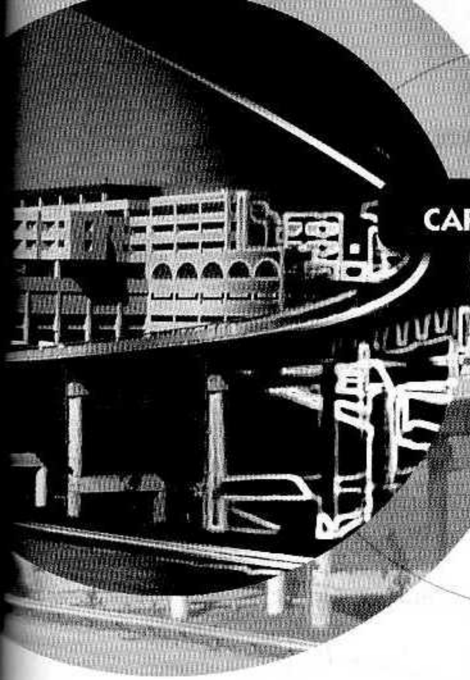
a) β, b_b
b) c, h_c
c) c, t_c
d) a, s_a

10. Construye un triángulo equilátero dados s_a y el punto intersección de las simetrales.

11. Construye un triángulo dados:

a) $a : b = 2 : 1$, c, h_c
b) $a : b = 1 : 2$, c, t_c
c) $c : a = 2 : 3$, b, h_b
d) $c : a = 1 : 2$, b, β
e) $c : a = 2 : 1$, b, t_b
f) $b : c = 1 : 2$, a, γ
g) $b : c = 1 : 2$, a, h_a
h) $b : c = 1 : 2$, a, t_a

Nota: Para s_a, s_b y s_c ver simetrales en página 92 del Capítulo 3.



CAPÍTULO 9

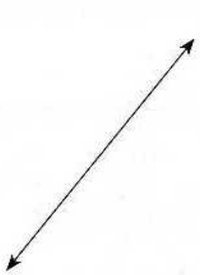
Cuerpos geométricos

Elementos de geometría del espacio 9.1

Posición relativa de dos rectas en el espacio

Dos rectas en el espacio pueden ser:

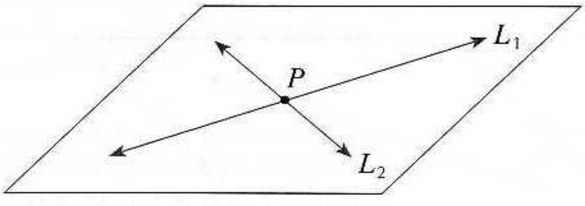
a) Coincidentes, si tienen todos sus puntos en común: $L_1 = L_2$.



b) Secantes o concurrentes, si se intersectan en un punto:

$$L_1 \cap L_2 = \{P\}$$

Dos rectas en esta posición generan un plano.

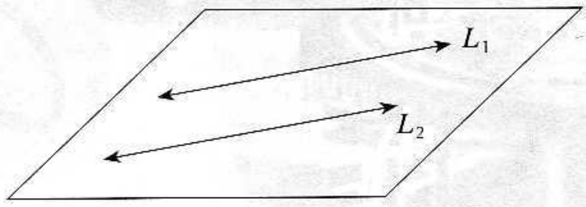


c) Rectas cuya Intersección es vacía:

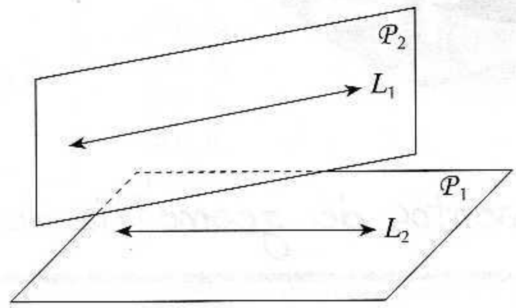
$$L_1 \cap L_2 = \varnothing$$

En este caso debemos considerar dos situaciones:

- Si son **paralelas**, generan un plano.

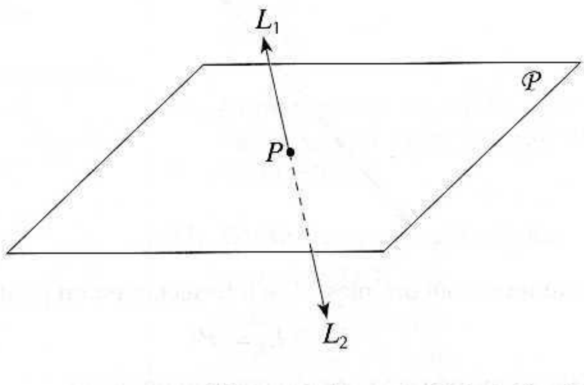


- Si no son paralelas se denominan rectas **alabeadas** y están en planos diferentes.

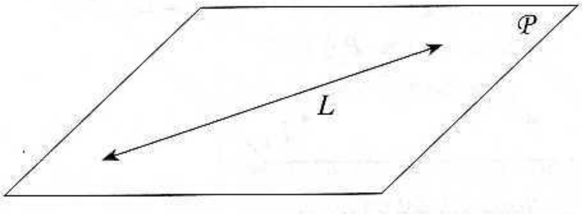


Posición relativa de una recta y un plano

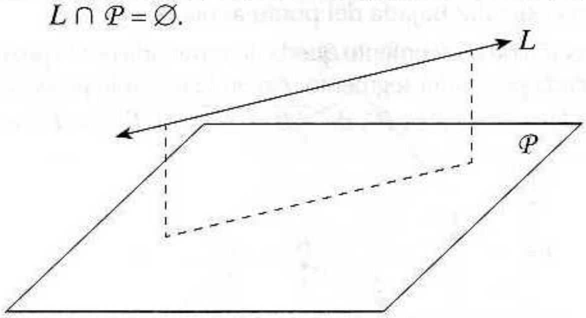
a) Una recta es **secante** a un plano si se intersectan en un solo punto: $L_1 \cap \mathcal{P} = \{P\}$.



b) Una recta está **contenida** en el plano $\mathcal{P}$, si: $L \cap \mathcal{P} = L$.

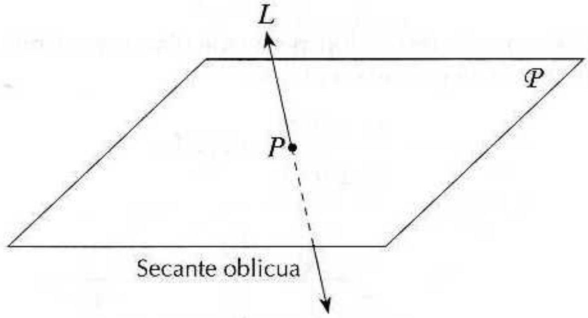


c) Una recta es **paralela** a un plano si no se intersectan:
$L \cap \mathcal{P} = \varnothing$.



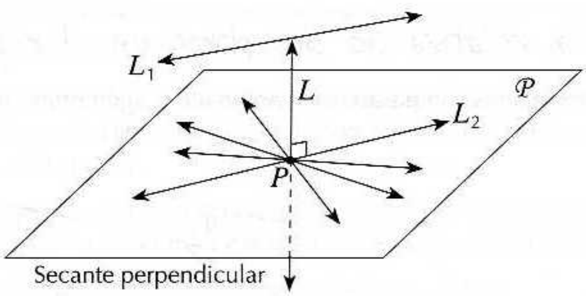
Observaciones:

1. Una recta puede intersectar a un plano en forma **oblicua** o **perpendicular**.



Secante oblicua

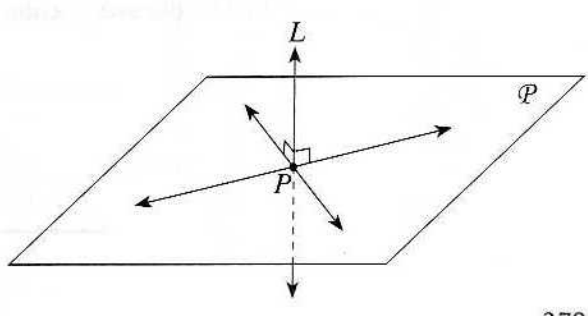
2. Una recta se dice **perpendicular** a un plano si y sólo si es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por el punto de intersección.



Secante perpendicular

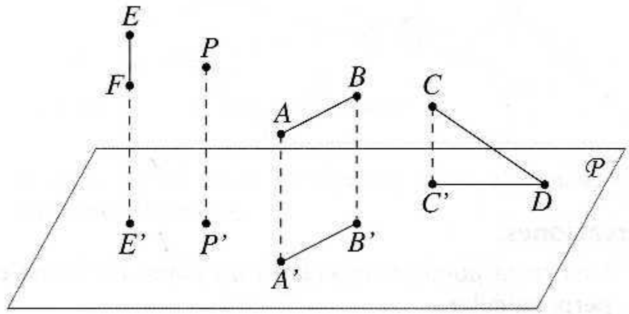
3. En la figura anterior, P recibe el nombre de **pie** de la perpendicular.
Si una recta L_1, no contenida en el plano $\mathcal{P}$ es paralela a otra recta L_2 contenida en $\mathcal{P}$, entonces
L_1 es paralela a $\mathcal{P}$.

4. Para que una recta L sea perpendicular a un plano $\mathcal{P}$ en un punto P, basta que L sea perpendicular a dos rectas del plano $\mathcal{P}$ que contengan a P.



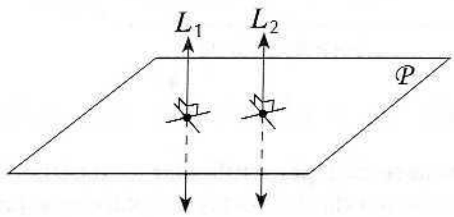
5. Se llama **proyección ortogonal** de un punto a un plano, al pie de la perpendicular bajada del punto al plano.

La proyección de un segmento queda determinada por la proyección de cada punto del segmento. Así en la figura la proyección sobre el plano $\mathcal{P}$ de P es P', de $\overline{AB}$ es $\overline{A'B'}$ de $\overline{EF}$ es E', etc.



6. Si dos o más rectas son perpendiculares a un mismo plano entonces son paralelas entre sí.

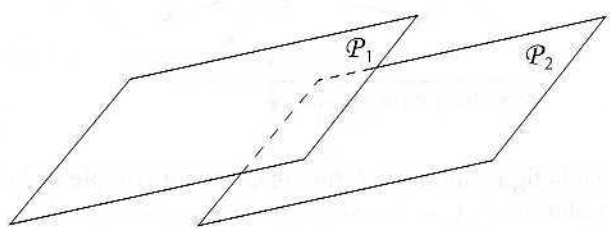
$$\left.\begin{array}{l} L_1 \perp \mathcal{P} \\ L_2 \perp \mathcal{P} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \parallel L_2$$



Posición relativa de dos planos en el espacio

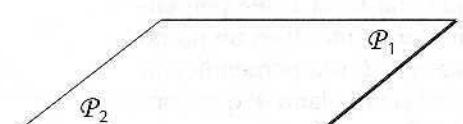
a) Dos planos son **paralelos** si no tienen ningún punto en común:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$$



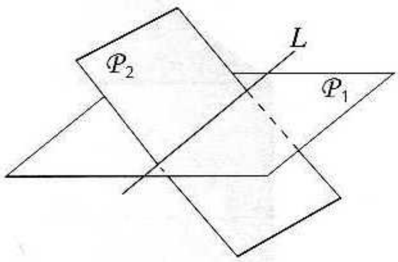
b) Dos planos son **coincidentes** si tienen todos sus puntos en común.

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$$



c) Dos planos son **secantes** si se intersectan. Dos planos secantes determinan una recta:

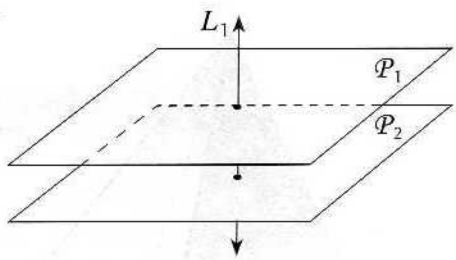
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = L$$



Observación:

Dos planos no coincidentes perpendiculares a una misma recta son paralelo entre sí.

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \perp \mathcal{P} \\ L_2 \perp \mathcal{P} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1 \parallel L_2$$



Definición de cuerpos geométricos 9.2

Un cuerpo geométrico o sólido es una porción del espacio limitada por una o más superficies. Estas corresponden a la frontera que limita al sólido en el espacio.

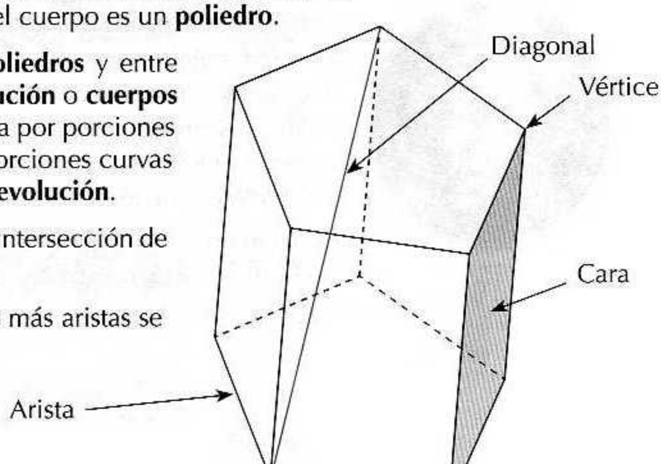
Si la frontera que limita un cuerpo está constituida sólo por porciones de plano, éstas se denominan **caras** y el cuerpo es un **poliedro**.

Los otros cuerpos se llaman **no poliedros** y entre ellos distinguimos los **sólidos de revolución** o **cuerpos redondos**, cuya frontera está compuesta por porciones de superficies curvas y/o planas. Las porciones curvas se denominan **manto** o **superficie de revolución**.

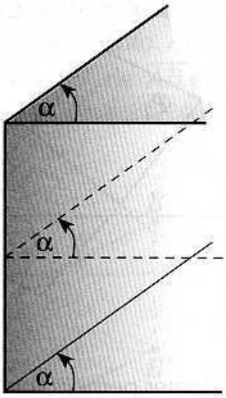
Los segmentos determinados por la intersección de dos caras se llaman **aristas**.

Los puntos de intersección de tres o más aristas se llaman **vértices**.

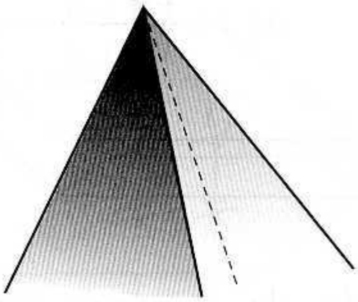
Un segmento del interior de un cuerpo que une dos vértices situados en distintas caras se llama **diagonal**.



Llamamos **ángulo diedro** a la porción del espacio limitada por dos caras (semiplanos de arista común).



Llamamos **ángulo poliedro** a la porción del espacio limitada por tres o más caras (planos) que se intersectan dos a dos con un vértice común.



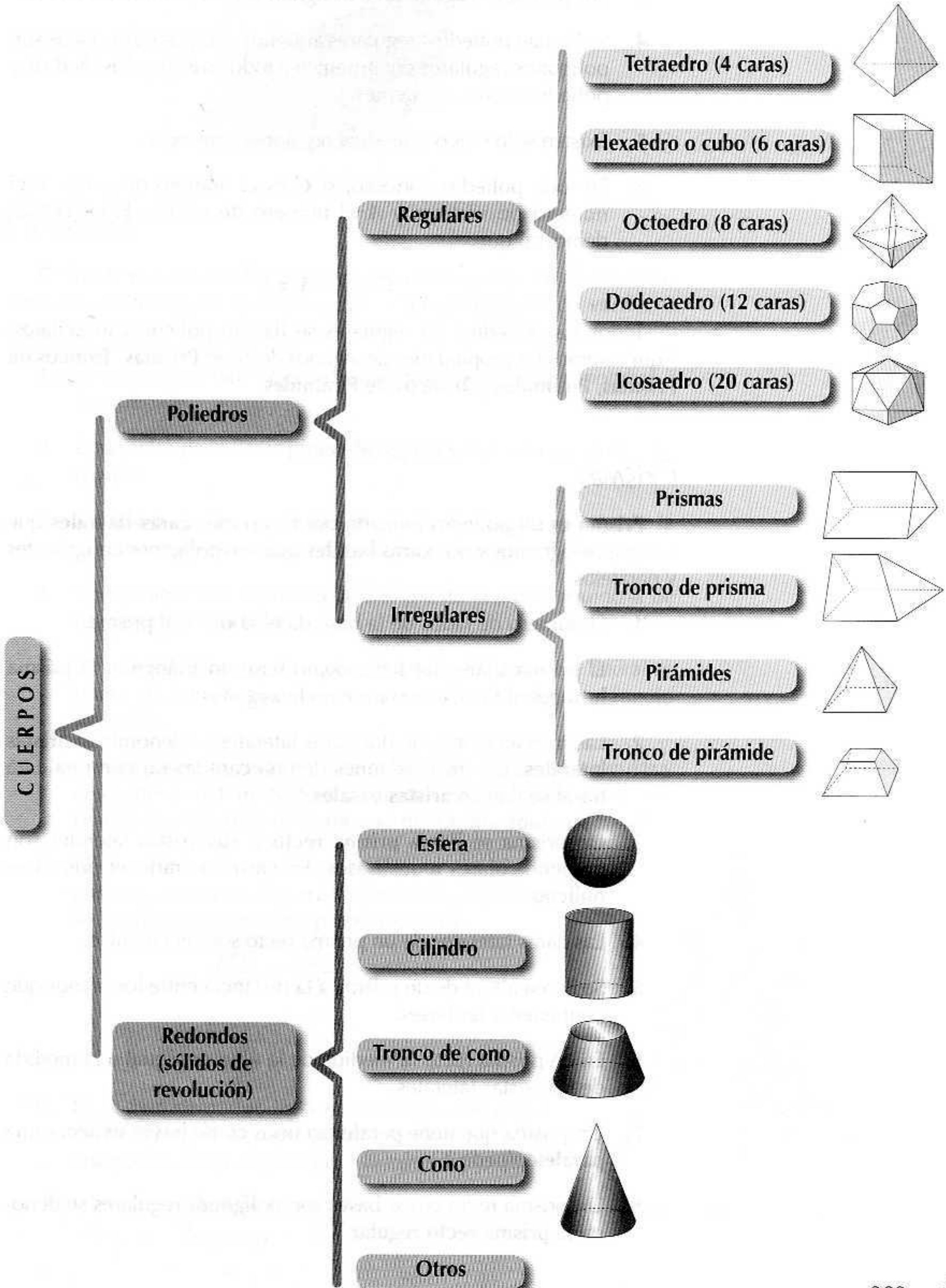
LEONHARD EULER

(Basilea, Suiza, 1707-San Petersburgo, URSS, 1783)

Matemático suizo. En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los de ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricos y relacionarlos con los números complejos mediante la denominada identidad de Euler; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos.

Tras su muerte, se inició un ambicioso proyecto para publicar la totalidad de su obra científica, compuesta por más de ochocientos tratados, lo cual lo convierte en el matemático más prolífico de la historia.

Clasificación de los cuerpos geométricos 9.3



Observaciones:

1. Otra clasificación de los sólidos, o cuerpos geométricos, es en convexos y no convexos.

2. Un poliedro se dice convexo si al intersectarlo con un plano, se genera un polígono convexo.

3. Los poliedros regulares se designan según el número de caras.

4. Se llaman poliedros regulares aquellos cuerpos cuyas caras son polígonos regulares congruentes y todos sus ángulos diedros y poliedros son congruentes.

5. Existen sólo cinco poliedros regulares convexos.

6. En todo poliedro convexo, si C es el número de caras, V el número de vértices y A el número de aristas, Euler (1752) demostró que:

$$C + V - A = 2$$

Todos los poliedros no regulares se llaman poliedros irregulares. Aquí veremos las propiedades de algunos de ellos: **Prismas**, **Troncos de Prismas**, **Pirámides** y **Troncos de Pirámides**.

Prismas

Prisma es un poliedro limitado por tres o más **caras laterales** que son paralelogramos y dos **caras basales** que son polígonos congruentes y paralelos.

1. El número de lados de la base da el nombre al prisma.

   El prisma triangular tiene como base un triángulo. El prisma hexagonal tiene como base un hexágono.

2. Las intersecciones de dos caras laterales se denominan **aristas laterales**. Las intersecciones de una cara lateral con una cara basal se llaman **aristas basales**.

3. Un prisma se llama **prisma recto** si sus aristas laterales son perpendiculares a sus bases. En caso contrario el prisma es **oblicuo**.

4. Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.

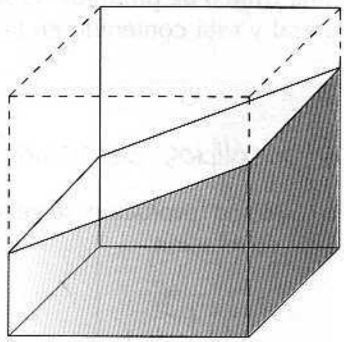
5. Se llama altura de un prisma a la distancia entre los planos que contienen a las bases.

6. En un prisma recto la medida de la altura es igual a la medida de las aristas laterales.

7. Un prisma que tiene paralelogramos como bases se denomina **paralelepípedo**.

8. Un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares se denomina **prisma recto regular**.

9. Un prisma truncado por un plano oblicuo respecto de sus bases genera un **tronco de prisma**.

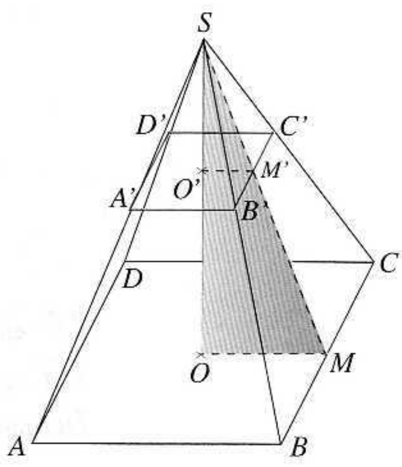


Pirámides

Pirámide es un poliedro que tiene una base poligonal, y sus caras laterales son triángulos que concurren en un punto llamado **vértice** o **cúspide**.

1. El número de lados del polígono basal determina el nombre a la pirámide.
2. Una pirámide se llama **pirámide regular** si su base es un polígono regular.
3. La **altura** de una pirámide es el segmento trazado desde la cúspide perpendicularmente a la base de la pirámide.
4. Una pirámide se llama **recta** si el pie de la altura equidista de los vértices de la base.
5. En una pirámide recta regular, la altura de cada cara lateral se llama **apotema lateral** (la apotema es la altura de un triángulo isósceles).
6. En una pirámide recta regular, la base es un polígono regular y el segmento determinado por el centro del polígono y el punto medio de cada lado de la base se denomina **apotema basal**.
7. Si una pirámide es intersectada por un plano paralelo a su base, las aristas laterales y la altura se dividen en segmentos proporcionales.

$$\frac{SO'}{OO'} = \frac{SC'}{C'C}$$



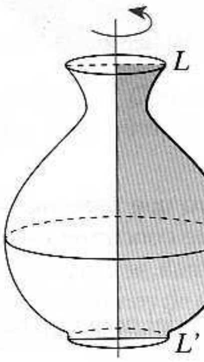
8. En la figura anterior, las áreas de la sección plana $A'B'C'D'$ y de la base son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide.

$$\frac{A_{(ABCD)}}{A_{(A'B'C'D')}} = \frac{(OS)^2}{(O'S)^2}$$

9. En la figura anterior, el cuerpo que queda al retirar la pirámide $A'B'C'D'S$ que se generó al pasar el plano paralelo a la base por O', se denomina **tronco de pirámide**. El segmento $\overline{MN'}$ se llama **apotema lateral** y está contenido en la apotema lateral de la pirámide.

Cuerpos redondos o sólidos de revolución

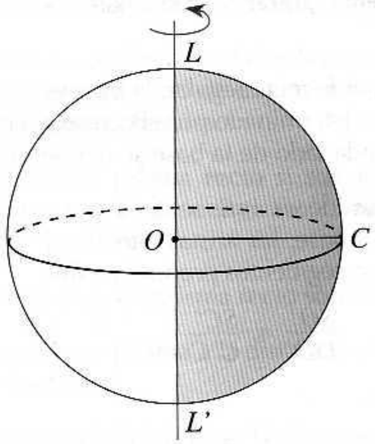
Un cuerpo redondo, o sólido de revolución, se genera al hacer rotar una **región** en torno a un eje de rotación.



La línea LL' al girar en torno al eje genera la superficie (o manto) que limita al cuerpo geométrico. LL' recibe el nombre de **generatriz**.

De los múltiples sólidos de revolución que se pueden generar, aquí nos interesan la esfera, el cilindro y el cono.

Esfera es el sólido de revolución generado al hacer rotar un semicírculo en torno al eje de rotación que coincide con su diámetro.

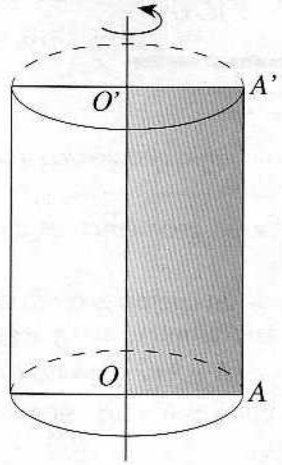


$\overleftrightarrow{LL'}$: eje de rotación.

$\overset{\frown}{LCL'}$: generatriz.

$\overline{OC}$: radio de la esfera y de su círculo máximo.

Cilindro es el sólido de revolución generado al rotar un rectángulo en torno a uno de sus lados.



$\overline{AA'}$: generatriz.

$\overleftrightarrow{OO'}$: eje de rotación.

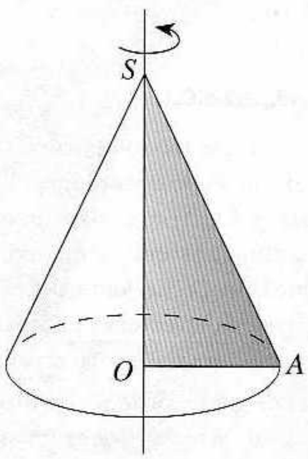
$\overline{OA}$: radio basal.

$\overline{OO'}$: altura del cilindro.

El manto del cilindro se puede considerar como un rectángulo cuyos lados miden $(2 \cdot OA \cdot \pi)$ y OO'. Sus bases son circunferencias de radio OA.

Cono es el sólido de revolución generado al rotar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

El cono se denomina también **cono recto circular**.



$\overline{AS}$: generatriz.

$\overline{OA}$: radio basal.

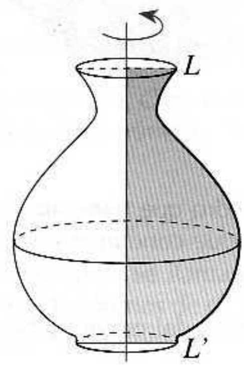
$\overline{OS}$: altura del cono.

$\overleftrightarrow{OS}$: eje de rotación.

9. En la figura anterior, el cuerpo que queda al retirar la pirámide $A'B'C'D'S$ que se generó al pasar el plano paralelo a la base por O', se denomina **tronco de pirámide**. El segmento $\overline{MN'}$ se llama **apotema lateral** y está contenido en la apotema lateral de la pirámide.

Cuerpos redondos o sólidos de revolución

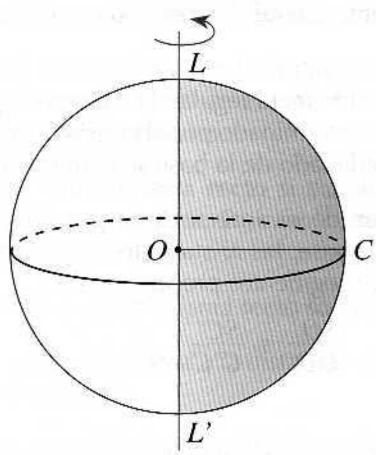
Un cuerpo redondo, o sólido de revolución, se genera al hacer rotar una **región** en torno a un eje de rotación.



La línea LL' al girar en torno al eje genera la superficie (o manto) que limita al cuerpo geométrico. LL' recibe el nombre de **generatriz**.

De los múltiples sólidos de revolución que se pueden generar, aquí nos interesan la esfera, el cilindro y el cono.

Esfera es el sólido de revolución generado al hacer rotar un semicírculo en torno al eje de rotación que coincide con su diámetro.

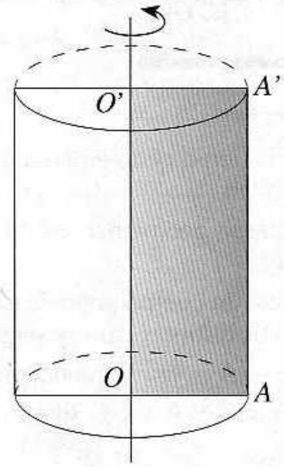


$\overleftrightarrow{LL'}$: eje de rotación.

$\widehat{LCL'}$: generatriz.

$\overline{OC}$: radio de la esfera y de su círculo máximo.

Cilindro es el sólido de revolución generado al rotar un rectángulo en torno a uno de sus lados.



$\overline{AA'}$: generatriz.

$\overleftrightarrow{OO'}$: eje de rotación.

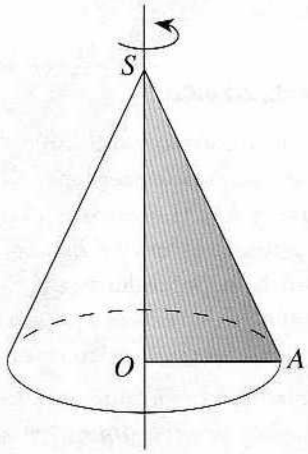
$\overline{OA}$: radio basal.

$\overline{OO'}$: altura del cilindro.

El manto del cilindro se puede considerar como un rectángulo cuyos lados miden $(2 \cdot OA \cdot \pi)$ y OO'. Sus bases son circunferencias de radio OA.

Cono es el sólido de revolución generado al rotar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

El cono se denomina también **cono recto circular**.



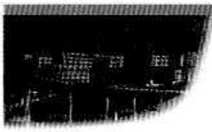
$\overline{AS}$: generatriz.

$\overline{OA}$: radio basal.

$\overline{OS}$: altura del cono.

$\overleftrightarrow{OS}$: eje de rotación.

9.4 Área y volumen de cuerpos geométricos



Llamamos área de un cuerpo geométrico a la suma de las áreas de las superficies que lo limitan.

El volumen de un cuerpo geométrico es una medida del espacio que encierra.

Para calcular el área de un cuerpo geométrico debemos reconocer la forma geométrica de sus distintas caras y según ello calcularla.

El área de una esfera es $A = 4\pi r^2$, siendo r el radio de la esfera.

El área lateral de un cono es $A = \pi rg$, siendo r el radio basal y g la generatriz.

Para calcular el volumen:

Cuerpo	Forma de calcular su volumen
Prisma o cilindro	Área de la base × altura
Pirámide o cono	$\frac{1}{3}$ área de la base × altura
Esfera	$\frac{4}{3}\pi r^3$ (r: radio de la esfera)
Tronco de prisma triangular	$\frac{1}{3}B\,(a + b + c)$ (ver ejercicio resuelto nº 14)

ARQUÍMEDES

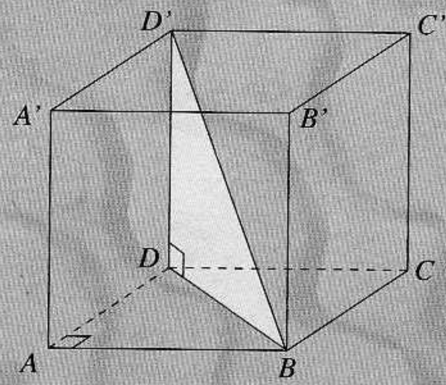
(Siracusa, actual Italia, h. 287 a.C.-id., 212 a.C.)

Matemático griego. Hijo de un astrónomo, quien probablemente le introdujo en las matemáticas. Pudo determinar el centro de gravedad de paralelogramos, triángulos, trapecios, y el de un segmento de parábola. En la obra "Sobre la esfera y el cilindro" utilizó el método denominado de exhaustión, precedente del cálculo integral, para determinar la superficie de una esfera y para establecer la relación entre una esfera y el cilindro circunscrito en ella.

Se cuenta que, contraviniendo órdenes expresas de un general romano, un soldado mató a Arquímedes por resistirse éste a abandonar la resolución de un problema matemático en el que estaba inmerso, escena perpetuada en un mosaico hallado en Herculano. Esta pasión por la erudición, que le causó la muerte, fue también la que, en vida, se dice que hizo que hasta se olvidara de comer y que soliera entretenerse trazando dibujos geométricos en las cenizas del hogar o incluso, al ungirse, en los aceites que cubrían su piel.

Ejercicios resueltos

1. En un cubo de arista 3 cm, calcular la medida de sus diagonales.



En $\triangle DAB$, rectángulo en A, $\overline{DB}$ es diagonal de una cara:

$DB^2 = AD^2 + AB^2$

$DB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

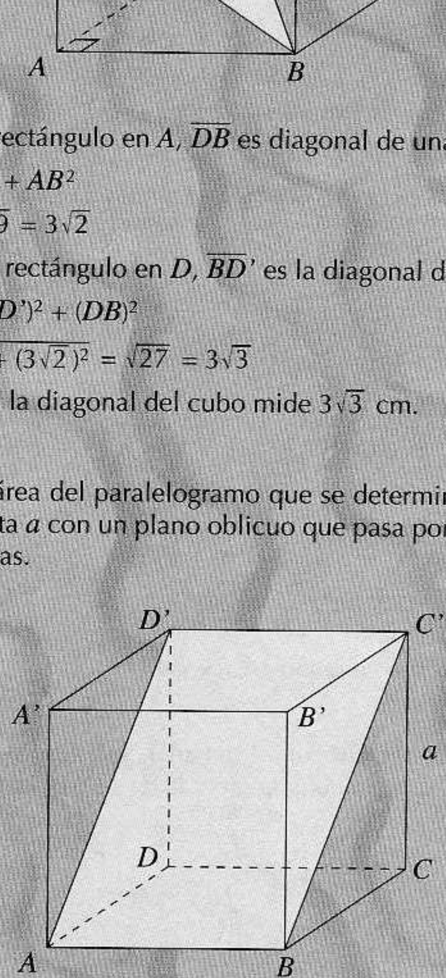
En $\triangle D'DB$, rectángulo en D, $\overline{BD}'$ es la diagonal del cuerpo

$(BD')^2 = (DD')^2 + (DB)^2$

$BD' = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Por lo tanto, la diagonal del cubo mide $3\sqrt{3}$ cm.

2. Calcular el área del paralelogramo que se determina al intersectar un cubo de arista a con un plano oblicuo que pasa por dos diagonales de caras opuestas.

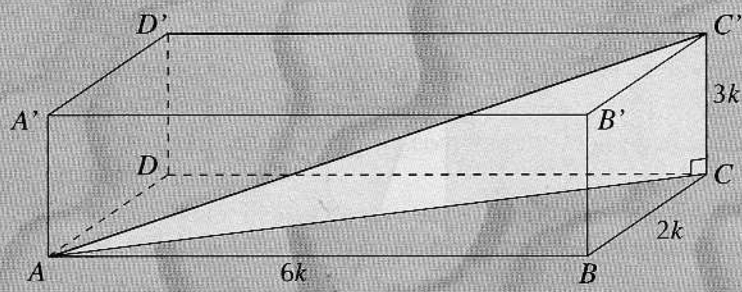


El paralelogramo generado en la intersección es el rectángulo $ABC'D'$, cuyos lados son $AB = a$ y BC', que corresponde a la diagonal de la cara del cubo.

$BC' = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

El área del $\triangle ABC'D'$ es: $a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

3. Determinar las tres aristas de un paralelepípedo rectangular cuya diagonal mide 56 cm y se sabe que las medidas de sus aristas están en la relación 6 : 3 : 2.



Solución

En la figura: $AC' = 56$ cm (es la diagonal)

$\overline{AC}$ es diagonal de la cara $ABCD$

$CC' = 3k$; $BC = 2k$ y $AB = 6k$ (siendo k una constante de proporcionalidad)

En $\triangle ABC$ rectángulo en B:

$$(6k)^2 + (2k)^2 = (AC)^2$$

$$AC = \sqrt{36k^2 + 4k^2} = 2k\sqrt{10}$$

En $\triangle ACC'$ rectángulo en C:

$$(AC)^2 + (CC')^2 = (AC')^2$$

$$40k^2 + 9k^2 = 56^2$$

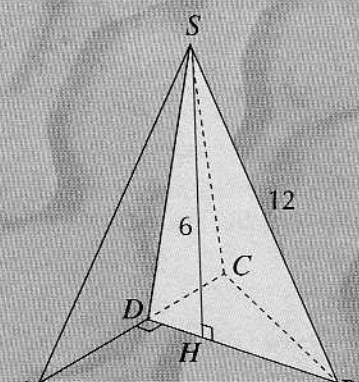
$$49k^2 = 56^2$$

$$7k = 56$$

$$k = 8$$

Por lo tanto, las medidas son 16, 24 y 48 cm.

4. En una pirámide recta regular triangular, su altura es 6 cm y su arista lateral mide 12 cm. Calcular la medida de su arista basal y su apotema lateral.



ABC es triángulo equilátero

$\overline{BS}$ es arista lateral

$\overline{SH}$ es la altura

Se pide calcular las medidas de $\overline{SD}$, que es la apotema lateral y $\overline{AB}$, que es el arista basal.

Solución:

El $\triangle SHB$ es rectángulo en H.

$$6^2 + (HB)^2 = 12^2$$

$$HB^2 = 144 - 36$$

$$HB^2 = 108$$

$$HB = 6\sqrt{3}$$

Como H es el centro de gravedad del $\triangle ABC$, tenemos que:
$HB = \frac{2}{3}DB$.

Luego $DH = 3\sqrt{3}$

El triángulo DHS es rectángulo en H.

$$(DH)^2 + (HS)^2 = (DS)^2$$

$$(3\sqrt{3})^2 + 6^2 = DS^2$$

$$27 + 36 = DS^2$$

$$63 = DS^2$$

$$DS^2 = 3\sqrt{7} \text{ (que es la apotema lateral)}$$

Para calcular AB tomamos el triángulo equilátero de altura $DB = 9\sqrt{3}$

El $\triangle ADB$ es rectángulo en D; $AD = \frac{1}{2}AB$

$$(AD)^2 + (DB)^2 = (AB)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + (9\sqrt{3})^2 = (AB)^2$$

$$\frac{AB^2}{4} + 243 = (AB)^2$$

$$243 = \frac{3}{4}(AB)^2$$

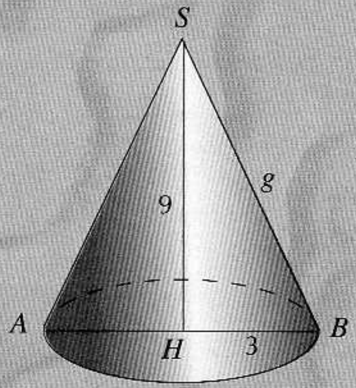
$$\frac{243 \cdot 4}{3} = (AB)^2$$

$$324 = (AB)^2$$

$$18 = AB \text{ (que es la arista basal)}$$

Por lo tanto, la apotema lateral mide $3\sqrt{7}$ cm
y la arista basal es 18 cm.

5. Determinar la medida de la generatriz de un cono recto si el diámetro de la base mide 6 cm y su altura es 9 cm.



Si el diámetro de la base es 6, su radio mide 3.

$\overline{SB}$ es la generatriz

El $\triangle SHB$ es rectángulo en H.

$g^2 = HB^2 + HS^2$

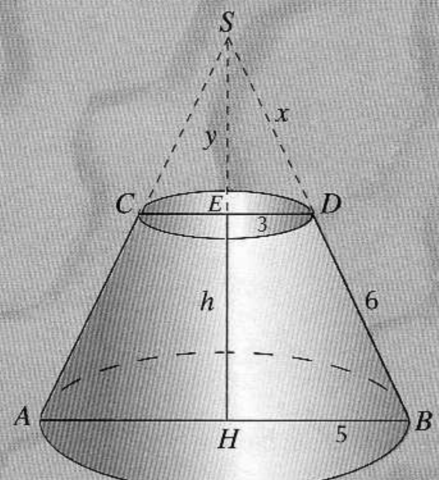
$g^2 = 9 + 81$

$g^2 = 90$

$g = 3\sqrt{10}$ cm

Por lo tanto, la generatriz del cono mide $3\sqrt{10}$ cm.

6. Determinar la altura de un tronco de cono si sabemos que los diámetros de las bases son 6 y 10 cm y la medida de su generatriz es igual al diámetro de la base menor.



El tronco de cono tiene altura $HE = h$

Prolongamos la generatriz $\overline{BD}$ y la altura $\overline{HE}$ hasta S.

Además: $\overline{ED} \parallel \overline{HB}$; $DS = x$; $ES = y$

En la figura vemos que:

$$\frac{x}{3} = \frac{x+6}{5} \qquad \text{(Teorema de Thales)}$$

$$5x = 3x + 18$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

El $\triangle SED$ es rectángulo en E:

$$y^2 + 3^2 = x^2$$

$$y^2 = 81 - 9$$

$$y^2 = 72$$

$$y = 6\sqrt{2}$$

Nuevamente aplicamos Teorema de Thales en la figura.

$$\frac{y}{h} = \frac{x}{6}$$

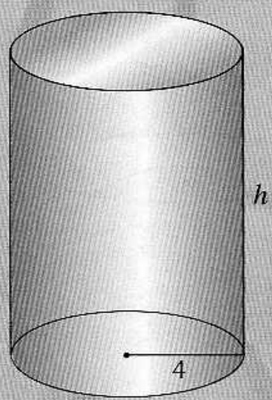
$$\frac{6\sqrt{2}}{h} = \frac{9}{6}$$

$$9h = 36\sqrt{2}$$

$$h = 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la altura del tronco de cono es $4\sqrt{2}$ cm.

7. ¿Qué altura aproximada debe tener un cilindro cuyo diámetro basal es 8 cm para que su capacidad sea de 750 cc (cc = 1cm³)?



El volumen del cilindro es igual al área de la base por su altura.

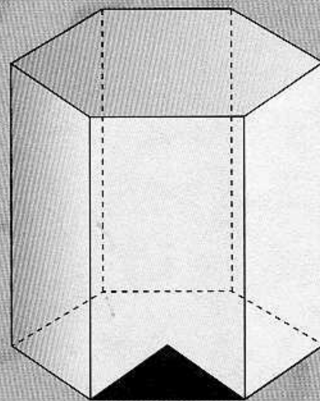
Por lo tanto, $V = \pi r^2 \cdot h$

Luego: $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

$$h = \frac{750}{\pi \cdot 4^2} \approx 14{,}92 \text{ cm}$$

El cilindro debe tener una altura de 15 cm, aproximadamente.

8. Calcular el área total de un prisma recto hexagonal regular, sabiendo que su arista basal es 8 cm y su altura es 10 cm.



Las bases son dos hexágonos regulares, cada uno formado por 6 triángulos equiláteros de lado 8 cm.

Por lo tanto, el área basal es:

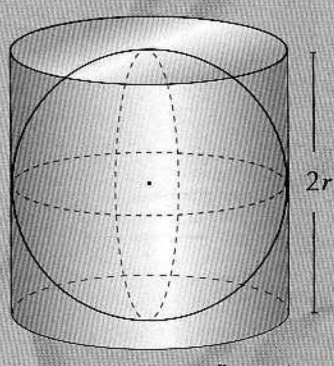
$$A_B = 2 \cdot \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} \cdot 6$$

$$A_B = 192\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

El área lateral está formada por 6 rectángulos de lados 8 y 10 cm.
$A_L = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480\ \text{cm}^2$

Luego, el área total del prisma es $(480 + 192\sqrt{3})\text{cm}^2$.

9. Se tiene una esfera inscrita en un cilindro. Probar que sus volúmenes están en la relación 3 : 2.



Observemos que el radio de la esfera es igual al radio de la base del cilindro y que la altura del cilindro es igual a dos veces el radio de la esfera.

Llamamos r al radio de la esfera.

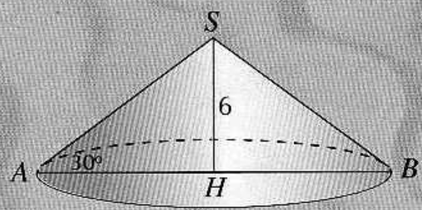
$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{cil} = \pi r^2 \cdot h$ (como $h = 2r$)

$V_{cil} = 2\pi r^3$

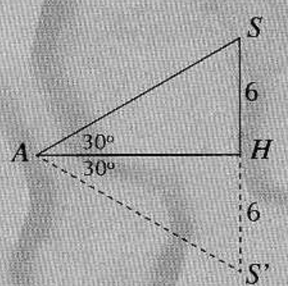
$$\frac{V_{cil}}{V_{esf}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

10. Calcular el volumen de un cono recto circular si su generatriz tiene una inclinación de 30° respecto de la base y su altura es 6 cm.



Para calcular el volumen debemos conocer el radio de la base.

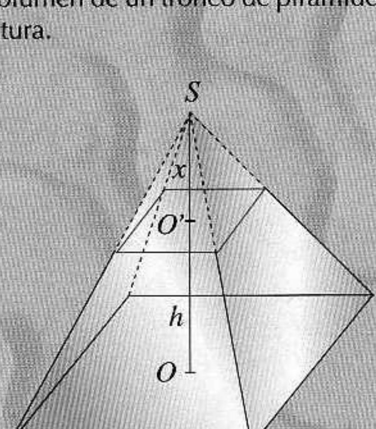
El $\triangle AHS$ es rectángulo en H.



Generamos el triángulo equilátero de lado 12, donde $AH = 6\sqrt{3}$

Por lo tanto, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 216\pi \text{ cm}^3$

11. Determinar el volumen de un tronco de pirámide conocidas el área de sus bases y su altura.



Llamaremos B y B' a las áreas de las bases, con $B > B'$

La altura del tronco de pirámide es $OO' = h$

Llamamos x a $\overline{O'S}$, altura de la pirámide cuya base es B'

$V_{\text{tronco}} = V_{\text{pirámide de base } B} - V_{\text{pirámide de base } B'}$

$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3}B(h + x) - \frac{1}{3}B'x$ **(*)**

Debemos expresar x en función de B, B' y h.

Sabemos que las áreas de dos secciones planas paralelas son proporcionales a los cuadrados de sus distancias de la cúspide S:

$$\frac{B}{B'} = \frac{(h + x)^2}{x^2}$$

Para despejar x extraeremos la raíz cuadrada a ambos miembros de esta igualdad.

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}} = \frac{h + x}{x}$$

$$x\sqrt{B} = h\sqrt{B'} + x\sqrt{B'}$$

$$x(\sqrt{B} - \sqrt{B'}) = h\sqrt{B'}$$

$$x = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

Reemplazando en **(*)**

$$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3}B\left(h + \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}\right) - \frac{1}{3}B' \cdot \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

$$= \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3} \cdot \frac{Bh\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{B'h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

$$= \frac{1}{3}h\left(B + \frac{B\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} - \frac{B'\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{B\sqrt{B} - B\sqrt{B'} + B\sqrt{B'} - B'\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{(B\sqrt{B} - B'\sqrt{B'})(\sqrt{B} + \sqrt{B'})}{(\sqrt{B} - \sqrt{B'})(\sqrt{B} + \sqrt{B'})}\right)$$

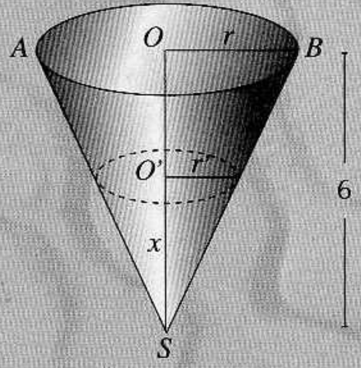
$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{B^2 + B\sqrt{BB'} - B'\sqrt{BB'} - B'^2}{B - B'}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{(B^2 - B'^2) + (B - B')\sqrt{BB'}}{B - B'}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{(B - B')(B + B' + \sqrt{BB'})}{B - B'}\right)$$

$$= \frac{1}{3}h\,(B + B' + \sqrt{BB'})$$

12. Un recipiente de forma cónica que tiene una altura de 6 m se encuentra lleno de agua. Hallar la altura a que llegará el agua cuando se haya escurrido la mitad del líquido.



El estanque lleno de agua contiene:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

Como h es igual a 6, contiene:

$2\pi r^2 m^3$ de agua.

Si se escurre la mitad, quedarán $(\pi r^2\ m^3)$ de agua.

Debemos hallar la altura x a que llega el nivel del agua cuando contiene los $(\pi r^2\ \text{m}^3)$ de líquido.

En la figura:

$$\frac{r}{6} = \frac{r'}{x} \Rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{6}{x} \qquad (1)$$

Por otro lado, el volumen del cono de altura x es igual a la mitad del líquido, luego:

$$\frac{1}{3}\pi r'^2 \cdot x = \pi r^2$$

$$\frac{x}{3} = \frac{r^2}{r'^2}$$

$$\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{r}{r'} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2)

$$\frac{6}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \qquad /\ ()^2$$

$$\frac{36}{x^2} = \frac{x}{3}$$

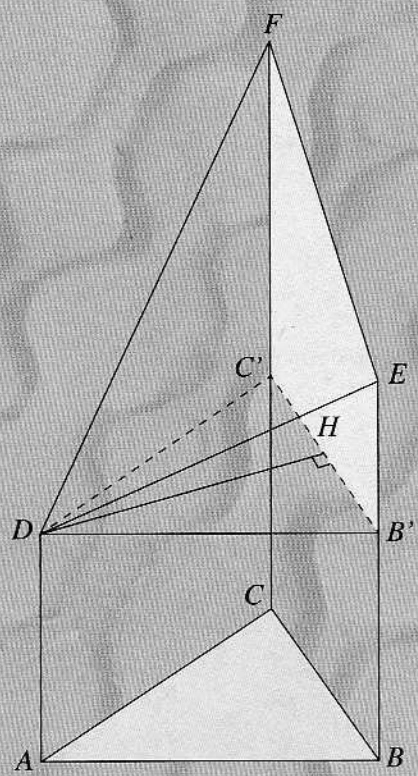
$$x^3 = 108$$

$$x = 3\sqrt[3]{4} \approx 4{,}76 \text{ m}$$

El agua llegará a 4,76 m cuando se haya escurrido la mitad del líquido.

13. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto de base triangular si el área de la base es 40 cm^2 y sus aristas laterales miden 6, 10 y 14 cm.

Sea $ABCDEF$ el tronco de prisma, donde $DA = 6$ cm, $BE = 10$ cm y $CF = 14$ cm.



Por el punto D de la arista menor pasamos un plano paralelo a la base ABC generando el prisma $ABCDB'C'$ de volumen V_1 y la pirámide oblicua de base $B'EFC'$ (trapecio rectangular) y cúspide D, de volumen V_2. Luego, el volumen V del cuerpo $ABCDEF$ es $V_1 + V_2$.

V_1 = Área de la base por altura = 40 cm^2 · 6 cm = 240 cm^3.

Para calcular V_2 debemos hallar el área de la base $B'EFC'$ que es un trapecio rectángulo y la altura de la pirámide. La altura $\overline{DH}$ del triángulo $DB'C'$ coincide con la altura de la pirámide pues la sección $DB'C'$ es perpendicular al plano $CBEF$ y paralela a la base ABC del tronco de prisma.

En el trapecio $B'EFC'$, sus bases son $\overline{EB'} \parallel \overline{C'F}$ y su altura es $\overline{B'C'}$.

$EB' = BE - BB' = 10 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$

$C'F = CF - CC' = 14 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

$A_{B'EFC'} = \frac{1}{2}(EB' + C'F) \cdot C'B' = \frac{1}{2}(4 + 8) \cdot C'B' = 6\, C'B'$

Luego:

$V_2 = \frac{1}{3}(6C'B') \cdot DH = 2\,(C'B' \cdot DH)$

Por otro lado, sabemos que el área de la base ($\triangle ABC \cong \triangle DB'C'$) es 40 cm^2.

Además, $A_{\triangle DB'C'} = \frac{1}{2}(B'C' \cdot DH) = 40$ cm^2

De esta forma, $B'C' \cdot DH = 80$

$V_2 = 2 \cdot 80 = 160$ cm^3

Como $V = V_1 + V_2$ tenemos que el volumen del cuerpo $ABCDEF$ es: 240 cm^3 + 160 cm^3 = 400 cm^3

Observación:

Si calculamos el volumen del tronco aplicando la fórmula:

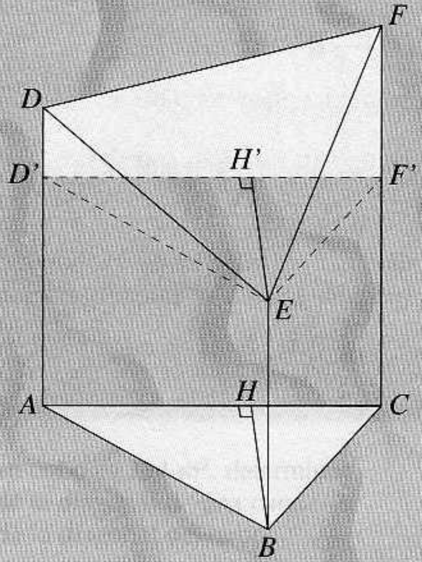
$V = \frac{1}{3}B\,(a + b + c)$, siendo B el área de la base y a, b y c las medidas de las aristas laterales, obtenemos el volumen encontrado.

En efecto: $V = \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot (10 + 6 + 14) = \frac{1}{3}\,(40 \cdot 30) = 400$ cm^3

14. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto triangular cuyas aristas laterales miden a, b y c, y el área de la base vale B.

Sea $ABCDEF$ el tronco de prisma con $a < b < c$

y $BE = a$; $AD = b$ y $CF = c$



Pasamos por E un plano paralelo a la base ABC generando el prisma recto triangular $ABCD'EF'$ y la pirámide oblicua de base trapezoidal $D'F'FD$ y cúspide E.

El volumen V del tronco de prisma es la suma de los volúmenes V_1 del prisma y V_2 de la pirámide generados al particionar el tronco de prisma por el plano paralelo a la base.

$$V_1 = B \cdot a \text{ (área de la base por altura)}$$

Para encontrar V_2 debemos calcular el área de la base de la pirámide, que es el trapecio rectángulo $D'F'FD$ de lados paralelos $\overline{D'D}$ y $\overline{F'F}$, y altura $\overline{D'F'}$ y la multiplicamos por la medida de la altura de la pirámide que es $\overline{EH'}$ (la altura de la pirámide coincide con la altura del triángulo $D'F'E$ puesto que la sección $D'F'E$ es perpendicular a las caras laterales del tronco de prisma).

$$V_2 = \frac{1}{3} A_{D'F'FD} \cdot EH' = \frac{1}{3}\left(\frac{F'F + D'D}{2} \cdot D'F'\right) \cdot EH'$$

pero, $FF' = CF - CF' = c - a$

y $D'D = AD - AD' = b - a$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{c - a + b - a}{2} \cdot D'F' \cdot EH'$$

pero, $\overline{D'F'} \cdot \overline{EF'} = 2B'$ $\quad (A_{(\triangle ABC)} = B$ y $\triangle ABC \cong \triangle D'EF')$

Luego, $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{c + b - 2a}{2} \cdot 2B$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot B\,(c + b - 2a)$$

y como, $V = V_1 + V_2$

$$V = B \cdot a + \frac{1}{3} B\,(c + b - 2a)$$

$$V = \frac{1}{3} B\,(a + b + c)$$

Esta es la fórmula para calcular el volumen de un tronco de prisma de base triangular.

Sabemos que cualquier polígono se puede particionar en triángulos, sabemos que cualquier prisma se puede particionar en prismas de base triangular.

Ejercicios

1. Si la arista de un cubo es $2\sqrt{3}$, determina la longitud de sus diagonales.

2. Calcula el área del paralelogramo que se determina al intersectar un cubo con un plano oblicuo que pase por dos diagonales de caras opuestas si la arista del cubo mide:
a) a cm   b) 3 cm   c) $10\sqrt{2}$ cm

3. Si las aristas distintas de un paralelepípedo rectangular miden 4 cm, 5 cm y 6 cm, determina la medida de las diagonales de las tres caras diferentes.

4. Si las aristas de un paralelepípedo rectangular miden 1 m, 2 m, y 3 m, determina la medida de sus diagonales.

5. Calcula la medida de las aristas de un paralelepípedo rectangular sabiendo que están en la relación 2 : 3 : 6 y que sus diagonales mide 35 cm.

6. Si la altura de una pirámide recta regular triangular es 8 m y su arista lateral mide 10 m, determina la medida de su arista basal y su apotema lateral.

7. El perímetro de la base de un cilindro circular es 6π. Determina el valor del radio basal.

8. Determina la medida de la generatriz de un cono recto si el radio de la base es 3 cm y su altura es 4 cm.

9. Determina la altura de un cono si su radio basal es 10 cm y su generatriz forma un ángulo de 45° con su base.

10. Calcula la altura de un cono recto si su generatriz mide 12 cm y el radio basal es igual al $2\sqrt{3}$ cm.

11. Calcula el radio basal de un cono recto si su altura es 12 y su generatriz es 16.

12. Calcula el área lateral de una pirámide triangular regular cuya arista basal mide 5 y cuya apotema lateral mide $\frac{9}{5}$.

13. Determina el área total de una pirámide regular de base hexagonal cuya arista basal mide 10 cm y su apotema lateral es 12 cm.

14. Calcula el área de un cubo de arista 6 cm.

15. Si la diagonal de una cara de un cubo mide $3\sqrt{2}$, calcula el área total.

16. Si el área de un cubo es 384 m^2, determina:
a) la medida de la diagonal de una cara.
b) la medida de la diagonal del cubo.

17. El área lateral de un paralelepípedo recto de base cuadrada es 44 cm^2. Encuentra el área de su base si su altura es 2 cm.

18. Las medidas de las aristas de un paralelepípedo rectangular concurrentes en un mismo vértice están en la razón 1: 2: 3. Si su diagonal mide $2\sqrt{7}$ cm, calcula la medida de las aristas.

19. Determina la altura de un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 4 cm, sabiendo que su área lateral es 240 cm.

20. El área total de un tetraedro regular es $81\sqrt{3}$. Calcula la medida de una arista y su altura.

21. Calcula la superficie total de un tronco de pirámide de bases cuadradas si la arista basal superior mide 4, la inferior mide 8 y la apotema lateral mide 5.

22. Determina la altura de un cilindro si se sabe que su área total es 8π y su altura es igual al doble del radio de la base.

23. Si un rectángulo de lados a y b gira en torno a su lado b, calcula el área total del sólido que se genera.

24. Encuentra el área total de un cono de radio basal 5 y altura 20.

25. La altura de un cono es de 10 cm. Encuentra su área lateral si sabes que: $g : r = 3 : 2$

26. Encuentra una expresión para $\dfrac{A_L}{A_B}$ de un cono si la generatriz es igual al doble del radio de la base.

27. Calcula el área de una esfera de 5 cm de radio.

28. Calcula el área de una esfera de 25 cm de diámetro.

29. Si el área de una esfera es 100π, determina su diámetro.

30. Encuentra el perímetro de un círculo máximo de una esfera cuya área es 36π.

31. Si el volumen de un cubo es 512 cm^3, encuentra su área total y la medida de su arista.

32. Encuentra el volumen de un prisma recto regular de base hexagonal cuya arista basal mide 8 cm si su altura es 13 cm.

33. Determina el volumen de un tetraedro regular cuya arista mide 6 cm.

34. Encuentra el volumen de un octaedro regular de 6 cm de arista.

35. Encuentra el volumen de una pirámide triangular regular cuya arista basal mide 2 cm y cuya altura es 6 cm.

36. Determina el volumen de una pirámide recta de base cuadrada si su arista basal es 4 cm y su arista lateral es de 8 cm.

37. Determina la longitud de la arista basal de una pirámide cuadrangular regular sabiendo que su altura es 3 m y su volumen es 25 m^3.

38. Determina el volumen de una pirámide de base cuadrada si su altura es $4\sqrt{3}$ y sus ángulos diedros a la base miden 45° cada uno.

39. Determina la longitud de la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es de a cm^3.

40. Determina el volumen de una pirámide que tiene 12 cm de altura si su base es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 10 m.

41. Encuentra el volumen de una pirámide truncada de bases paralelas si las áreas de sus bases son 144 cm^2 y 81 cm^2 y su altura es 15 cm. (Ver ejercicio resuelto nº 11).

42. Determina el volumen de un cilindro de revolución de radio basal 10 cm y altura 25 cm.

43. Determina la profundidad que debe tener un depósito cilíndrico de 10 m de radio basal para que su capacidad sea de 250 m^3.

44. Determina el volumen de un cilindro circular si el radio de su base es a y su área lateral es L.

45. Si un cubo está circunscrito a un cilindro, determina una expresión que relacione el volumen de los dos cuerpos.

46. Determina el radio de la base de un cono recto cuyo volumen es 16 m^3 y su altura es 80 cm.

47. El área lateral de un cono de revolución es 14π si su generatriz mide 7. Determina su volumen.

48. Determina el volumen de un tronco de cono recto circular si los radios de sus bases son 4 y 9 cm y la longitud de su generatriz es la suma de dichos radios.

49. Si el diámetro de una esfera es 10 cm, determina su volumen.

50. Si el volumen de una esfera es $166\frac{2}{3}\pi$, determina su área.

51. Determina el volumen de una esfera si sabes que el perímetro de un círculo máximo es 6π.

52. Se tienen dos esferas tangentes exteriores de radios 3 y 6 cm. Calcula el volumen del cono circunscrito a dichas esferas.

53. Un tronco de prisma recto triangular regular de arista basal a tiene como aristas laterales segmentos de medidas $2a$, $3a$ y $4a$, Hallar su volumen y su área total.

Soluciones

1. 6
2. $a^2\sqrt{2}$, $9\sqrt{2}$, $200\sqrt{2}$
3. $d_1 = \sqrt{61}$; $d_2 = \sqrt{52}$; $d_3 = \sqrt{41}$
4. $D = \sqrt{14}$
5. 10, 15 y 30 cm
6. $6\sqrt{3}$; $\sqrt{73}$
7. $r = 3$
8. $g = 5$ cm
9. $h = 10$ m
10. $h = 2\sqrt{33}$ cm
11. $r = 4\sqrt{7}$
12. $\frac{27}{2}$
13. $360 + 150\sqrt{3}$
14. 216 cm^2
15. 54
16. a) $8\sqrt{2}$; b) $8\sqrt{3}$
17. $\frac{121}{4}$ cm^2
18. Las aristas miden: $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$
19. $h = \frac{20\sqrt{3}}{3}$
20. $a = 9$; $h = 3\sqrt{6}$
21. $A_T = 200$
22. Altura $(h) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
23. $A_T = 2\pi a(b + a)$
24. $A_T = 25\pi(1 + \sqrt{17})$
25. $A_L = 120\pi$
26. $A_L = \pi rg \qquad A_B = \pi r^2 \qquad g = 2r$

    $\frac{A_L}{A_B} = \frac{\pi rg}{r^2} \quad \frac{A_L}{A_B} = \frac{2r}{1r} \qquad \therefore \frac{A_L}{A_B} = \frac{2}{1}$
27. $A_{esfera} = 100\pi$
28. $A_{esfera} = 625\pi$
29. Diámetro = 10
30. Perímetro de ⊙ máximo = 6π
31. Arista = 8 cm; $A_{total} = 384$ cm
32. $V = 1.248\sqrt{3}$ cm^3
33. $V = 18\sqrt{2}$ cm^3
34. $V = 36\sqrt{2}$ cm^3
35. $V = 2\sqrt{3}$ cm^3
36. $V = \frac{32}{3}\sqrt{14}$ cm^3
37. Arista basal = 5 m
38. $V = 256\sqrt{3}$ u. de v.
39. Longitud de arista = $\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}}\,a$ cm
40. $V = 300\sqrt{3}$ m^3
41. $V = 1.665$ cm^3
42. $V = 2.500\pi$ cm^3
43. $h = \frac{2{,}5 \text{ m}}{\pi}$
44. $V = \frac{a \cdot L}{2}$
45. $V_{cil} = \frac{\pi}{4}$ volumen cubo
46. $2\sqrt{\frac{15}{\pi}}$
47. $4\sqrt{5}\pi$
48. $V = \frac{532}{5}\pi$ u. de v.
49. $\frac{500}{3}\pi$ cm^3
50. 100π
51. $V = 36\pi$ u. de v.
52. 576π cm^3
53. $V = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3 \qquad A_T = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\right)a^2$

Prueba de selección múltiple

1. En un prisma se define la arista como un segmento:

A. Generado por la intersección de un plano inclinado y el prisma.
B. Que une dos vértices opuestos de una misma cara.
C. Intersección de dos caras no contiguas.
D. Del interior del cuerpo que une dos vértices de caras opuestas.
E. Generado por la intersección de dos caras contiguas.

2. El área total de un cubo equivalente a un ortoedro (paralelepípedo recto) de 64 m de largo, 27 m de ancho y 8 m de altura es:

A. 576 m^2
B. 3.456 m^2
C. 6.912 m^2
D. 10.368 m^2
E. 13.824 m^2

3. Dado un prisma recto triangular regular de 12 cm de altura que desarrollada su superficie lateral tiene la forma de un rectángulo cuya diagonal mide 20 cm, determina el área total del prisma.

A. $\frac{64}{9}\sqrt{3}$ cm^2
B. $256\sqrt{3}$ cm^2
C. $\left(96+\frac{64}{9}\sqrt{3}\right)$ cm^2
D. $\left(96-\frac{64}{9}\sqrt{3}\right)$ cm^2
E. $\left(192+\frac{128}{9}\sqrt{3}\right)$ cm^2

4. El volumen de un cubo en que la suma de las medidas de sus aristas es 36 cm es:

A. 3 cm^3
B. 9 cm^3
C. 27 cm^3
D. 32 cm^3
E. 36 cm^3

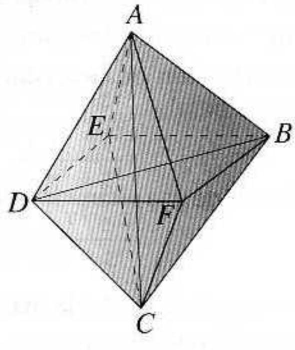
5. ¿Cuántos poliedros regulares cuyas caras son triángulos equiláteros existen?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

6. En un poliedro convexo, si C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas, ¿cuál es la relación correcta?

A. $A = V - C + 2$
B. $A = C + V + 2$
C. $A = C - V - 2$
D. $A = C - V + 2$
E. $A = C + V - 2$

7. La figura representa el octoedro regular $ABCDEF$. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales. El ángulo formado por las digonales es de:



A. 60°
B. 45°
C. 60°
D. 90°
E. 130°

8. Si la diagonal de un cubo mide $3\sqrt{3}$ m, entonces su arista mide:

A. 12 m
B. 6 m
C. 3 m
D. 1 m
E. 9 m

9. Determina el volumen de un tronco de prisma recto triangular cuyas aristas laterales son 14, 12 y 4 cm, respectivamente, y el área de la base es 25 cm^2.

A. 697 cm^3
B. 125 cm^3
C. 250 cm^3
D. 725 cm^3
E. 672 cm^3

10. En una pirámide se llama apotema lateral a:

A. El vértice común de los triángulos laterales.
B. La perpendicular bajada desde la cúspide al plano de la base.
C. La altura de cada uno de los triángulos que forman las caras laterales.
D. La intersección de dos caras laterales.
E. La intersección de una cara lateral y una cara basal.

11. El área lateral de una pirámide recta regular es:

A. El semiperímetro de la base por la apotema lateral.
B. La suma de las áreas de todas las caras.
C. Un tercio del área de la base por la altura.
D. El área de la base por la altura dividida en dos.
E. La arista basal por la arista lateral.

12. El volumen de una pirámide cuya altura es 20 m y el área de la base es 180 m^2 es:

A. 600 m^3
B. 1.800 m^3
C. 1.200 m^3
D. 2.400 m^3
E. 3.600 m^3

13. Un trozo de madera tiene forma de paralelepípedo. Sabiendo que la densidad es la masa dividida por el volumen, que las medidas de sus aristas son 15, 12 y 8 cm y pesa 1.340 g, determinar su densidad.

A. 1.074 gr/cm^3
B. 0,93 gr/cm^3
C. 2,79 gr/cm^3
D. 7,44 gr/cm^3
E. 1,86 gr/cm^3

14. El centro de una esfera de 10 cm de diámetro está a 3 cm de uno de los círculos menores. El área del círculo menor es:

A. 4π cm^2
B. 9π cm^2
C. 10π cm^2
D. 16π cm^2
E. 25π cm^2

15. El volumen de una esfera cuya área es 64m^2 equivale a:

A. $\frac{3\pi}{256}m^3$
B. $\frac{3\sqrt{\pi}}{256}m^3$
C. $\frac{256}{3\sqrt{\pi}}m^3$
D. $\frac{256}{3\pi}m^3$
E. $\frac{4}{3}\pi$ m^3

16. La circunferencia de la base de un cono es de 160 dm. Su altura es de 15 dm. Entonces su área total es:

A. $\frac{20}{\pi}\left(\sqrt{225\pi^2 + 6.400} + 80\right)$ dm²
B. $\frac{60}{\pi}\left(\sqrt{225\pi^2 + 6.400} + 80\right)$ dm²
C. $\frac{80}{\pi}\left(\sqrt{225\pi^2 + 6.400} + 80\right)$ dm²
D. $\frac{120}{\pi}\left(\sqrt{225\pi^2 + 6.400} + 80\right)$ dm²
E. Falta información

17. Hallar la medida de la generatriz de un cono sabiendo que su altura es 8 cm y que el radio mide dos unidades menos que la altura.

A. 6 cm
B. 8 cm
C. 10 cm
D. 12 cm
E. 14 cm

18. Calcular el área total de un cono recto equilátero (ángulo entre la generatriz y el radio basal mide 60º) si el diámetro de su base mide 10 cm.

A. 55π cm²
B. 75π cm²
C. 150π cm²
D. 200π cm²
E. 300π cm²

19. En un plano $\mathcal{P}$, $A \notin \mathcal{P}$, $\odot(0, r) \in \mathcal{P}$; el diámetro de la circunferencia es 8 cm; la distancia del punto A al plano $\mathcal{P}$ es 3 m y la distancia más corta del punto A a la $\odot(0, r)$ es 5 m. Hallar la distancia más larga de A a $\odot(0, r)$.

A. $3\sqrt{17}$ m
B. $4\sqrt{17}$ m
C. $5\sqrt{17}$ m
D. 4 m
E. 12 m

20. Las proyecciones de un segmento sobre un plano miden 12 cm y sobre el plano perpendicular miden 5 cm. Determinar la medida del segmento.

A. 8 cm
B. 10 cm
C. 11 cm
D. 12 cm
E. 13 cm

21. La superficie total de un cubo cuyas diagonales miden $2\sqrt{3}$ m es:

A. 36 m²
B. 27 m²
C. 24 m²
D. 18 m²
E. 12 m²

22. El volumen de un prisma recto de base cuadrada es 96 u^3. Si su altura es 12 u, entonces la longitud de la arista de la base es:

A. $6\sqrt{2}\ u$
B. $4\sqrt{2}\ u$
C. $3\sqrt{2}\ u$
D. $2\sqrt{2}\ u$
E. $\sqrt{2}\ u$

23. La longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular cuyas aristas diferentes miden x, y y z es:

A. $\sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$
B. $\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$
C. $\sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$
D. $\sqrt{-x^2 + y^2 + z^2}$
E. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

24. El área total de un cilindro cuya generatriz es el doble del radio y la longitud de la circunferencia basal mide 18,85 m es:

A. 54π m²
B. 36π m²
C. 44π m²
D. 23π m²
E. 64π m²

25. En un prisma recto de base cuadrada se encuentra inscrito un cilindro. La razón entre el volumen del prisma y el cilindro es:

A. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{-4}$

B. $\frac{-4}{\pi}$ E. $\frac{2}{4}$

C. $\frac{4}{\pi}$

26. El área total de un octaedro regular cuya arista mide $6u$ es:

A. $144\sqrt{3}\,u^2$
B. $72\sqrt{3}\,u^2$
C. $108\sqrt{3}\,u^2$
D. $36\sqrt{3}\,u^2$
E. $12\sqrt{3}\,u^2$

27. Hallar el área lateral de un prisma recto regular de base triangular sabiendo que la arista basal mide 4 m y la altura del prisma es 16 m.

A. 384 m^2
B. 192 m^2
C. 188 m^2
D. 48 m^2
E. 96 m^2

28. El área total de un icosaedro regular de 4 m de arista es:

A. $20\sqrt{3}\ m^2$
B. $40\sqrt{3}\ m^2$
C. $60\sqrt{3}\ m^2$
D. $80\sqrt{3}\ m^2$
E. $16\sqrt{3}\ m^2$

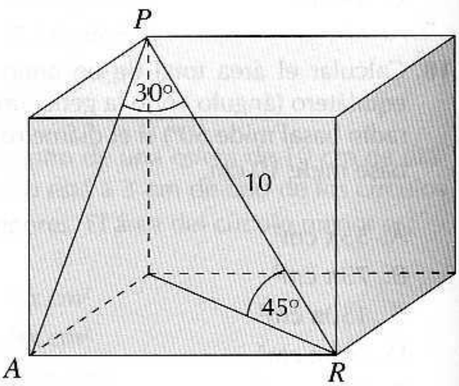
29. La base de una pirámide de volumen 30 m^3 es un cuadrado. Si su altura es 5 m, la medida del lado de la base es:

A. $3\sqrt{2}$ m
B. $4\sqrt{2}$ m
C. $6\sqrt{2}$ m
D. $8\sqrt{2}$ m
E. No se puede determinar

30. La arista lateral de una pirámide regular hexagonal es $5u$. El lado de la base mide $3u$. La altura de la pirámide es:

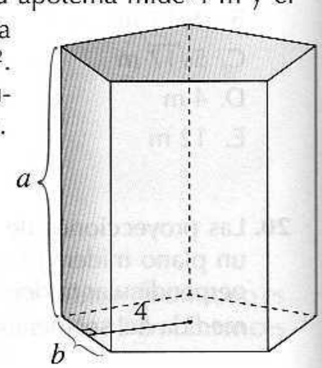
A. $2u$
B. $3u$
C. $4u$
D. $6u$
E. $8u$

31. Hallar el volumen de un paralelepípedo rectangular si su diagonal mide $10u$ y forma un ángulo de 45° con una base y un ángulo de 30° con una cara lateral.



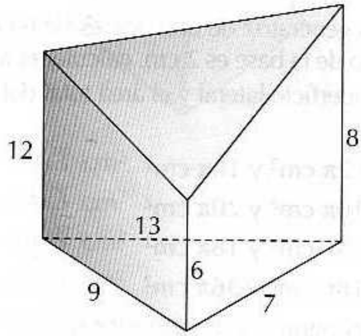
A. $115\sqrt{2}\,u^3$
B. $120\sqrt{2}\,u^3$
C. $125\sqrt{2}\,u^3$
D. $130\sqrt{2}\,u^3$
E. $135\sqrt{2}\,u^3$

32. En un prisma regular la base es un pentágono regular, su apotema mide 4 m y el área de una cara lateral es 18 m^2. Calcular el volumen del prisma.



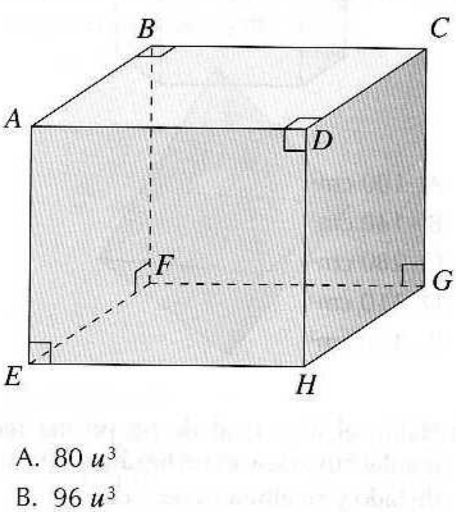
A. 160 m^3
B. 180 m^3
C. 200 m^3
D. 220 m^3
E. Ninguna de la anteriores

33. Un tronco de prisma triangular recto tiene por aristas basales los segmentos cuyas longitudes son 9 m, 13 m y 7 m. Las aristas laterales opuestas a estos lados miden 8 m, 6 m y 12 m, respectivamente. Hallar el área lateral del tronco.



A. 260 m^2
B. 284 m^2
C. 374 m^2
D. 384 m^2
E. 819 m^2

34. Hallar el volumen del paralelepípedo rectangular sabiendo que $EA = 6u$, $AG = \sqrt{77}u$ y $EF = 4u$.



A. 80 u^3
B. 96 u^3
C. 120 u^3
D. 132 u^3
E. 140 u^3

35. ¿Cuántas caras tiene un icosaedro?

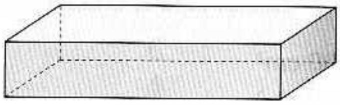
A. 28
B. 20
C. 23
D. 14
E. 36

36. ¿Cuántas aristas tiene un hexaedro?

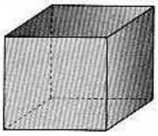
A. 10
B. 15
C. 20
D. 12
E. 8

37. De los siguientes cuerpos geométricos, ¿cuáles son prismas?

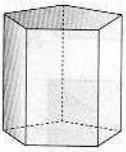
I.



II.



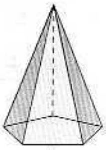
III.

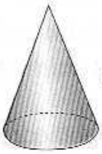


A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. Sólo I y II
E. I, II y III

38. De estas afirmaciones, ¿cuál(es) es(son) falsa(s)?

I.  es un tronco

II.  es un prisma

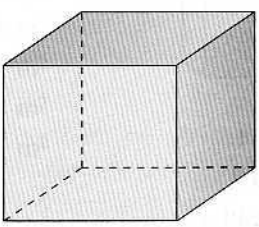
III.  es una pirámide

A. Sólo I
B. Sólo II
C. Sólo III
D. II y III
E. I, II y III

39. Las medidas de un ortoedro (paralelepípedo) son 3 cm y 8 cm y su altura es de 10 cm. ¿Cuál es su volumen?

A. 200 cm^2
B. 160 cm^2
C. 240 cm^2
D. 220 cm^2
E. 110 cm^2

40. Si el volumen de un cubo es de 64 m^3, ¿cuánto mide su arista?



A. 6 cm
B. 2 cm
C. 8 cm
D. 4 cm
E. $\sqrt{3}$ cm

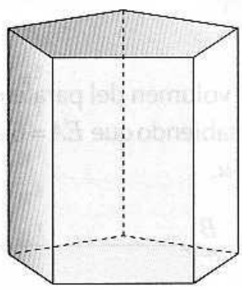
41. Calcular el área de la superficie lateral y el área total de un tronco de pirámide de bases paralelas que son dos cuadrados cuyos lados miden 4 cm y 2 cm, respectivamente, y la altura de cada cara del tronco mide 6 cm.

A. 72 cm^2 y 90 cm^2
B. 72 cm^2 y 92 cm^2
C. 70 cm^2 y 92 cm^2
D. 70 cm^2 y 90 cm^2
E. 64 cm^2 y 28 cm^2

42. Si la generatriz de un cono es de 6 cm y el radio de la base es 2 cm, calcular el área de la superficie lateral y el área total del cono.

A. 12π cm^2 y 16π cm^2
B. 10π cm^2 y 20π cm^2
C. 14π cm^2 y 18π cm^2
D. 18π cm^2 y 36π cm^2
E. Ninguna de las anteriores

43. Dado un prisma recto regular pentagonal cuyo lado basal mide 2 cm y cuya arista lateral mide 14 cm, determina la superficie lateral.



A. 100 cm^2
B. 140 cm^2
C. 280 cm^2
D. 110 cm^2
E. 120 cm^2

44. Hallar el área total de un prisma recto regular cuya base es un hexágono de 3 cm de lado y su altura es de 7 cm.

A. 172,7 cm^2

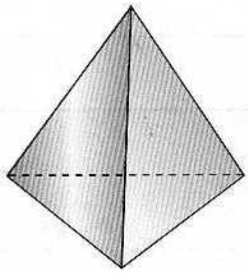
B. 100,5 cm^2

C. 120,5 cm^2

D. 140,5 cm^2

E. 261 cm^2

45. Hallar el área del tetraedro regular si su arista es de $4\sqrt{2}$ cm.



A. $40\sqrt{3}$ cm^2

B. $24\sqrt{3}$ cm^2

C. $48\sqrt{3}$ cm^2

D. $32\sqrt{3}$ cm^2

E. $64\sqrt{3}$ cm^2

46. Determinar el área de una esfera cuyo radio mide 1 cm:

A. 4π cm^2

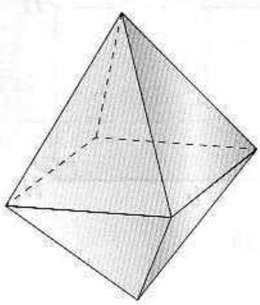
B. π cm^2

C. 2π cm^2

D. 8π cm^2

E. $\frac{4}{3}\pi$ cm^2

47. Hallar el área total de un octaedro regular cuya arista mide 6 cm.



A. $72\sqrt{3}$ cm^2

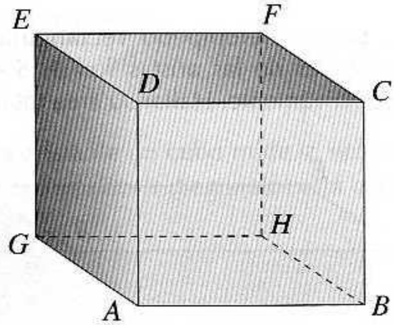
B. $72\sqrt{2}$ cm^2

C. $3\sqrt{3}$ cm^2

D. $24\sqrt{3}$ cm^2

E. $24\sqrt{2}$ cm^2

48. Hallar la superficie total de un hexaedro cuya arista mide 2 cm.



A. 24 cm^2

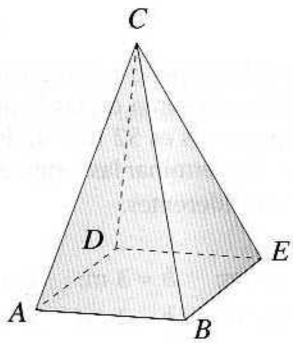
B. 12 cm^2

C. 4 cm^2

D. 8 cm^2

E. 16 cm^2

49. Si el lado de la base de una pirámide cuadrangular mide 10 cm y su altura es de 2 cm, determine el área lateral.



A. $10\sqrt{29}$ cm^2

B. $20\sqrt{29}$ cm^2

C. 15 cm^2

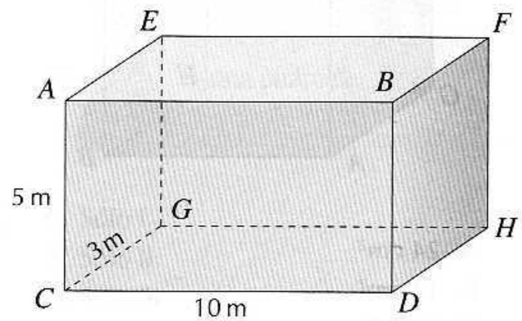
D. $\sqrt{29}$ cm^2

E. $40\sqrt{29}$ cm^2

50. Si se sabe que el radio de la base de un cilindro circular es de 8 cm y su altura es de 15 cm, calcule las áreas lateral y total del cilindro.

A. 241π cm^2 y 369π cm^2
B. 8π cm^2 y 15π cm^2
C. 240π cm^2 y 368π cm^2
D. 239π cm^2 y 367π cm^2
E. Ninguna de las anteriores

51. En un paralelepípedo rectangular las longitudes de las aristas son 3, 5 y 10, respectivamente. Hallar su área total.



A. 190 m^2
B. 200 m^2
C. 80 m^2
D. 210 m^2
E. 150 m^2

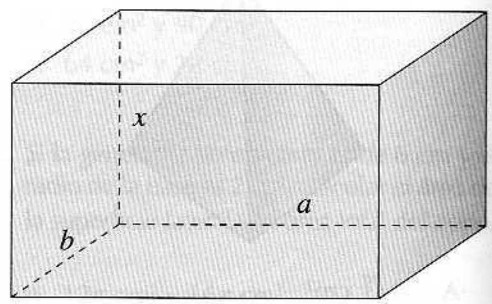
52. En el paralelepípedo rectangular de volumen 72 m^3, la suma de las longitudes de todas sus aristas es 52 m y su área lateral es 84 m^2. Determinar las longitudes de sus tres aristas diferentes.

A. $a = 24$ m; $b = 3$ m; $c = 1$ m
B. $a = 12$ m; $b = 3$ m; $c = 2$ m
C. $a = 9$ m; $b = 4$ m; $c = 2$ m
D. $a = 6$ m; $b = 4$ m; $c = 3$ m
E. Ninguna de las anteriores

53. Hallar el volumen de un paralelepípedo rectangular sabiendo que las longitudes de sus tres aristas se hallan en progresión aritmética, que ellas suman 36 m y que el área total es 832 m^2.

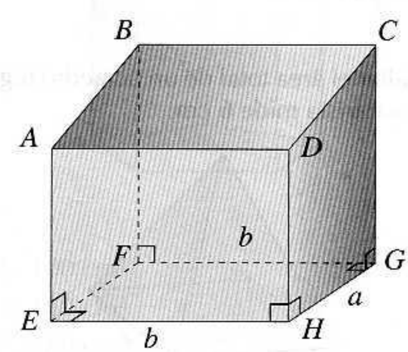
A. 1.436 m^3
B. 1.536 m^3
C. 1.636 m^3
D. 1.736 m^3
E. 1.836 m^3

54. En un paralelepípedo rectangular el área de la base es 15 m^2, la suma de las longitudes de todas sus aristas es 48 m y la suma de los cuadrados de las longitudes de sus tres aristas diferentes es 50 m^2. Hallar la altura del sólido.



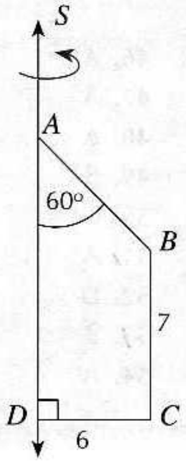
A. 4 m
B. 6 m
C. 8 m
D. 3 m
E. 10 m

55. En la figura, un tronco de prisma recto, la base $EFGH$ es un rectángulo. Se cumple que $BF = CG = 3AE = 3DH = 9HG = 9a$ y el área de la superficie lateral es 16 veces el área de la base $EFGH$. Calcular el valor de a en función de b.



A. $a = 3b$
B. $a = \dfrac{b}{3}$
C. $a = 2b$
D. $a = \dfrac{b}{2}$
E. $a = b$

56. En la figura siguiente, calcular el área lateral del sólido generado por la poligonal $ABCD$ cuando gira alrededor de la recta S.



A. $\pi(84\sqrt{3} + 24)$
B. $\pi(24\sqrt{3} - 84)$
C. $\pi(84\sqrt{3} - 24)$
D. $\pi(24\sqrt{3} + 84)$
E. $\pi(24\sqrt{3} + 24)$

57. El volumen de un cilindro de diámetro basal 5 y altura 8 cm es:

A. 25π cm^3
B. 50π cm^3
C. 100π cm^3
D. 200π cm^3
E. 250π cm^3

58. El volumen de una esfera inscrita en un cubo de arista 6 cm es:

A. 36π cm^3
B. 72π cm^3
C. 86π cm^3
D. 288π cm^3
E. 306π cm^3

59. La arista de un cubo mide a, entonces la longitud de sus diagonales está dada por:

A. a
B. a^2
C. $a\sqrt{2}$
D. $a\sqrt{3}$
E. $2a$

60. Si la diagonal de una cara que contiene el largo y el ancho de un paralelepípedo mide 5, su largo más su ancho mide 7 y su altura mide 2, entonces su área total es:

A. 16
B. 12
C. 24
D. 52
E. Ninguna de las anteriores

Solvciones

1. E	**10.** C	**19.** A	**28.** D	**37.** E	**46.** A	**55.** B
2. B	**11.** A	**20.** E	**29.** A	**38.** D	**47.** A	**56.** D
3. E	**12.** C	**21.** C	**30.** C	**39.** C	**48.** A	**57.** B
4. C	**13.** B	**22.** D	**31.** C	**40.** D	**49.** B	**58.** A
5. B	**14.** D	**23.** E	**32.** B	**41.** B	**50.** C	**59.** D
6. E	**15.** C	**24.** A	**33.** A	**42.** A	**51.** A	**60.** D
7. D	**16.** C	**25.** C	**34.** C	**43.** B	**52.** D	
8. C	**17.** C	**26.** B	**35.** B	**44.** A	**53.** B	
9. C	**18.** B	**27.** B	**36.** D	**45.** D	**54.** A	

PRUEBA DE SELECCIÓN MÚLTIPLE FINAL

1. La altura de un triángulo equilátero de perímetro 12 cm mide:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{3}$

E. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

2. El área total de un cubo es $6x^2 - 24x + 24$. Si la longitud de su arista aumenta en 1 unidad, el área de una cara es:

A. $x^2 + 2x + 1$

B. $x^2 + 2x - 1$

C. $x^2 - 2x - 1$

D. $x^2 - 2x + 1$

E. $6x^2 - 4x + 3$

3. El área de un cuadrado es de 16 cm². Si cada lado aumenta al doble su medida, el área de la mitad del cuadrado resultante es:

A. 2 cm²

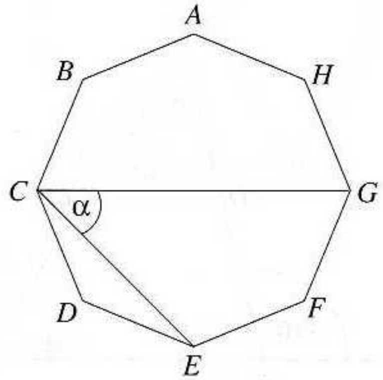
B. 4 cm²

C. 8 cm²

D. 32 cm²

E. 64 cm²

4. La figura es un octágono regular. Calcular la medida del ángulo $\sphericalangle GCE$.



A. 20º

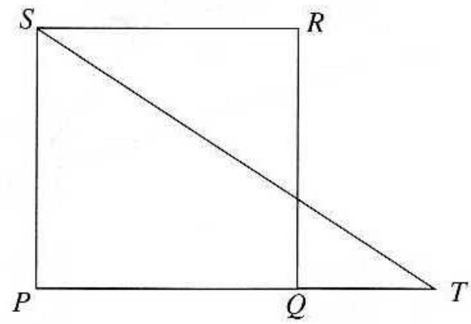
B. 40º

C. 45º

D. 90º

E. 100º

5. En la figura, el triángulo SPT tiene un área equivalente al 75% del área del cuadrado $PQRS$. Si el perímetro del cuadrado es igual a $16p$, la medida de $\overline{PT}$ es:



A. p

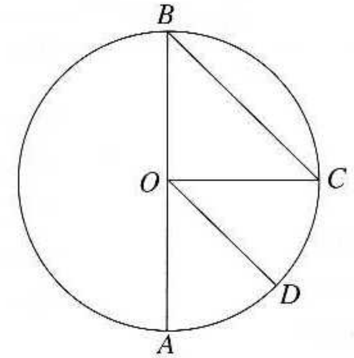
B. $2p$

C. $4p$

D. $6p$

E. $8p$

6. En la circunferencia de la figura, O es el centro, $\overline{AB}$ es diámetro y $\widehat{BC}$ es cuerda. Si $\sphericalangle BOC = 100º$ y $\overline{BC} \parallel \overline{OD}$, la medida del ángulo $\sphericalangle COD$ es:



A. 20°

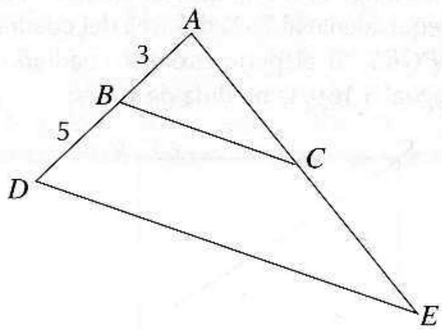
B. 30°

C. 40°

D. 60°

E. 70°

7. En la figura, $\triangle ABC$ es recto en A. Su área es 18 cm². En $\triangle ADE$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. El área del $\triangle ADE$ es:



A. 148 cm²

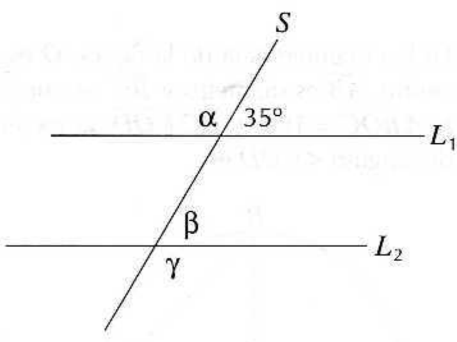
B. 128 cm²

C. 64 cm²

D. 36 cm²

E. 32 cm²

8. En la figura, $L_1 \parallel L_2$ y S es secante. La suma de $\alpha + \beta + \gamma$ es:



A. 105°

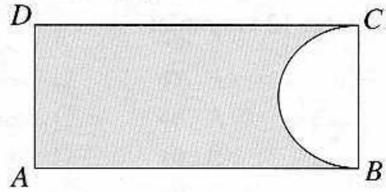
B. 215°

C. 290°

D. 325°

E. 360°

9. En la figura $ABCD$ es un rectángulo de lados 6 cm y 4 cm. El área de la parte no sombreada es:



A. $(24 - 4\pi)$ cm²

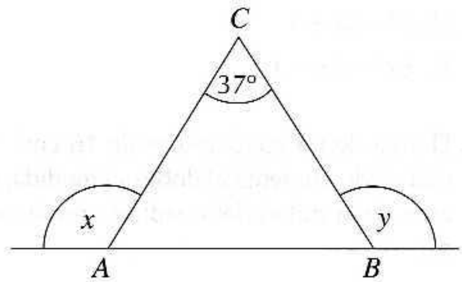
B. $(24 - 2\pi)$ cm²

C. $(24 - \pi)$ cm²

D. 4π cm²

E. 2π cm²

10. En la figura, ABC es un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$. El valor de $x + y$ es:



A. 37°

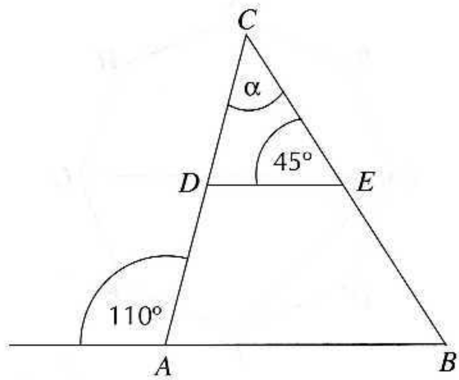
B. 71,5°

C. 108,5

D. 143°

E. 217°

11. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. El valor de α es:



A. 45°

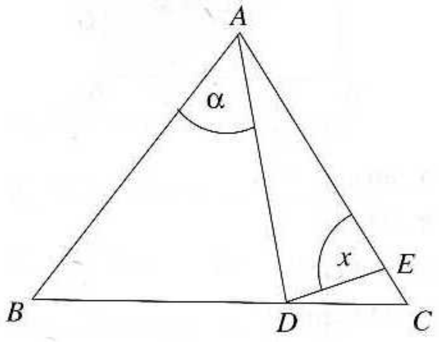
B. 60°

C. 65°

D. 70°

E. 155°

12. En el triángulo equilátero ABC, $\overline{AD} \perp \overline{DE}$. Si $\alpha = 54°$ encontrar el valor de x:



A. 24°

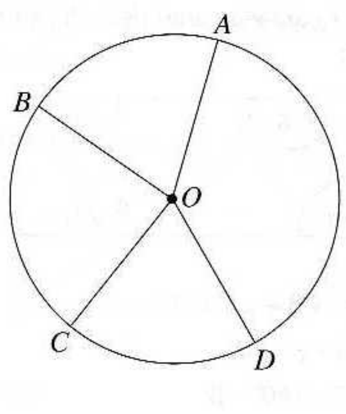
B. 60°

C. 84°

D. 114°

E. 156°

13. En una circunferencia de centro O, tenemos que $\overline{OB} \perp \overline{OC}$, $\sphericalangle COB = \sphericalangle BOA + 29°$ y $\sphericalangle DOC = \sphericalangle BOA$. Entonces el ángulo $\sphericalangle AOD$ mide:



A. 61°

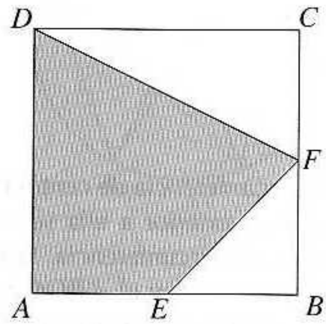
B. 122°

C. 148°

D. 151°

E. 212°

14. En el cuadrado $ABCD$, E y F son puntos medios. ¿Qué parte del área del cuadrado es el área sombreada?



A. $\frac{3}{4}$

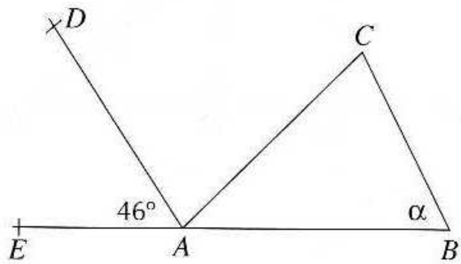
B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{7}{8}$

E. $\frac{9}{10}$

15. El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{BC}$. Si $\overline{AD}$ es bisectriz, determinar el valor de α.



A. 46°

B. 56°

C. 64°

D. 88°

E. 92°

16. En un triángulo ABC, rectángulo en B, sobre $\overline{AC}$ se encuentra D tal que $\overline{AB} = \overline{BD}$. El ángulo ACB mide 34°. Hallar la medida del ángulo DBC.

A. 15°

B. 22°

C. 34°

D. 56°

E. 112°

17. En una circunferencia de centro O, desde un punto B exterior a ella se traza una tangente a la circunferencia. Si el punto de tangencia es A y el $\sphericalangle BOA$ mide 59°, hallar la medida del ángulo $\sphericalangle ABO$.

A. 20°

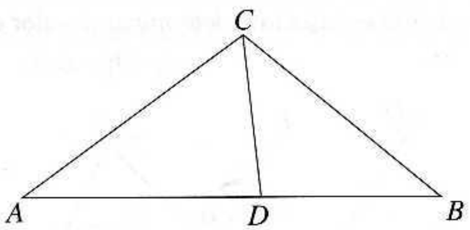
B. 31°

C. 41°

D. 90°

E. 149°

18. Según el triángulo de la figura, $AB = 14$ y $DB = 6$. ¿En que razón están las áreas de los triángulos ABC y ADC?



A. $\frac{2}{1}$

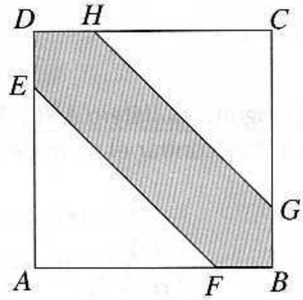
B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{7}{3}$

E. $\frac{7}{4}$

19. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de área 256 cm^2. Si $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$ y $\overline{AE} = 3\overline{ED} = 3\overline{DH}$, entonces el área de la figura sombreada es:



A. 40 cm^2

B. 72 cm^2

C. 104 cm^2

D. 112 cm^2

E. 144 cm^2

20. El área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de perímetro 4π es:

A. $2\sqrt{3}$

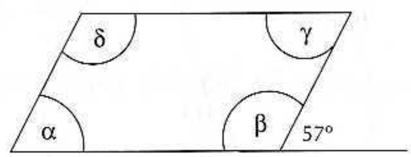
B. $4\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

E. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

21. En el paralelogramo de la figura es falso que:



A. $\alpha + \beta + \gamma = 237°$

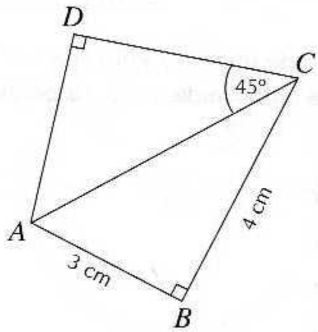
B. $\delta - \gamma = 66°$

C. $\delta = 180° - \beta$

D. $\delta = 180° - 57°$

E. $\alpha = 144° - \gamma$

22. El perímetro y el área de la siguiente figura son respectivamente:



A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm y $\frac{25}{4}$ cm^2

B. $(5\sqrt{2} + 7)$ cm y $\frac{49}{4}$ cm^2

C. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm y 6 cm^2

D. $(5\sqrt{2} + 3)$ cm y $\frac{49}{4}$ cm^2

E. $5\sqrt{2}$ cm y $\frac{49}{4}$ cm^2

23. Si la mitad del perímetro de un cuadrado es el doble de 16, su diagonal mide:

A. 4

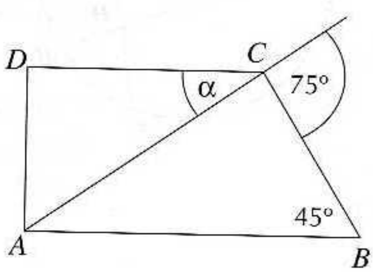
B. $16\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$

D. 16

E. $32\sqrt{2}$

24. En la figura, *ABCD* es un trapecio. El valor de α es:



A. 30°

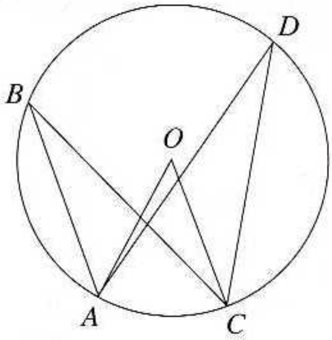
B. 35°

C. 45°

D. 55°

E. 75°

25. En la siguiente circunferencia de centro O, $m(\sphericalangle CBA) + m(\sphericalangle CDA) = 60°$. Determinar $m(\sphericalangle COA)$.



A. 90°

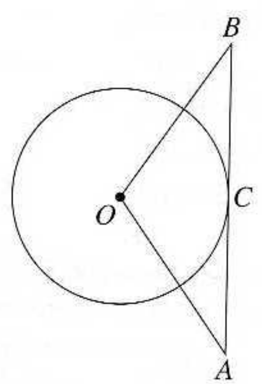
B. 80°

C. 70°

D. 60°

E. 30°

26. En la figura, *ABO* es un triángulo y O es el centro de una circunferencia tangente a un lado del triángulo en C. Si $AB = 12$ cm y la circunferencia mide 10π cm de perímetro, entonces el área del triángulo *ABO* es:



A. 15 cm^2

B. 30 cm^2

C. 60 cm^2

D. 5π cm^2

E. 30π cm^2

27. En un triángulo ABC, el ángulo interior en A mide $12x - 10°$; los ángulos exteriores en B y C miden $18x - 9°$ y $125°$, respectivamente. La medida del ángulo interior en B es:

A. 12°

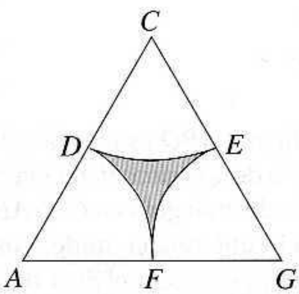
B. 18°

C. 25°

D. 27°

E. 30°

28. En el siguiente triángulo equilátero ABC de lado 4 cm, D, E, F son puntos medios y $\widehat{DF}$, $\widehat{EF}$ y $\widehat{DE}$ son arcos de circunferencias. El área comprendida entre los tres arcos mide:



A. $2(\sqrt{3} - 2\pi)$ cm²

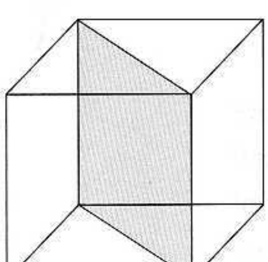
B. $\pi(2 - 3\sqrt{2})$ cm²

C. $2(2\sqrt{3} + \pi)$ cm²

D. $2(\sqrt{3} + 2\pi)$ cm²

E. $2(2\sqrt{3} - \pi)$ cm²

29. En el cubo de volumen $54\sqrt{2}$ m³ determinar la diagonal del cuadrilátero sombreado.



A. $3\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{6}$

C. $3\sqrt{6}$

D. $18\sqrt{2}$

E. $18\sqrt{6}$

30. El área de un rectángulo es $x^2 - 9$. Si uno de sus lados mide $x + 3$, su perímetro es:

A. x

B. $2x$

C. $3x$

D. $4x$

E. $6x$

31. Desde un punto que dista 10 m del centro de una circunferencia se traza un tangente a esta que mide 8 m. La medida del diámetro de la circunferencia es:

A. 4 m

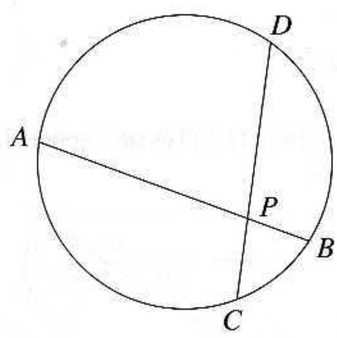
B. 6 m

C. 12 m

D. 14 m

E. 20 m

32. En la circunferencia de la figura, $AP = 12$, $BP = 3$ y $DC = 13$. Hallar la medida del segmento mayor en que P divide a la cuerda $\widehat{DC}$.



A. 1

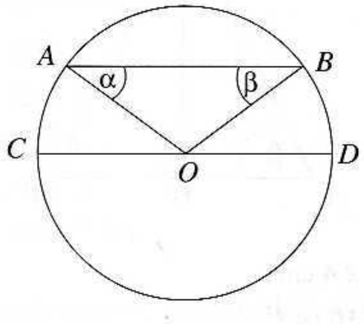
B. 3

C. 4

D. 9

E. 12

33. En la siguiente circunferencia de centro O, $AC = DB$ y $\alpha + \beta = 100°$. La medida del ángulo $\sphericalangle AOD$ es:



A. 70°

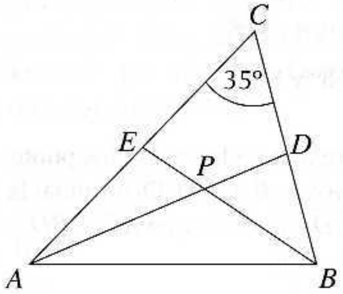
B. 100°

C. 120°

D. 130°

E. 150°

34. En el triángulo ABC, $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son bisectrices. Si $m(\sphericalangle ACB) = 35°$, la medida del ángulo $\sphericalangle APB$ es:



A. 70°

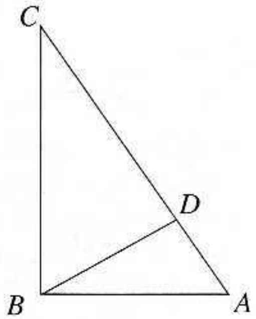
B. 107,5°

C. 115°

D. 125°

E. 145°

35. En el triángulo ABC recto en B, $\overline{BD}$ es la altura. Si AB = 2,5 cm y AD = 0,5 cm, entonces la longitud de $\overline{BC}$ es:



A. $5\sqrt{6}$ cm

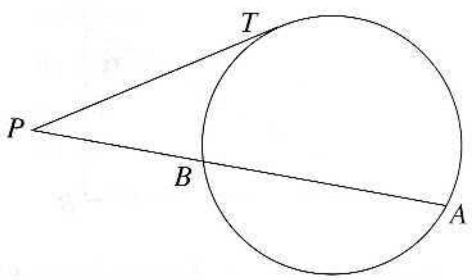
B. $5\sqrt{2}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm

D. $6\sqrt{5}$ cm

E. 12,5 cm

36. En la figura, $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia en T. $\overline{AP}$ es secante. Si $AP = 10$ cm y $AB = \frac{2}{5} AP$, entonces la longitud de $\overline{PT}$ es:



A. $\sqrt{15}$ cm

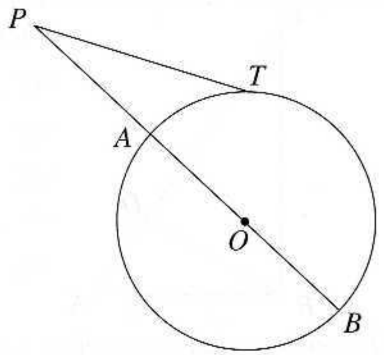
B. $\sqrt{25}$ cm

C. $6\sqrt{5}$ cm

D. $3\sqrt{15}$ cm

E. $2\sqrt{15}$ cm

37. En la circunferencia siguiente, la tangente PT mide 6 m y PA mide 4 m. Hallar el radio.



A. 1,5 m

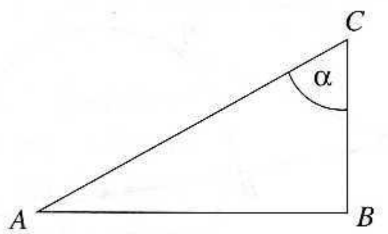
B. 2 m

C. 2,5 m

D. 3 m

E. 5 m

38. En la figura, ABC es triángulo rectángulo en B. Si $\cos \alpha = 0{,}5$ y $BC = 3$ cm, la medida de $\overline{AC}$ es:



A. 6 cm

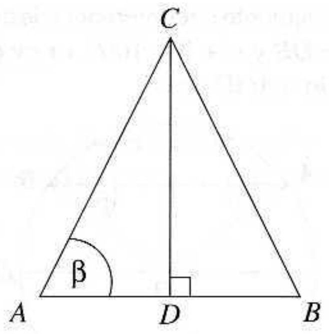
B. 7,5 cm

C. 8 cm

D. 9 cm

E. 12 cm

39. En triángulo ABC, isósceles de base $\overline{AB}$, se cumple que $cotg\ \beta = 2{,}5$ cm y AB mide 6 cm. Determinar el área del triángulo.



A. 2,4 cm^2

B. 10 cm^2

C. 3,6 cm^2

D. 15 cm^2

E. 18 cm^2

40. La medida de dos ángulos suplementarios que están en la razón 3 : 2 es:

A. 112 ° y 68°

B. 110° y 70°

C. 108° y 72°

D. 100° y 80°

E. 98° y 82°

41. Sobre una recta se dan los puntos consecutivos A, B, C y D. Determinar la medida de $\overline{AD}$ sabiendo que $AC + BD = 32$ m y $BC = 8$ m.

A. 12 m

B. 24 m

C. 32 m

D. 36 m

E. 48 m

42. La diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es 5 veces la medida del ángulo. Hallar el suplemento del complemento del ángulo.

A. 15°

B. 18°

C. 27°

D. 72°

E. 108°

43. Si la longitud del lado de un cuadrado es una unidad, entonces el perímetro del triángulo equilátero construido sobre su diagonal es:

A. 6 u

B. $2\sqrt{2}$ u

C. $3\sqrt{2}$ u

D. $4\sqrt{2}$ u

E. $(2 + \sqrt{2})$ u

44. Con la tres octavas partes del perímetro de una circunferencia se construye otra circunferencia de 6π m de longitud. Determina el radio de la circunferencia mayor.

A. 3 m

B. 6 m

C. 8 m

D. 12 m

E. 14 m

45. En un triángulo ABC, $m(\measuredangle ABC) - m(\measuredangle BCA)$ es igual a 20°. Sobre $\overline{AC}$ se ubica el punto D de modo que $AB = AD$. Determinar la medida del ángulo $\measuredangle CBD$.

A. 5°

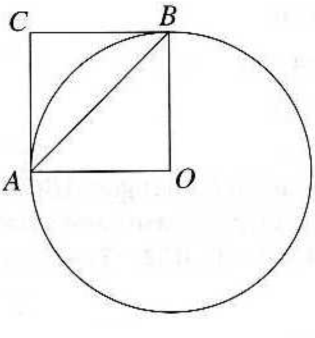
B. 8°

C. 10°

D. 12°

E. 15°

46. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son tangentes a la circunferencia de centro O. Además, si $m(\measuredangle ACB) = 100°$, entonces el ángulo $\measuredangle OBA$ mide.



A. 30°

B. 40°

C. 50°

D. 60°

E. 70°

47. En un triángulo ABC con $m(\measuredangle ABC) = 60°$ y $m(\measuredangle ACB) = 20°$ se traza la bisectriz interior $\overline{AE}$. Desde E se traza la bisectriz del ángulo $\measuredangle BEA$, la cual corta a la prolongación de $\overline{CA}$ en D. Hallar la medida del ángulo $\measuredangle CDE$.

A. 5°

B. 10°

C. 15°

D. 20°

E. 30°

48. Si las coordenadas de los puntos externos del diámetro de una circunferencia son (1, 5) y (4, 1). ¿Cuál es el área de la circunferencia?

A. $6{,}25\pi$

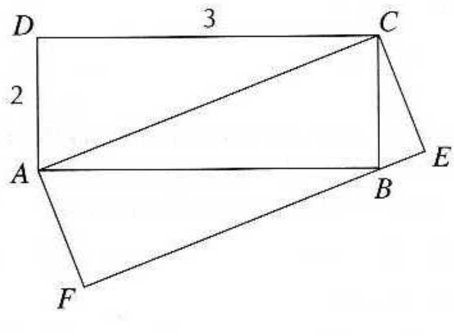
B. $2{,}5\pi$

C. 5π

D. $\sqrt{5}\,\pi$

E. $2\sqrt{5}\,\pi$

49. En la figura, $ABCD$ es rectángulo. Además, $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$. Determinar la medida del lado $\overline{CE}$ del rectángulo $AFEC$.



A. $6\sqrt{13}$

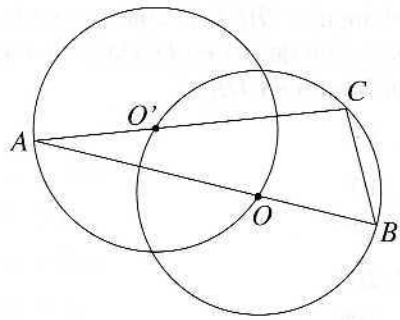
B. $\dfrac{9}{\sqrt{13}}$

C. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

D. $\frac{6}{\sqrt{13}}$

E. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

50. En la figura, O y O' son los centros de dos circunferencias congruentes. En el triángulo ABC, el ángulo $\sphericalangle CAB$ mide 12°, entonces, la medida del ángulo $\sphericalangle ABC$ es:



A. 36°

B. 72°

C. 96°

D. 144°

E. 156°

51. La medida del área de un cuadrado es $9x^2 + 12x + 4$. Si el lado del cuadrado disminuye en una unidad, su área disminuye en:

A. 3

B. 6

C. 9

D. $3x + 2$

E. $6x + 3$

52. Un cuadrado de área 50 m^2 está inscrito en una circunferencia. El área del círculo encerrado por la circunferencia es:

A. $12{,}5\pi$ m^2

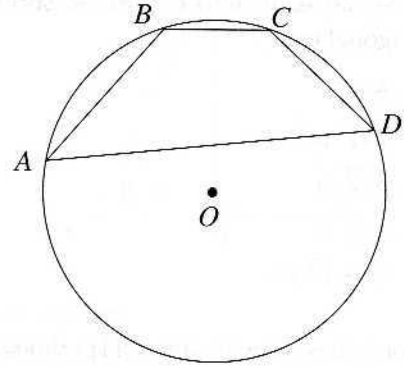
B. 25π m^2

C. 50π m^2

D. 75π m^2

E. 100π m^2

53. En la figura, AB = 80°, AC = 140° y AD = 210°. La medida del arco $\widehat{BD}$ es:



A. 90°

B. 100°

C. 110°

D. 120°

E. 130°

54. Dadas tres circunferencia tangentes exteriores de radios 4, 5 y 6 m, respectivamente, el área del triángulo determinado al unir sus centros es:

A. $15\sqrt{3}$ m^2

B. 15 m^2

C. $15\sqrt{2}$ m^2

D. 30 m^2

E. $30\sqrt{2}$ m^2

55. Los vértices del triángulo ABC son $A(-5, -3)$, $B(-4, 1)$ y $C(-7, 1)$. Si se aplica la traslación $T(9, 0)$ a cada vértice del triángulo, las nuevas coordenadas de A son.

A. (4, −3)

B. (−4, 3)

C. (4, 3)

D. (−4, −3)

E. (5, 1)

56. La traslación T de la figura ABC, si $A(-6, 2)$, $B(-2, 2)$ y $C(-2, 5)$, a su transformada $A'B'C'$ con $A'(-2, -3)$, $B'(2, -3)$ y $C'(2, 0)$ es:

A. $T(5, -4)$

B. $T(-4, -5)$

C. $T(4, 5)$

D. $T(-4, 5)$

E. $T(4, -5)$

57. Si $A(1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(7, 1)$ y $D(4, 3)$, el cuadrilátero simétrico respecto del origen de $ABCD$ tiene los vértices:

A. $A'(-1, -1)$; $B'(-2, -1)$; $C'(-7, -1)$; $D'(-4, 3)$

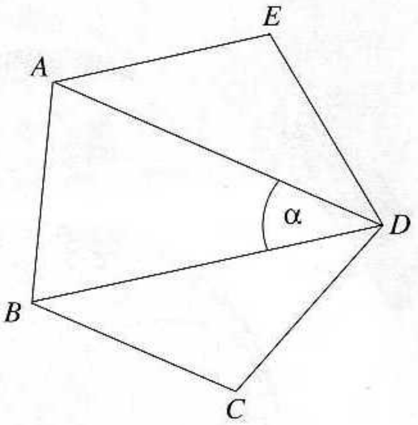
B. $A'(-1, -1)$; $B'(-2, 1)$; $C'(-7, -1)$; $D'(-4, -3)$

C. $A'(1, -1)$; $B'(-2, 1)$; $C'(-7, 1)$; $D'(-4, 3)$

D. $A'(-1, -1)$; $B'(-2, 1)$; $C'(-7, -1)$; $D'(4, -3)$

E. $A'(-1, -1)$; $B'(2, -1)$; $C'(-7, -1)$; $D'(-4, -3)$

58. El valor de α en el polígono regular de la figura es:



A. 144°

B. 108°

C. 72°

D. 54°

E. 36

59. La suma de los ángulos interiores de un polígono es 900°. Calcular el número de lados del polígono.

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 10

60. El número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono que tiene 12 lados es.

A. 10

B. 21

C. 35

D. 54

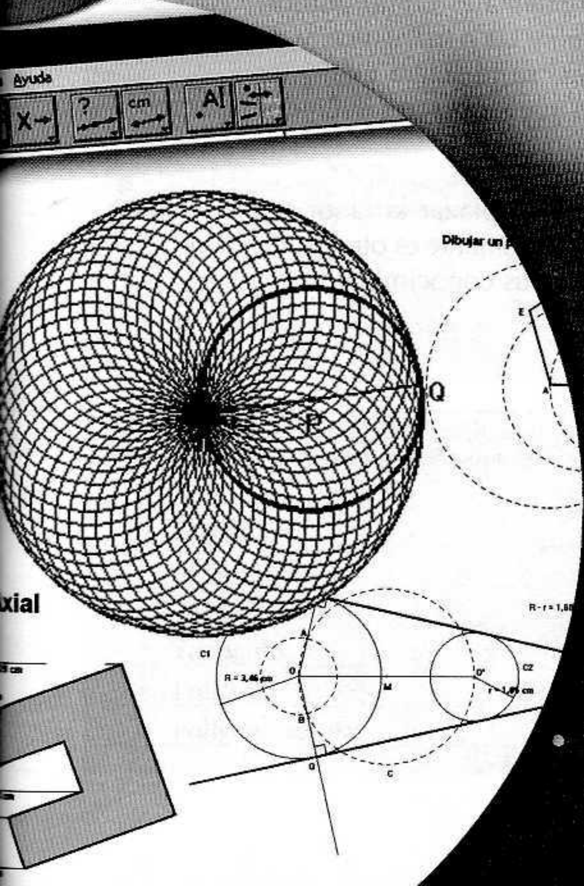
E. 90

Soluciones

1. B	**11.** C	**21.** C	**31.** C	**41.** B	**51.** E
2. D	**12.** C	**22.** B	**32.** D	**42.** E	**52.** B
3. D	**13.** C	**23.** B	**33.** D	**43.** C	**53.** E
4. C	**14.** C	**24.** A	**34.** B	**44.** C	**54.** E
5. D	**15.** A	**25.** D	**35.** A	**45.** C	**55.** A
6. C	**16.** B	**26.** B	**36.** E	**46.** C	**56.** E
7. B	**17.** B	**27.** D	**37.** C	**47.** C	**57.** B
8. D	**18.** E	**28.** E	**38.** A	**48.** A	**58.** E
9. E	**19.** D	**29.** C	**39.** C	**49.** D	**59.** B
10. E	**20.** C	**30.** D	**40.** C	**50.** B	**60.** D

ANEXO

Aplicación de Software (Cabri Géomètre)



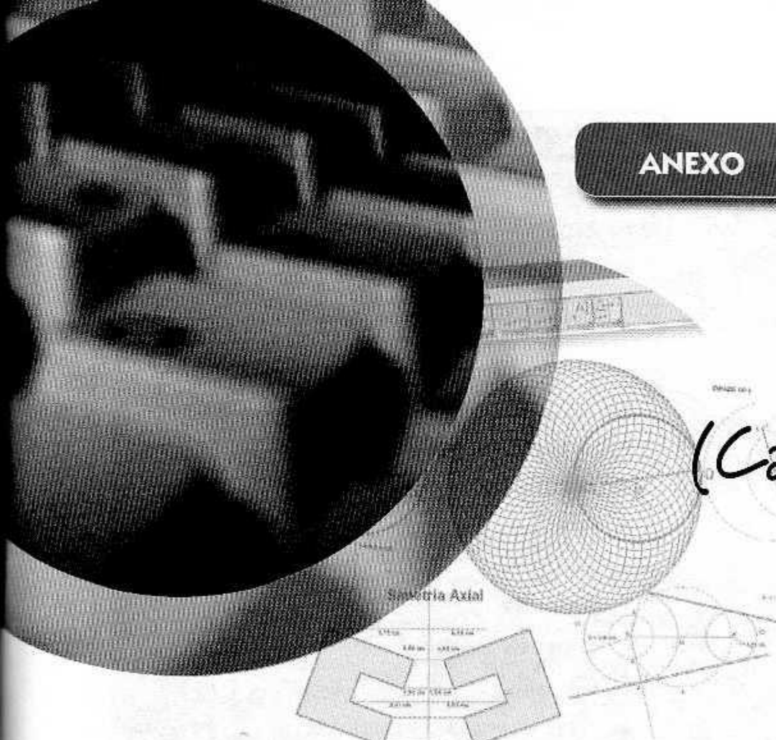
Introducción

Cabri Géomètre II Plus® fue desarrollado para permitir la exploración y la manipulación directa y dinámica de la geometría a través de la interacción didáctica. Es un medio de trabajo en el que los estudiantes tienen la posibilidad de experimentar con una materialización de los objetos geométricos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma que puedan vivir un tipo de experimentación matemática que no es posible tener de otra forma. Por consiguiente, es natural esperar que los estudiantes que trabajen con *Cabri Géomètre II Plus*® puedan avanzar en la comprensión y el conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que ofrecen los medios tradicionales.

Cabri Géomètre II Plus® es un programa que ayuda a estudiar las propiedades geométricas de las figuras y sus múltiples componentes para luego entender mejor la rigurosidad matemática de las demostraciones.

Como características de *Cabri Géomètre II Plus*® destacan la facilidad de aprendizaje y la sencillez para diseñar y construir, así como para explorar y resolver problemas de manera interactiva. A partir de unos objetos elementales como puntos, segmentos, vectores, rectas, circunferencias o triángulos, y de un amplio conjunto de herramientas, se realizará cualquier construcción geométrica que incluirá nuevos objetos definidos por el usuario.

En ningún caso el programa tiende a desplazar la labor del profesor en la clase o del texto guía; simplemente es otra ayuda al servicio del estudiante para afianzar sus conocimientos.



ANEXO

Aplicación de Software (Cabri Géomètre)

La barra de herramientas

En la barra de herramientas encontramos todos los útiles necesarios para realizar las diferentes construcciones geométricas, así como las opciones para cambiar la apariencia del trazado realizado.

Herramientas para seleccionar objetos

- Puntero
- Giro
- Semejanza
- Giro y Semejanza

Herramientas para crear puntos

- Punto
- Punto sobre un objeto
- Punto(s) de intersección

Herramientas para trazar líneas

- Recta
- Segmento
- Semirrecta
- Vector
- Triángulo
- Polígono
- Polígono regular

Herramientas para trazar curvas

- Circunferencia
- Arco
- Cónica

Herramientas para construir

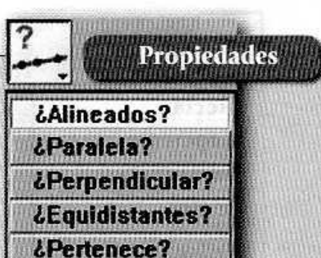
- Recta perpendicular
- Recta paralela
- Punto medio
- Mediatriz
- Bisectriz
- Suma de vectores
- Compás
- Transferencia de medidas
- Lugar geométrico
- Redefinir objeto

Herramientas para transformar objetos

- Simetría axial
- Simetría
- Traslación
- Rotación
- Homotecia
- Inversión

Herramientas para crear macros

- Objetos iniciales
- Objetos finales
- Definir macro



Herramientas para comprobar propiedades

- Alineado
- Paralelo
- Perpendicular
- Equidistante
- Pertenece

Herramientas para medir

- Distancia y longitud
- Área
- Pendiente
- Ángulo
- Ecuación y coordenadas
- Calcular
- Tabular

Herramientas para ver una construcción

- Etiqueta
- Comentarios
- Edición numérica
- Fijar / Liberar
- Traza activada/desactivada
- Animación
- Animación múltiple

Herramientas para dibujar

- Ocultar/Mostrar
- Color
- Rellenar
- Grosor
- Punteado
- Modificar apariencia
- Mostrar ejes
- Nuevos ejes
- Definir cuadrícula

Definir un triángulo

- Seleccione [Rectas]*Triángulo*.
- Sitúe el cursor (en forma de lápiz) en cualquier lugar de la ventana de diseño y haga clic, arrastre enseguida el mouse a una segunda posición y haga clic, después a una tercera posición y haga clic. Aparecerá un triángulo con los tres puntos seleccionados como vértice.
- El triángulo se puede modificar acercando el cursor a cualquiera de los vértices. Aparecerá el mensaje **Este punto**. Para desplazarlo a nueva posición, se arrastrará manteniendo pulsado el botón izquierdo del mouse.
- Para asignar un nombre a cada vértice y, en general, a cualquier elemento, se utilizará la herramienta [Texto y símbolo]*Etiqueta*. Se marca cada uno de los vértices y se escribe el nombre que se les asigna.
- Sitúe el cursor (en forma de +) cerca de un vértice del triángulo. El cursor cambiará a una **I** (aparecerá el mensaje: **Este punto**). Haga clic una vez y aparecerá un cuadro de edición, escriba el nombre para el vértice (por ejemplo, A) y haga clic fuera del cuadro de edición. El cuadro desaparece, pero el nombre del punto permanece. Repita el proceso para los otros vértices.
- Usando la herramienta [Puntero] puede mejorar la ubicación de las etiquetas.

Trazar la altura de un triángulo

- Seleccione [Construcciones]*Recta perpendicular*.
- Seleccionando un vértice (aparece el mensaje: **Por este punto**) y un lado (aparece el mensaje: **Perpendicular a este lado del triángulo**) se hace un clic y aparece dibujada la recta perpendicular.

Trazar un punto de intersección

- Seleccione [Puntos]*Puntos(s) de intersección*.
- Seleccione dos objetos que se cortan; en este caso, la recta perpendicular y el lado al cual es perpendicular. Le damos a este punto un nombre (por ejemplo, D).
- La herramienta [Líneas]*Segmento* crea un segmento entre dos puntos dados.
- Seleccione [Líneas]*Segmento*, sitúe el cursor sobre el primer punto, haga clic sobre el botón izquierdo del mouse y desplace hasta el otro extremo pulsando de nuevo el botón izquierdo del mouse.

Ocultar la parte del dibujo que no interesa mostrar

La herramienta [Atributos]*Ocultar/Mostrar* oculta todos los objetos seleccionados ,así como las etiquetas y medidas que los acompañan. Al ocultar los objetos, no se modifica ninguno de los atributos ni el papel geométrico que desempeñan en una construcción (no es lo mismo que borrar).

- Seleccione [Atributos]*Ocultar/Mostrar*.
- Seleccione el objeto que desea ocultar; en este caso, la parte de la recta perpendicular fuera del triángulo.

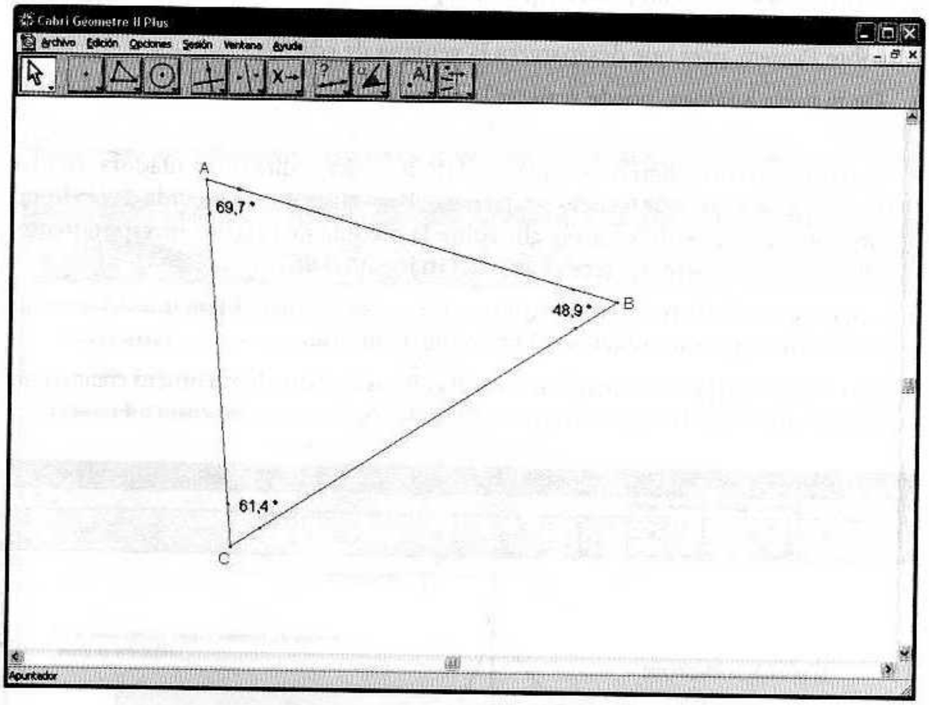
- Seleccione un objeto oculto para que sea visible de nuevo.
- Al hacer clic sobre [Manipulación]*Puntero*, desaparecen los objetos ocultos.

Nota: Los objetos ocultos se muestran con un contorno punteado cuando la herramienta [Atributos]*Ocultar/Mostrar* está activa.

Marcación de un ángulo

- Seleccione [Texto y símbolo]*Marcar un ángulo*.
- Especifique el ángulo seleccionando tres puntos. El segundo punto debe ser el vértice.
- Repita con cada uno de los ángulos del triángulo *ABC*.

Nota: Para medir un ángulo, sólo tiene que seleccionar el ángulo marcado con la herramienta [Medida]*Ángulo*.

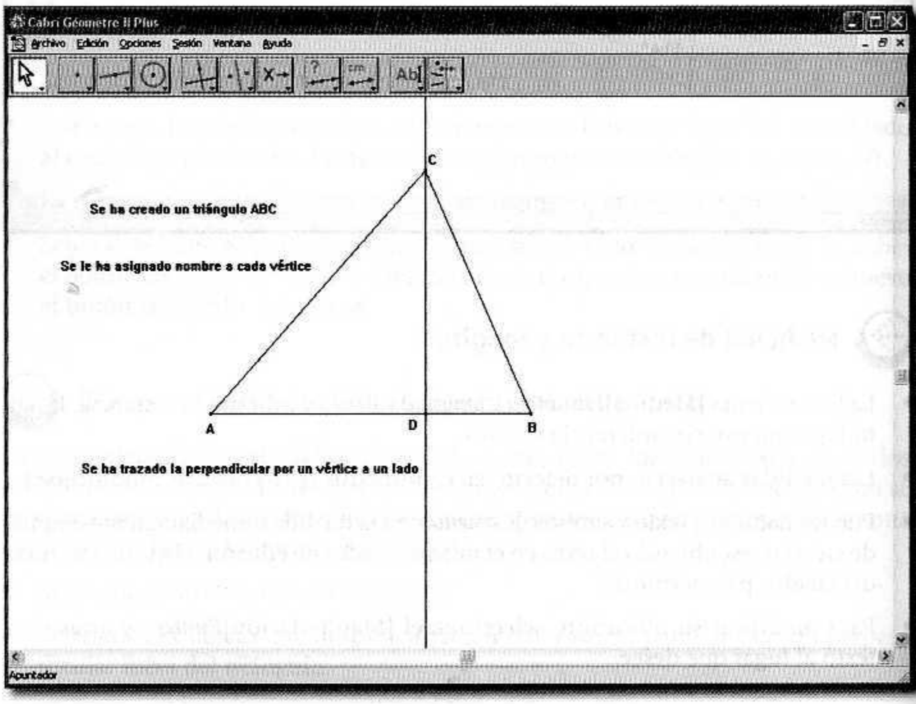


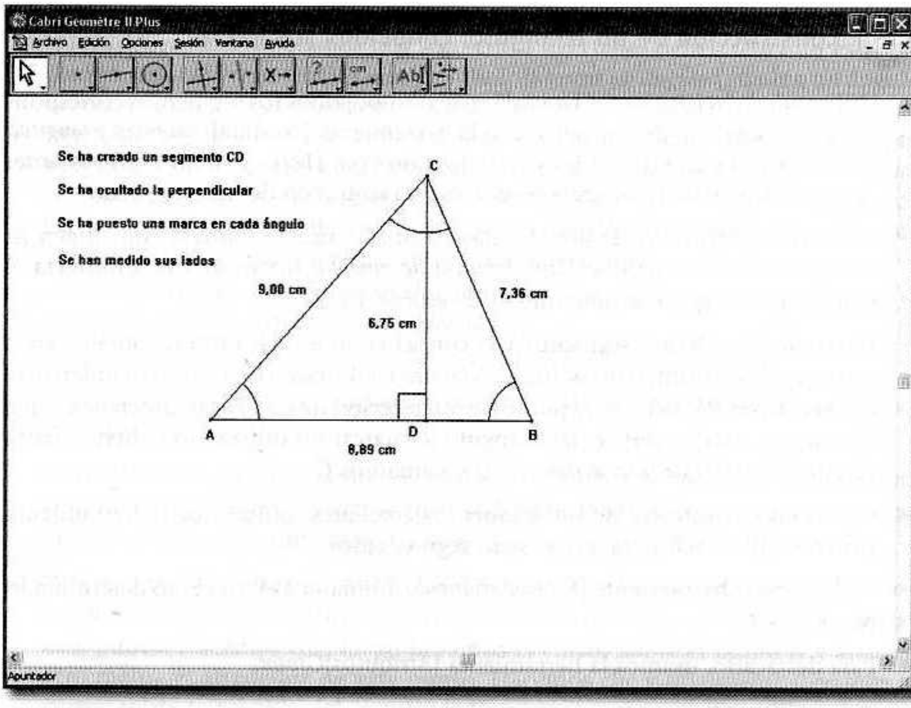
Medición de distancia y longitud

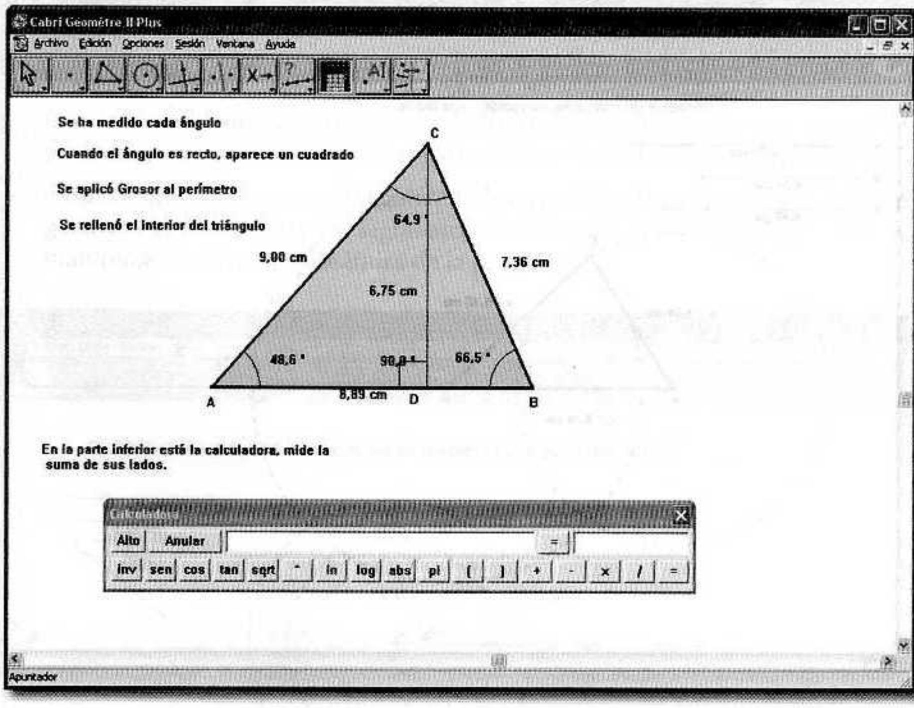
- La herramienta [Medida]*Distancia y longitud* calcula y muestra la distancia, longitud, perímetro, circunferencia y radio.
- Las medidas aparecen, por defecto, en centímetros (pero pueden modificarse).
- Puede añadir un [Texto y símbolo]*Comentario* a la medida inmediatamente después de crearlas, escribiendo el texto en el mismo cuadro de edición. Haga un clic fuera del cuadro para terminar.
- Para modificar su ubicación, seleccione el [Manipulación]*Puntero* y arrastre el texto al lugar que desee.

Calcular

- La herramienta [Medida]*Calculadora* abre una calculadora en la parte inferior de la pantalla.
- Los valores se introducen en la ventana de edición (donde parpadea el cursor).
- Haga clic sobre la medida de uno de los lados del triángulo: aparece **a** en la ventana de edición. A continuación haga clic sobre la tecla suma (+), ubique el cursor sobre la medida del segundo lado, haga nuevamente clic y aparece **b** en la ventana de edición. Nuevamente presione (+) y haga clic sobre el tercer lado: aparece **c**. Para obtener el resultado de la operación, presione la tecla igual (=). En la ventana de la derecha aparece el resultado de la suma.
- Puede arrastrar este resultado fuera de la calculadora y ubicarlo en cualquier lugar de la ventana de *Cabri*®. El número aparece acompañado de la palabra **Resultado**.
- Si presiona sobre [Manipulación]*Puntero*, puede hacer doble clic sobre el resultado anterior y modificar su texto, por ejemplo: **Perímetro** = y hacer nuevamente clic sobre *Puntero*, para que desaparezca la ventana de edición.
- De manera análoga, puede realizar la suma de los ángulos interiores del triángulo.
- Otro cálculo con la herramienta [Medida]*Calculadora*. Abra la calculadora, escriba 0,5 y haga clic sobre la tecla x (por). Luego, haga clic sobre la medida de la altura, presione nuevamente x y haga clic sobre la medida de la base correspondiente; ahora presione (=) y aparece el área del triángulo ABC.
- Además, con la herramienta [Atributos]*Grosor* se cambia el tamaño del trazado de las líneas para los objetos sobre los que se aplica.
- Con [Atributos]*Rellenar* se rellena con el color seleccionado un objeto creado con las herramientas *Triángulo, Polígono, Polígono regular, Circunferencia o Etiqueta*.

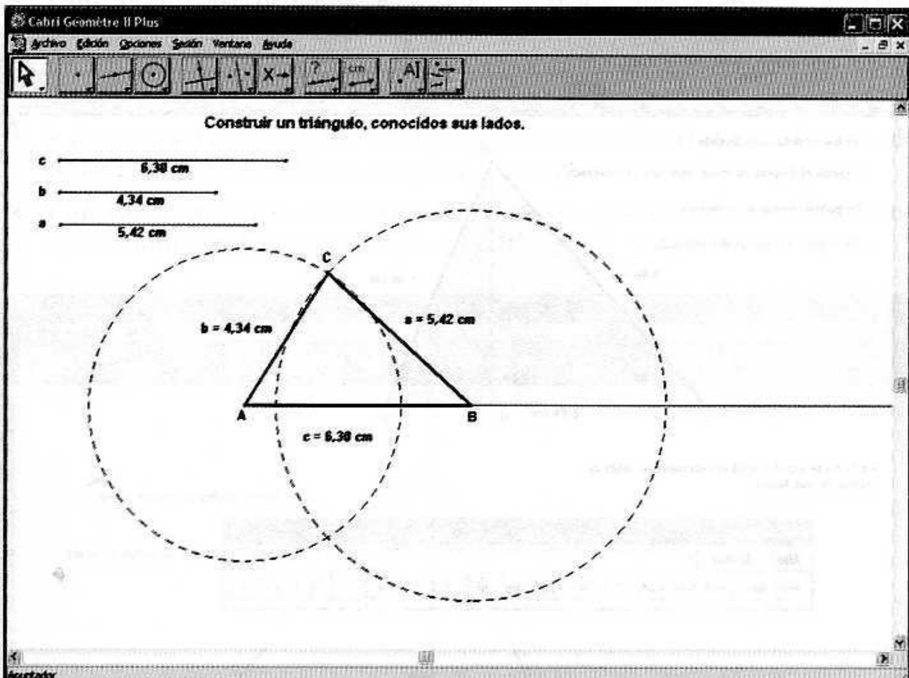



Cabri Géomètre II Plus
Archivo Edición Opciones Sesión Ventana Ayuda
Se ha creado un segmento CD
Se ha ocultado la perpendicular
Se ha puesto una marca en cada ángulo
Se han medido sus lados
C
9,00 cm
7,36 cm
6,75 cm
A
D
B
8,89 cm
Apuntador


Cabri Géomètre II Plus
Archivo Edición Opciones Sesión Ventana Ayuda
Se ha medido cada ángulo
Cuando el ángulo es recto, aparece un cuadrado
Se aplicó Grosor al perímetro
Se rellenó el interior del triángulo
C
64,9 °
9,00 cm
7,36 cm
6,75 cm
48,6 °
90,0 °
66,5 °
8,89 cm
A
D
B
En la parte inferior está la calculadora, mide la suma de sus lados.
Calculadora
Alto
Anular
inv
sen
cos
tan
sqrt
ln
log
abs
pi
Apuntador

Construcción de un triángulo, conocidos sus lados

- Utilizando la herramienta [Líneas]*Segmento* dibujamos los segmentos correspondientes a cada uno de los lados; con la herramienta [medida]*Distancia y longitud* medimos cada uno de ellos y con la herramienta [Texto y símbolo]*Comentarios* ponemos una letra minúscula en el extremo izquierdo de cada segmento.
- La construcción la iniciamos dibujando una [Líneas]*Semirrecta* con origen A. Utilizando [Construcciones]*Transferencia de medidas* llevamos a la semirrecta el segmento *c*, lo que nos determina los vértices *A* y *B*.
- Tomando como base el segmento *AB* y con la herramienta [Construcciones]*Compás*, trazamos dos circunferencias, una con centro en *A* y radio ***b*** y la otra circunferencia con centro en ***B*** y radio ***a***. El punto de intersección de las dos circunferencias que determina el tercer vértice del triángulo lo marcamos utilizando la herramienta [Puntos]*Punto(s) de intersección*, al cual llamamos *C*.
- Como las circunferencias son elementos auxiliares, utilizamos la herramienta [Atributos]*Punteado* para que se vean segmentados.
- Utilizando la herramienta [Líneas]*Triángulo* dibujamos el triángulo determinado por *A*, *B* y *C*.
- Para destacarlo, usamos la herramienta [Atributos]*Grosor*.



Construcción de un triángulo ABC, a partir de dos de sus lados y el ángulo comprendido

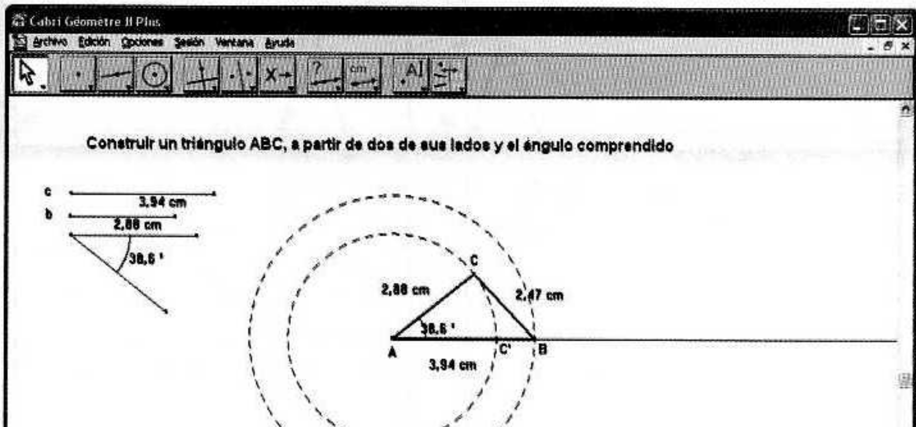
- Nos piden dibujar un triángulo *ABC*, de modo que $AB = c$, $AC = b$ y el ángulo en *A* es dado.
- Dibujados los segmentos *c* y *b*. Con la herramienta [Medida]*Distancia y longitud* los medimos y con [Texto y símbolo]*Etiqueta* les ponemos nombres.

Para crear el ángulo, efectuamos los siguientes pasos: con la herramienta [Líneas]*Segmento*, dibujamos dos segmentos los cuales deben tener un extremo común, con la herramienta [Texto y símbolo]*Marcar un ángulo* (añade a un ángulo un pequeño arco de circunferencia que determina su amplitud), le colocamos una marca de ángulo, haciendo clic en tres de sus puntos, siendo el segundo punto el vértice. Con la herramienta [Medida]*Medida de ángulo*, haciendo un clic sobre la marca del ángulo, aparece un cuadro de edición con la medida en grados de dicho ángulo, nuevamente, haciendo clic en cualquier punto fuera del cuadro de edición, éste desaparece y permanece la medida angular.

Es interesante observar que si se arrastra un extremo de los trazos que forman el ángulo, la medida del ángulo va cambiando.

Tenemos todos los datos y procedemos a dibujar el triángulo ABC.

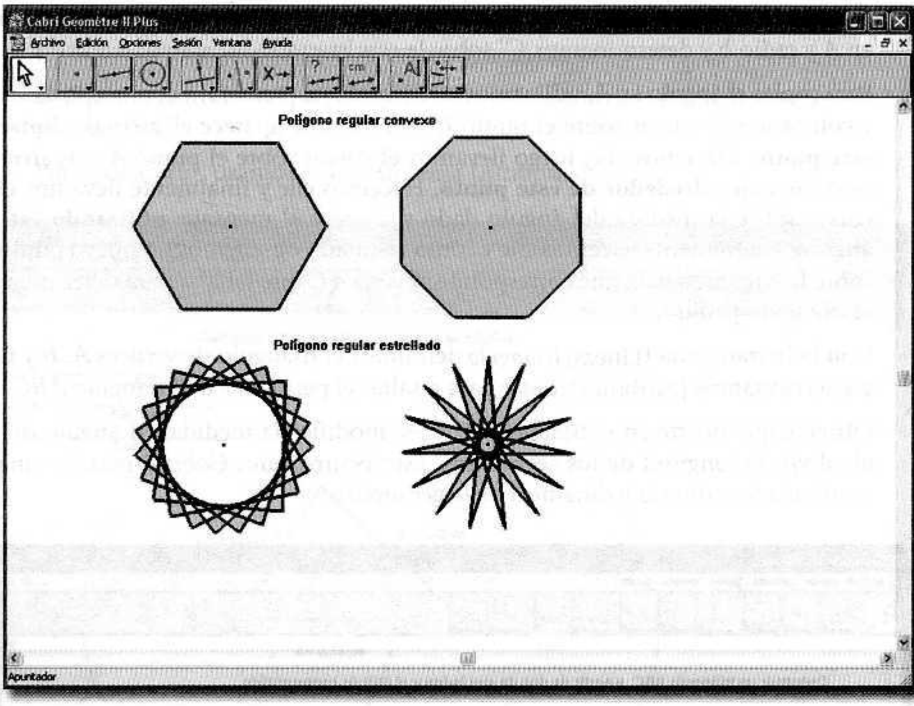
- Trazamos una semirrecta de origen *A*, que servirá de base para trasladar las distintas medidas.
- Con la herramienta [Construcciones]*Compás* dibujamos dos circunferencias, una con centro en *A* y radio *c* y determinamos *B* sobre la semirrecta. La otra con centro en *A* y radio *b* y determinamos *C'* sobre la semirrecta.
- Para copiar el ángulo en *A*, utilizamos la herramienta [Transformaciones]*Rotación* y colocamos el cursor sobre el punto *C'*, con lo que aparece el mensaje: **Rotar este punto**. Hacemos clic, luego llevamos el cursor sobre el punto *A* y aparece otro mensaje: **alrededor de este punto**. Hacemos clic y finalmente llevamos el cursor sobre la medida del ángulo dado y aparece el mensaje: **utilizando este ángulo**. Nuevamente hacemos clic y como resultado obtenemos un nuevo punto sobre la circunferencia que corresponde al vértice *C* que faltaba para determinar el triángulo pedido.
- Con la herramienta [Líneas]*Triángulo* definimos el triángulo de vértices *A*, *B* y *C* y seleccionamos [Atributos]*Grosor* para resaltar el perímetro del triángulo *ABC*.
- Observe qué ocurre en el triángulo *ABC*, si modifica la medida del ángulo original y/o la longitud de los segmentos. Esto ocurre, pues *Cabri*® permite una manipulación directa y dinámica de la geometría.



Construcción de un polígono regular

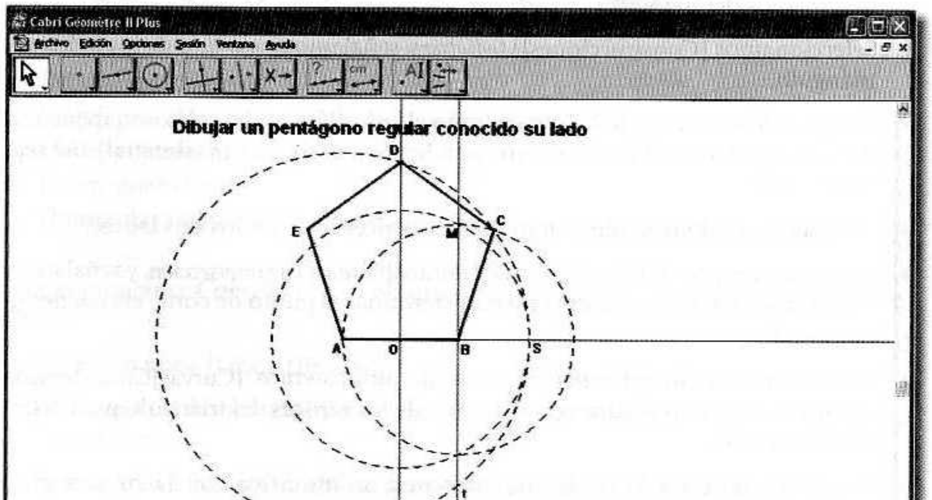
- Seleccione [Líneas]*Polígono regular.*
- Haga clic en el lugar en que desea crear o seleccionar el centro.
- Desplace el cursor del centro y haga clic para especificar el radio de un polígono regular. Al centro de la figura aparece una cifra que indica el número de lados que tendrá.
- Para crear un polígono regular convexo, mueva el cursor en el sentido de las agujas del reloj desde su posición actual; el número al centro irá cambiando hasta el número de lados que usted desea.

  Para crear un polígono regular en forma de estrella, mueva el cursor en el sentido contrario a las agujas del reloj y haga clic cuando el polígono regular tenga el tamaño deseado.



Construcción de un pentágono regular a partir de un lado

- Sea *AB* el segmento que corresponde al lado del pentágono.
- Con origen en *A* trazamos la semirrecta que contiene al segmento *AB*.
- Trazamos por el punto *B* la recta *t* perpendicular a la semirrecta anterior.
- Por el punto medio *O* del segmento *AB* trazamos la recta perpendicular al segmento.
- Con centro en el punto *B* y radio *AB* se dibuja una circunferencia que corta a la recta *t* en dos puntos. Sea *M* el punto que se encuentra por encima del segmento *AB*.
- Con centro en el punto *O* y radio *OM* se traza la circunferencia que corta en el punto *S* a la semirrecta que contiene al segmento *AB*.
- Con centro en el punto *A* y radio *AS* se traza una nueva circunferencia que corta en el punto *C* a la circunferencia obtenida en el paso anterior y que corta en el punto *D* a la recta perpendicular al segmento *AB* trazada por el punto *O* (ambos puntos situados por encima del segmento *AB*).
- Dibujamos el simétrico que llamamos *E*, del punto *C* respecto de la perpendicular en O; para ello utilizamos la herramienta [Transformaciones]*Simetría axial*.
- Los puntos *A, B, C, D* y *E* son los vértices del pentágono solicitado.
- Utilizando la herramienta [Líneas]*Polígono* definimos el pentágono regular de lado *AB*.



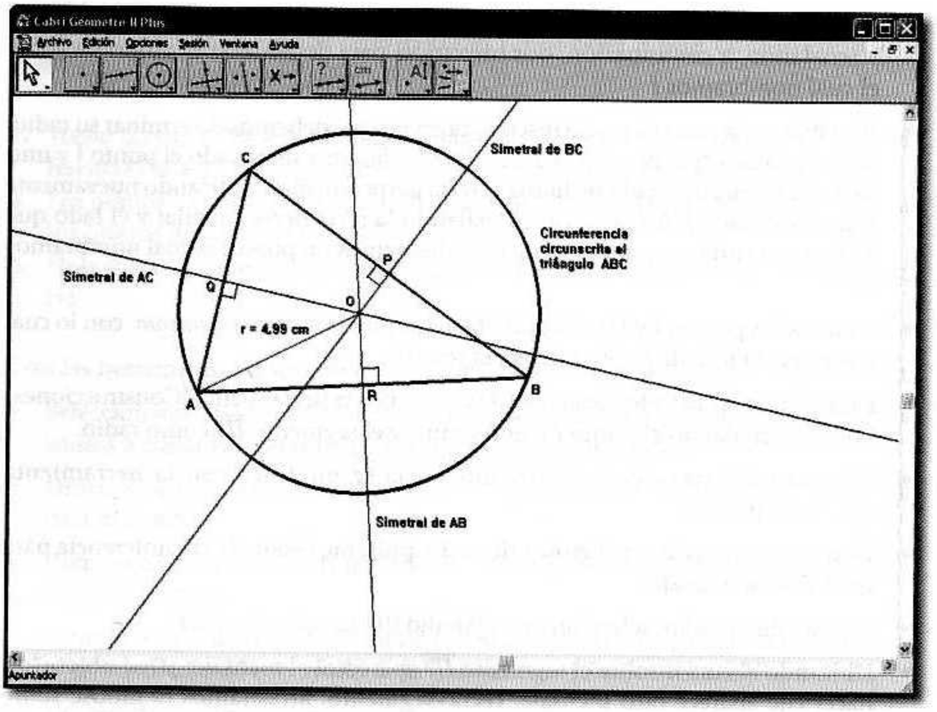
Construcción de la circunferencia circunscrita a un triángulo. Medición de la longitud del radio

El proceso consta de los pasos siguientes:

1. Dibujar un triángulo.
2. Dibujar las mediatrices (simetrales) del triángulo.
3. Hallar el circuncentro.
4. Dibujar la circunferencia circunscrita.

Con el programa *Cabri®*, los pasos anteriores se realizan a través de las siguientes tareas:

- Seleccionamos [Líneas]*Triángulo*.
- Aparecerá el cursor en forma de lápiz para marcar los puntos correspondientes a los vértices.
- El triángulo se puede modificar señalando sobre cualquiera de los vértices.
- Aparecerá el mensaje **Este punto**, el que para desplazarlo a nueva posición se arrastrará manteniendo pulsado el botón izquierdo del mouse.
- Para asignar un nombre a cada vértice se utilizará [Texto y símbolo]*Etiqueta* marcando cada uno de los vértices y escribiendo el nombre que se les asigna.
- Para cambiar de posición una etiqueta batará con seleccionar la herramienta [Manipulación]*Puntero* y arrastrar la etiqueta (el cursor cambia de forma a una mano abierta) a la posición deseada.
- Para obtener el circuncentro dibujamos las mediatrices (simetrales) de cada uno de los lados del triángulo.
- Seleccionamos [Construcciones]*Mediatriz* y señalamos cada uno de los lados del triángulo.
- Después de señalar un lado, por ejemplo el lado *BC*, y pulsar el botón izquierdo del mouse, aparecerá la recta correspondiente a la mediatriz (simetral) del segmento *BC*.
- De manera análoga se obtendrán las mediatrices de los otros dos lados.
- El circuncentro se obtiene utilizando [Puntos]*Punto(s) de intersección*, y señalando, a continuación, dos mediatrices para determinar el punto de corte, el cual designamos *O*.
- Para dibujar la circunferencia circunscrita, utilizaremos [Curvas]*Circunferencia* señalando el punto *O* como centro y uno de los vértices del triángulo para determinar el radio.
- El grosor del trazado de la circunferencia se modifica con la herramienta [Atributos]*Grosor*.
- Después de seleccionar el grosor deseado, pulsamos sobre la circunferencia para modificar su trazado.
- Para medir el radio, seleccionamos [Medida]*Distancia y longitud*.
- Señalamos a continuación los puntos extremos del segmento que deseamos medir, marcamos uno de los vértices del triángulo, y al hacerlo sobre el punto *O* aparece el mensaje: **¿Qué objeto?** Haciendo clic se muestra un listado con varios puntos y al hacer clic sobre cualquiera de ellos obtenemos el número que corresponde a la medida del radio de la circunferencia circunscrita.



Construcción de la circunferencia inscrita en un triángulo. Medición de la longitud de su radio, perímetro y área

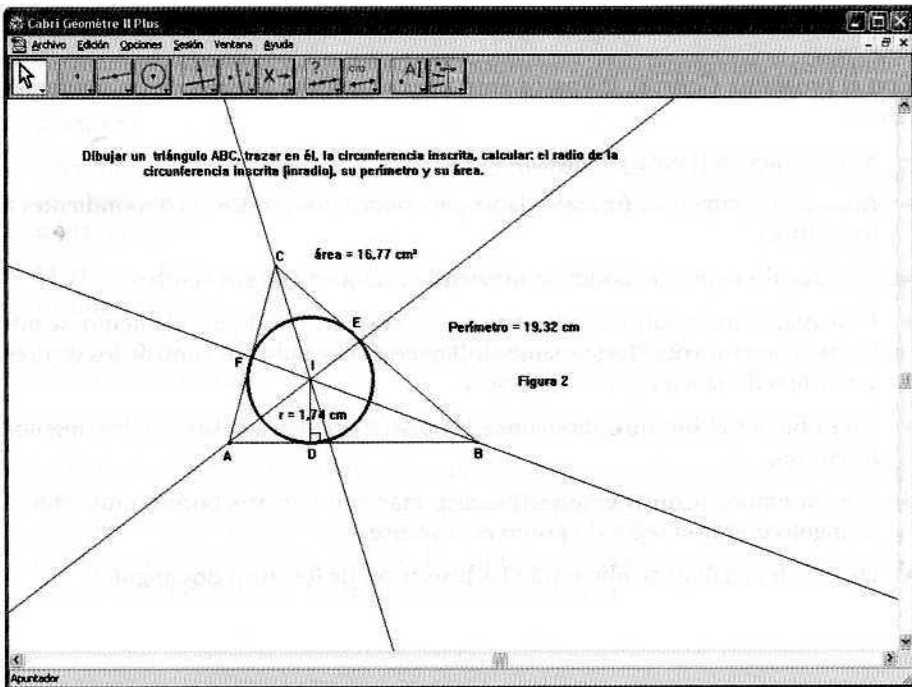
El proceso consta de los pasos siguientes:

1. Dibujar un triángulo.
2. Dibujar las bisectrices de sus ángulos interiores.
3. Hallar el incentro.
4. Determinar el radio.
5. Dibujar la circunferencia inscrita al triángulo.

Con el programa *Cabri®*, los pasos anteriores se realizan a través de las siguientes tareas:

- Seleccionamos [Líneas]*Triángulo.*
- Aparecerá el cursor en forma de lápiz para marcar los puntos correspondientes a los vértices.
- El triángulo se puede modificar moviendo cualquiera de sus vértices.
- Para asignar un nombre a cada vértice y, en general, a cualquier elemento, se utilizará la herramienta [Texto y símbolo]*Etiqueta* marcando cada uno de los vértices y escribiendo la letra que se les asigna.
- Para obtener el incentro dibujamos las bisectrices de cada uno de los ángulos interiores.
- Seleccionamos [Construcciones]*Bisectriz,* marcando los tres puntos que definen el ángulo donde el segundo punto es el vértice.
- De manera análoga se obtendrán las bisectrices de los otros dos ángulos.

- El incentro se obtiene utilizando la herramienta [Puntos]*Punto(s) de intersección* y señalando, a continuación, dos bisectrices para determinar el punto de corte, el cual nombramos *I*.
- Para dibujar la circunferencia inscrita, previamente debemos determinar su radio. Seleccionamos [Construcciones]*Recta perpendicular* y marcando el punto I y uno de los lados del triángulo se dibuja la recta perpendicular. Utilizando nuevamente [Puntos]*Puntos(s) de intersección*, señalando la recta perpendicular y el lado que dicha recta corta perpendicularmente, obtenemos un punto, el cual nombramos *D*.
- Unimos los puntos *I* y *D* utilizando la herramienta [Líneas]*Segmento*, con lo cual tenemos el radio de la circunferencia inscrita.
- Para dibujar la circunferencia inscrita utilizamos la herramienta [Construcciones] *Compás*, señalando el punto *I* como centro y el segmento $\overline{ID}$ como radio.
- El grosor del trazado de la circunferencia se modifica con la herramienta [Atributos]*Grosor*.
- Después de seleccionar el grosor deseado, pulsamos sobre la circunferencia para modificar su trazado.
- Para medir el radio, seleccionamos [Medida]*Distancia y longitud*.
- Ubicando el cursor sobre el segmento $\overline{ID}$ aparecerá el mensaje: **¿Qué objeto?** Al hacer clic aparece otro mensaje: **recta–segmento**; arrastramos el mouse sobre la palabra segmento y al hacer clic aparecerá un número que corresponde a su longitud en centímetros y anotada dentro de un marco de edición. Haciendo clic en cualquier lugar en blanco de la pantalla, dicho marco desaparece.
- Como tenemos seleccionada [Medición]*Distancia y longitud*, bastará acercar el mouse a uno de los lados del triángulo y aparece el mensaje: **Perímetro de este triángulo**. Haciendo un clic, se muestra un número que corresponde a la suma de los lados del triángulo.
- En estas herramientas, si seleccionamos [Medida]*Área* y llevamos el cursor sobre uno de los lados del triángulo, aparece el valor de su área en centímetros cuadrados.

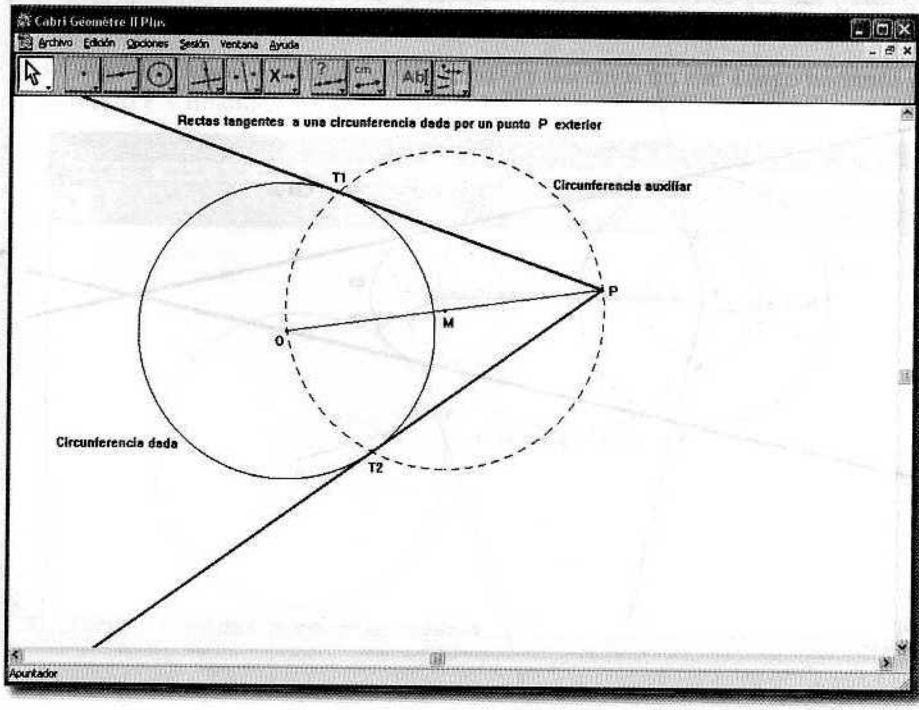


Construcción de las semirrectas tangentes a una circunferencia por un punto exterior

1. Trazar la circunferencia auxiliar de diámetro $\overline{OP}$, siendo O el centro de la circunferencia dada y P el punto exterior por el que se trazarán las tangentes.
2. Los puntos de corte de esta circunferencia auxiliar con la circunferencia dada son los puntos de tangencia.
3. Unir P con los puntos de tangencia para obtener las tangentes a la circunferencia.

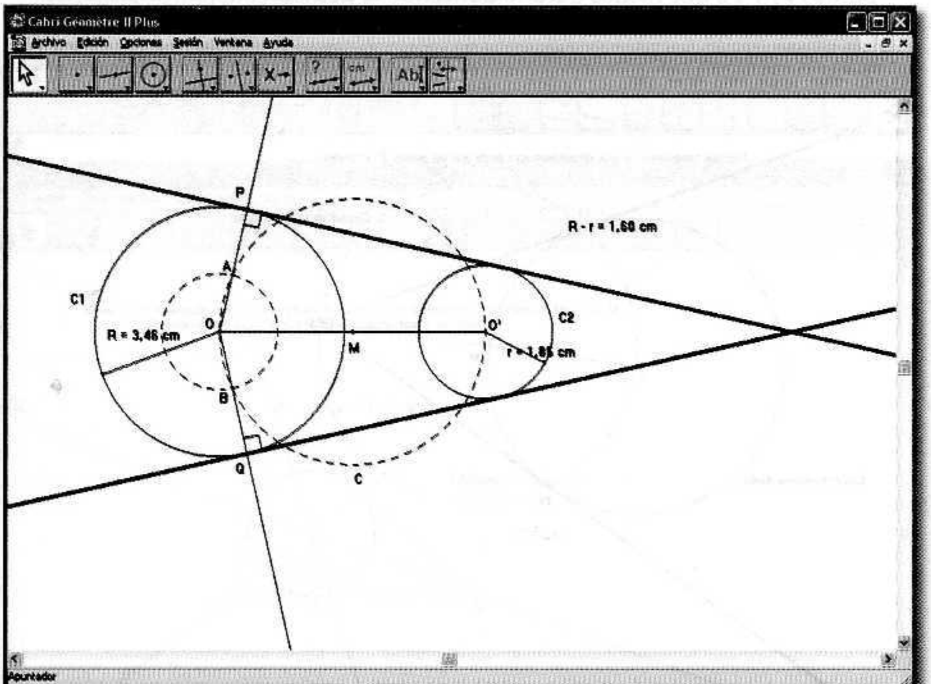
Con las herramientas disponibles en *Cabri®* realizamos la siguiente construcción:

- Seleccionamos [Curvas]*Circunferencia* para dibujar la circunferencia sobre la que vamos a trazar las rectas tangentes, cuyo centro llamamos O.
- Utilizamos la herramienta [Puntos]*Punto* para marcar el punto P exterior a la circunferencia.
- Para asignar nombre a cada uno de los puntos, utilizamos la herramienta [Texto y símbolo]*Etiqueta*.
- Unimos los puntos P y O utilizando la herramienta [Líneas]*Segmento* y obtenemos el punto medio M con ayuda de la herramienta [Construcciones]*Punto medio*.
- Utilizando de nuevo la herramienta [Curvas]*Circunferencia*, trazamos una circunferencia auxiliar con centro en M y radio $\overline{MP}$.
- Para determinar los puntos de intersección, que llamamos T_1 y T_2, de las dos circunferencias utilizamos la herramienta [Puntos]*Punto(s) de intersección*.
- Las semirrectas tangentes corresponden a las rectas que pasan por el punto P y por los puntos T_1 y T_2, que hemos trazado utilizando la herramienta [Líneas]*Semirrecta*.



Construcción de las rectas tangentes exteriores a dos circunferencias exteriores

- En primer lugar, dibujamos las dos circunferencias C_1 y C_2, de centros O y O', con radios R y r, respectivamente.
- A continuación definimos el punto medio M del segmento OO'.
- Trazamos una circunferencia C con centro en el punto M y como radio el segmento OM.
- Con centro en el punto O (centro de la circunferencia mayor) y radio igual al valor $R - r$, trazamos una nueva circunferencia.
- Para hallar la diferencia de los radios utilizaremos la [Medida]*Calculadora*.
- Medimos los radios de cada una de las circunferencias, calculamos su diferencia y llevamos el resultado a la ventana de trabajo.
- Este resultado se utilizará como valor para realizar la transferencia de medidas del radio que necesitamos para la nueva circunferencia.
- Determinamos los puntos A y B de corte de esta circunferencia con la circunferencia C, y buscamos los puntos de corte de las semirrectas OA y OB con la circunferencia C_1, que llamamos P y Q.
- Los puntos P y Q son los puntos de tangencia en la circunferencia C_1.
- Las rectas tangentes serán las rectas perpendiculares a las semirrectas OA y OB por los puntos de tangencia P y Q, respectivamente.
  (En el ejemplo se muestra la calculadora que se obtiene al seleccionar la herramienta [Medida]*Calculadora*).



Construcción de la recta tangente a una circunferencia por un punto que pertenezca a la circunferencia

El proceso consta de los pasos siguientes:

1. Dibujar la circunferencia.
2. Determinar el punto por el que se trazará la recta tangente.
3. Unir el centro con el punto anterior.
4. Trazar la perpendicular a la recta anterior que pase por el punto de tangencia.

Con el programa *Cabri*® realizamos los siguientes pasos:

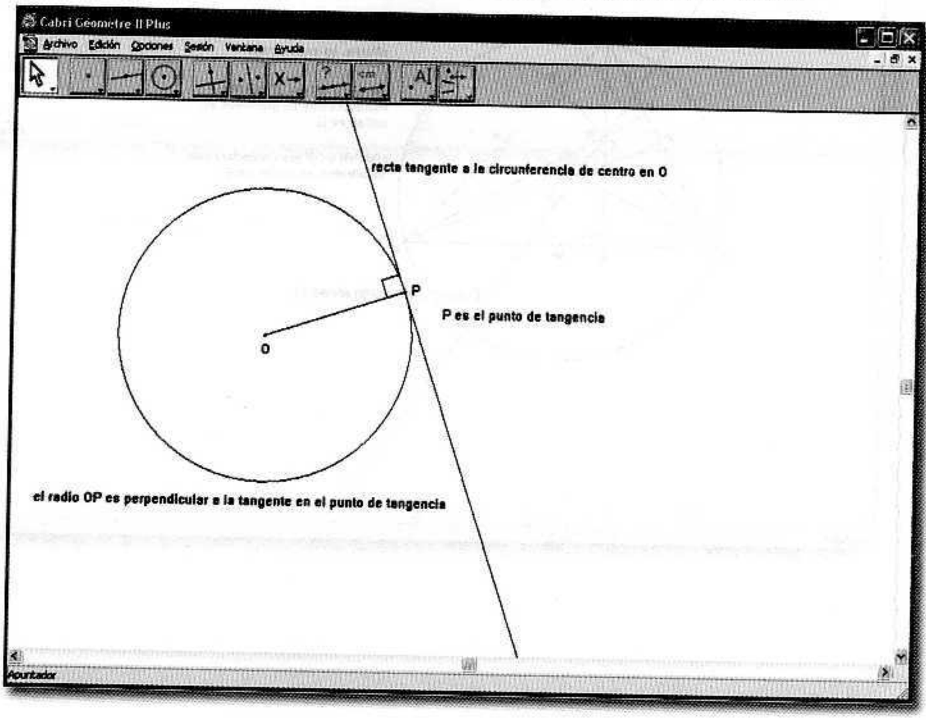
- Seleccionar [Curvas]*Circunferencia*. Luego, situar el cursor (que tiene forma de lápiz) en la posición deseada y pulsar el botón izquierdo del mouse para señalar el centro de la circunferencia. Desplazar el cursor hasta obtener el tamaño deseado para la circunferencia.
- Para marcar el punto de tangencia en el círculo, elegimos la opción [Puntos]*Punto sobre el objeto*. Al situar el cursor sobre la circunferencia aparecerá el mensaje: **En esta circunferencia**. Hacer clic sobre el botón izquierdo para marcar un punto. Aparecerá un punto en la circunferencia.
- Elegir la opción [Líneas]*Segmento* para dibujar el segmento que une el centro de la circunferencia con el punto de tangencia. Debemos señalar los dos extremos del segmento. Situar el cursor sobre un punto, pulsar el botón izquierdo del mouse y desplazar hasta el otro extremo pulsando de nuevo el botón izquierdo del mouse.

Para dibujar la recta tangente:

- Seleccionar la herramienta [Construcciones]*Recta perpendicular*.
- Señalar el segmento y el punto por el que trazaremos la recta perpendicular.
- Al pulsar el botón izquierdo del mouse aparecerá la recta tangente por un punto de la circunferencia.

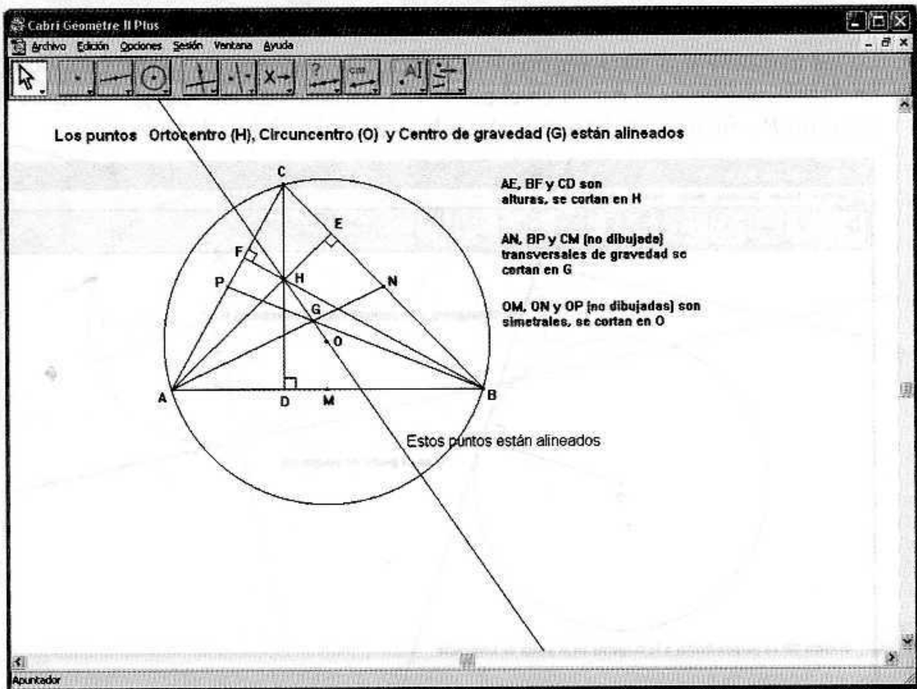
Dibujemos una marca para el ángulo recto:

- En las herramientas, para ver una construcción seleccionamos [texto y símbolo] *Marcar un ángulo*, ubicamos el cursor en el punto *O* y hacemos un clic. Luego hacemos clic sobre el punto *P* y finalmente hacemos clic sobre cualquier punto de la recta.



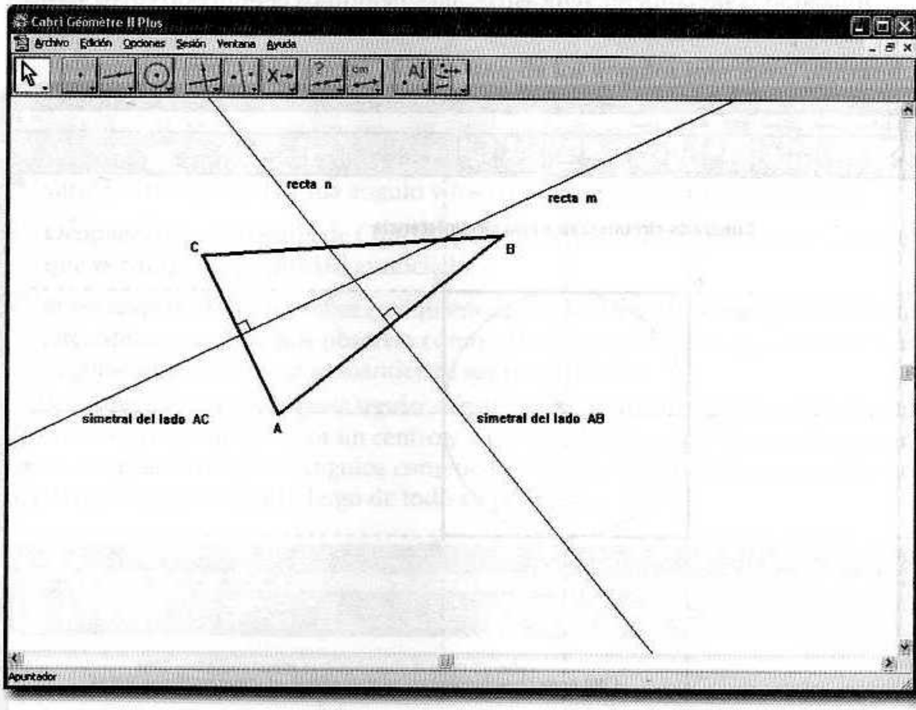
Comprobación de que el ortocentro, el centro de gravedad (baricentro) y el circuncentro de un triángulo están alineados

- Una vez dibujado el triángulo, con la herramienta [Construcciones]*Recta perpendicular* trazamos las alturas (bastaría trazar dos de ellas) para obtener el ortocentro.
- Con la herramienta [Construcciones]*Mediatriz* trazamos las mediatrices (simetrales) del triángulo (bastaría dibujar dos de ellas).
- Marcamos a continuación el circuncentro que será el punto de intersección de las mediatrices (simetrales).
- Con la herramienta [Líneas]*Recta* dibujamos las transversales de gravedad, que son las rectas que pasan por el punto medio de un lado y por el vértice opuesto (bastaría dibujar dos de ellas).
- Con la herramienta [Puntos]*Punto(s) de intersección* definimos el centro de gravedad (baricentro).
- En la siguiente figura observamos el ortocentro *H*, circuncentro *O* y el centro de gravedad *G*, obtenidos a partir de las alturas, de las simetrales (mediatrices) y de las transversales de gravedad, respectivamente.
- Para comprobar si están alineados los tres puntos anteriores podemos emplear la herramienta [Propiedades]*Alineados*.
- Después de señalar los puntos *H*, *G* y *O*, aparece un cuadro de comentarios que ratifica la propiedad de alineación (**Estos puntos están alineados**) como comprobamos en la figura siguiente.
- Se puede trazar una recta que contendrá a estos tres puntos.



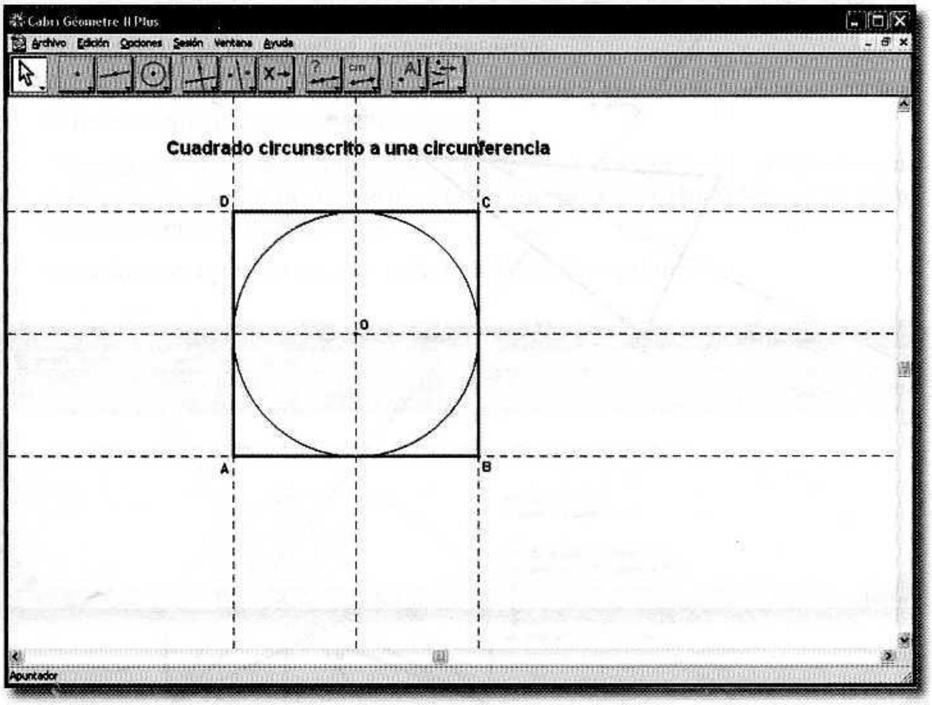
Construcción del triángulo sabiendo que las rectas m y n son las simetrales del triángulo ABC y el punto A es uno de sus vértices.

- Para determinar los vértices B y C del triángulo bastará con dibujar el punto simétrico del vértice A respecto de cada una de las mediatrices (simetrales).
- Utilizando la herramienta [Transformaciones]*Simetría axial*, ubicamos el cursor sobre el punto A y aparece un mensaje: **Simétrico de este punto**; haciendo un clic nos trasladamos sobre la recta n y se despliega otro mensaje: **con respecto a esta recta**; haciendo un clic se dibuja el punto simétrico de A, respecto de la simetral, que denominamos B. Para el otro vértice realizamos una operación similar y obtenemos el vértice C.
- Con la herramienta [Líneas]*Triángulo* definimos el triángulo buscado.
- Con la herramienta [Atributos]*Grosor* destacamos su aspecto.



Construcción del cuadrado circunscrito a una circunferencia

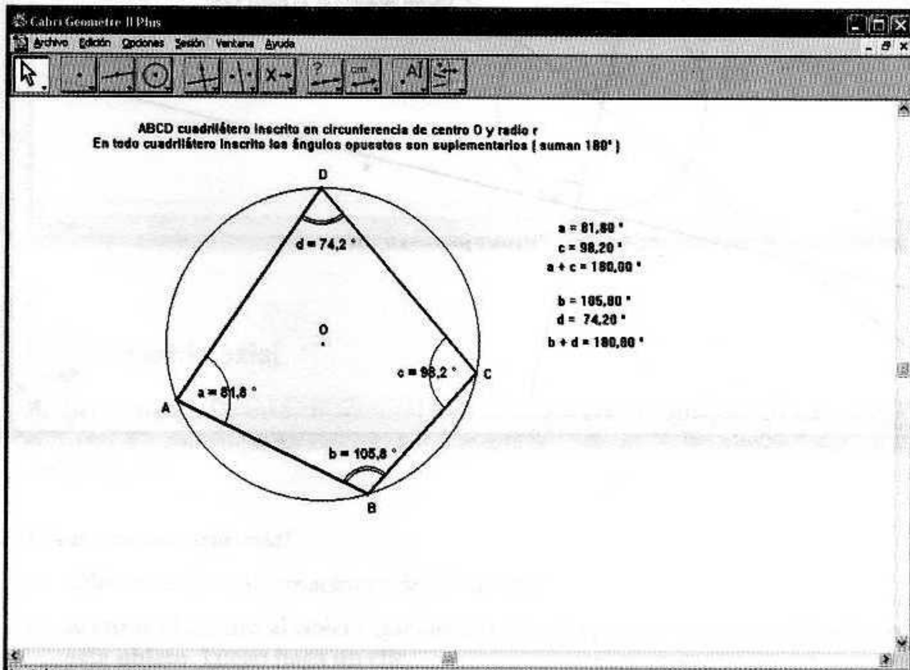
- En primer lugar dibujamos una circunferencia con centro en O.
- Una vez dibujada la circunferencia trazamos dos rectas perpendiculares por O, utilizando las herramientas [Líneas]*Recta* para la primera y [Construcciones]*Recta perpendicular* para la segunda.
- Utilizando la herramienta [Puntos]*Punto(s) de intersección* marcamos los puntos en que las rectas anteriores cortan a la circunferencia.
- A continuación dibujamos rectas perpendiculares a los diámetros por los puntos de intersección con la circunferencia; como son líneas auxiliares, utilizamos la herramienta [Atributos]*Punteado*.
- El cuadrado buscado tiene como vértices los puntos de intersección de las cuatro rectas anteriores, que hemos denominado A, B, C y D.
- Utilizando la herramienta [Líneas]*Polígono*, definimos el polígono cuyos vértices son los puntos anteriores.



Construcción de un cuadrilátero inscrito a una circunferencia

- Dibujamos una circunferencia con centro en *O*.
- Utilizando la herramienta [Líneas]*Polígono*, llevamos el cursor sobre la circunferencia; aparece el mensaje **En esta circunferencia** y hacemos clic. Se determina un punto sobre la circunferencia; arrastramos el mouse a otra posición sobre la circunferencia y se vuelve a repetir lo mismo. Una vez determinados los cuatro puntos, tenemos que arrastrar el mouse al punto inicial para cerrar la figura. Hemos dibujado un cuadrilátero. Podemos dar nombre a cada vértice, los que designaremos por *A*, *B*, *C* y *D*.
- Si hacemos clic sobre el puntero y acercamos el mouse sobre cualquier lado del cuadrilátero, aparece el mensaje **Este polígono**, con lo cual *Cabri®* reconoce que el objeto creado es una figura cerrada.
- Si hacemos clic sobre [Medida]*Distancia y longitud*, y acercamos el mouse sobre uno de los lados, nos muestra el perímetro del cuadrilátero. Si hacemos clic sobre [Medida]*Área*, nos muestra el área del cuadrilátero.
- Volvamos al problema inicial. Si cada uno de los ángulos interiores, utilizando [Texto y símbolo]*Marcar de ángulo* (debemos marcar tres puntos, donde el segundo será el vértice), aparece un arco de circunferencia para cada ángulo. Podemos encontrar su medida en grados ocupando la herramienta [Medida]*Ángulo*. Llevando el mouse sobre cada ángulo y haciendo clic, nos muestra su medida.
- Ocupando la calculadora de *Cabri®*, podemos sumar los ángulos opuestos y ver que se cumple la propiedad enunciada.
- Si colocamos el mouse sobre cualquiera de sus vértices y lo arrastramos sobre la circunferencia, podemos observar cómo cambia la medida de sus lados, de sus ángulos interiores, pero se mantienen sus propiedades.

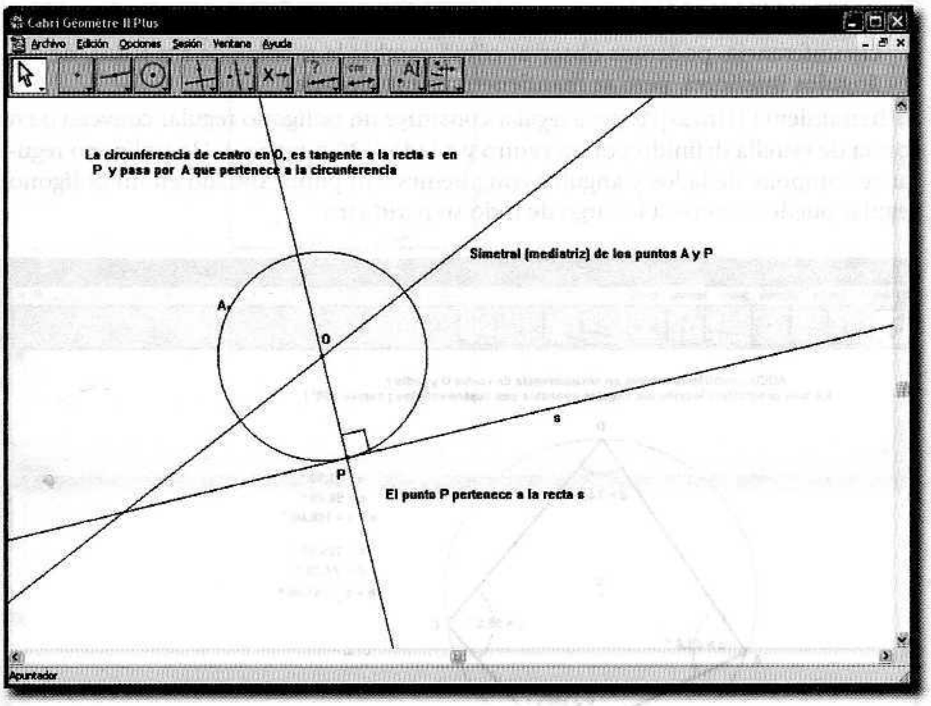
La herramienta [Líneas]*Polígono regular* construye un polígono regular convexo o en forma de estrella definido por un centro y *n* lados (30 o menos). Un polígono regular se compone de lados y ángulos congruentes. Un punto situado en un polígono regular puede moverse a lo largo de todo su perímetro.



Construcción de la circunferencia tangente a la recta en el punto P que pasa por el punto A, sabiendo que P es un punto de una recta y A un punto no perteneciente a la recta

Con *Cabri®*, realizaremos los pasos siguientes:

- Dibujamos una recta *s*, sobre la que ubicamos un punto *P* y creamos un punto *A* no perteneciente a la recta.
- El centro de la circunferencia buscada estará en la mediatriz (simetral) del segmento *PA*, ya que *P* y *A* son puntos de la circunferencia.
- Para trazar dicha mediatriz (simetral) utilizamos la herramienta del mismo nombre.
- No es necesario construir el segmento *PA*, ya que esta herramienta se puede aplicar directamente sobre dos puntos.
- Como la circunferencia es tangente a la recta *s* en el punto *P*, el radio *OP*, siendo *O* el centro de la circunferencia, será perpendicular a la recta (hacemos una marca de ángulo).
- Por tanto, el centro de la circunferencia será el punto de intersección de la recta perpendicular a la recta dada, por el punto *P* y la mediatriz de los puntos *A* y *P*.
- Con la herramienta [Curvas]*Circunferencia* dibujamos la circunferencia que cumple las condiciones exigidas en el enunciado.



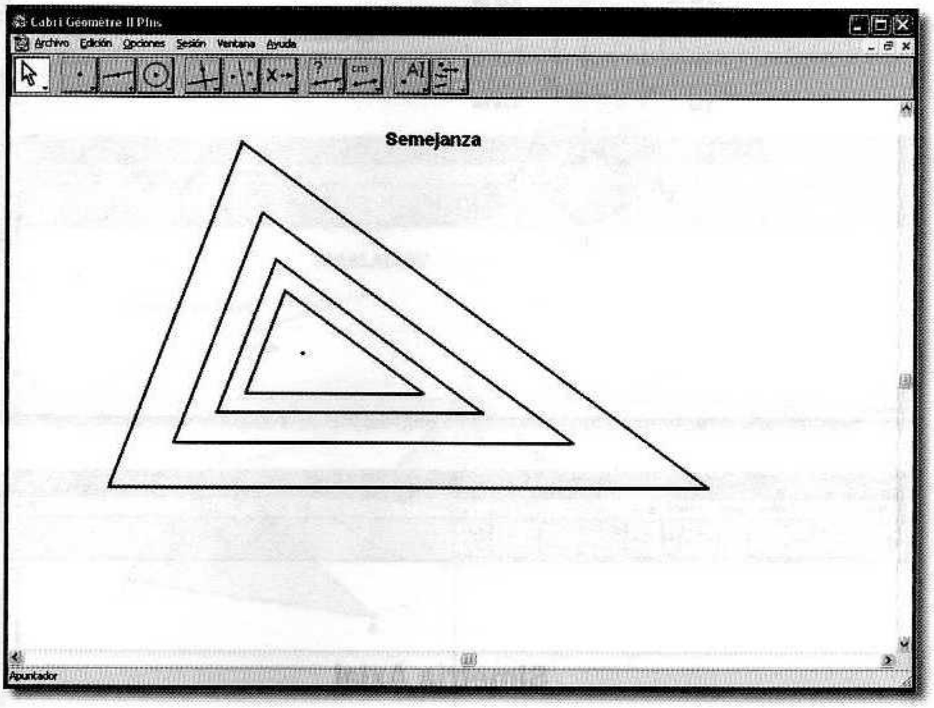
Semejanza

La herramienta [Manipulación]*Semejanza* amplía o reduce a mano alzada un objeto respecto de su centro geométrico o de un punto definido.

Ampliar un objeto

- Seleccione [Manipulación]*Semejanza*.
- **Semejanza con respecto del centro geométrico**: Seleccione un objeto (no un punto) y arrástrelo hacia fuera de su centro para ampliarlo o hacia su centro para contraerlo.
- **Semejanza con respecto de un punto definido**: Seleccione el punto de semejanza que desee y arrastre el objeto (no el punto) con un movimiento lineal.

Nota: En la figura adjunta se ven las distintas posiciones que adquiere el triángulo cuando se le aplica la herramienta [Manipulación]*Semejanza*, pero en la práctica se ve un solo triángulo que cambia de tamaño.



Simetría axial

La herramienta [Transformaciones]*Simetría axial* crea la imagen simétrica de un objeto reflejado respecto de una recta, segmento, vector, semirrecta, eje o lado de un polígono.

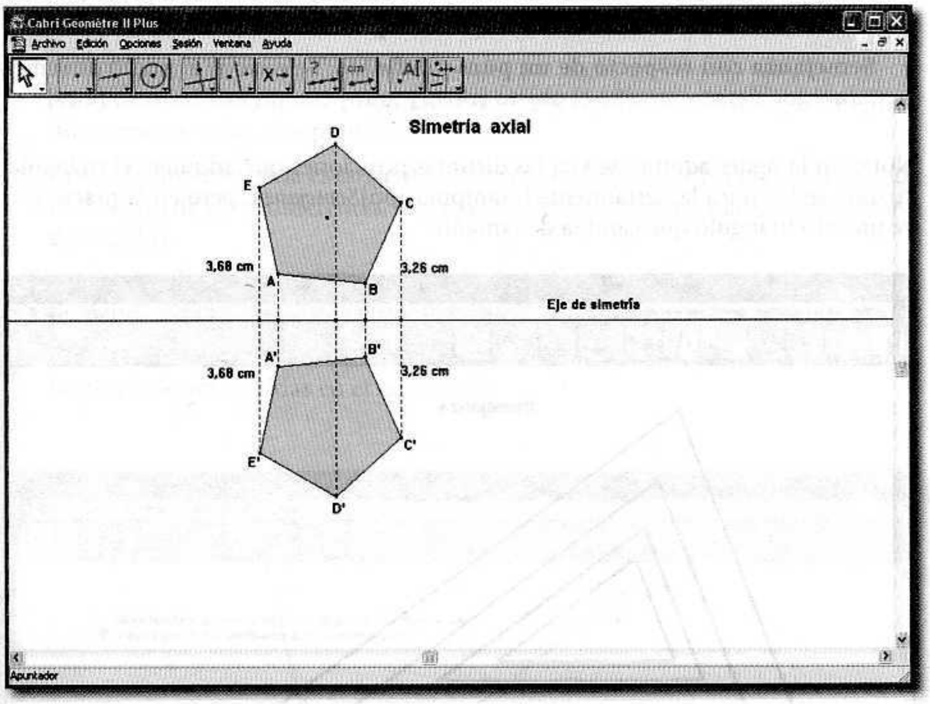
Crear una simetría axial.

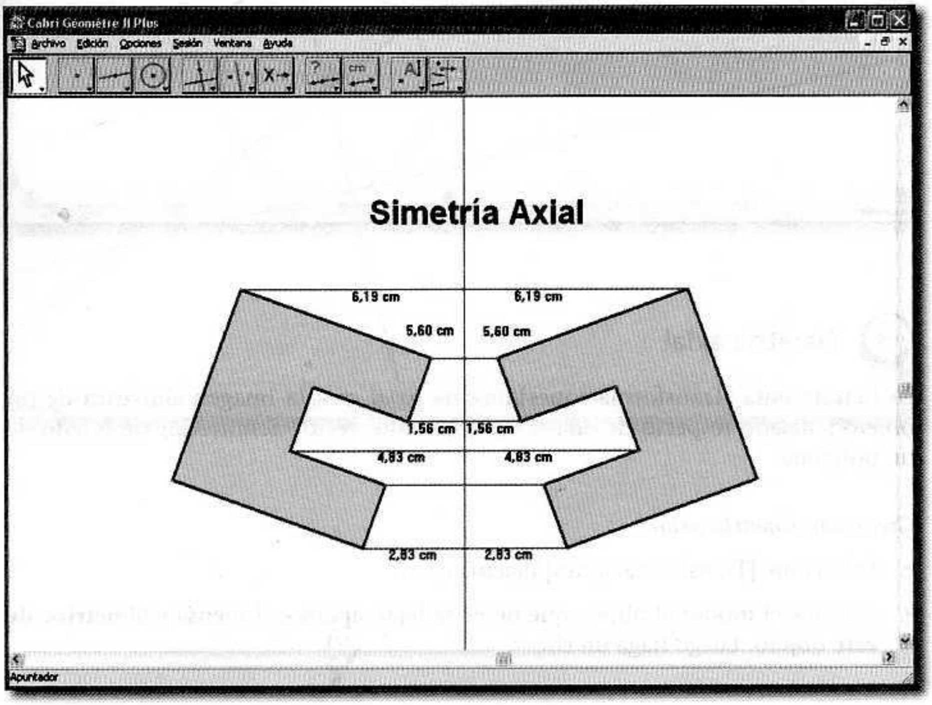
- Seleccione [Transformaciones]*Simetría axial*.
- Acerque el mouse al objeto que desee reflejar; aparece el mensaje **Simétrico de este objeto**. Luego haga un clic.

- Acerque el mouse a la recta, segmento, semirrecta, vector, eje o lado de un polígono respecto del cual vaya a reflejar el objeto aparece el mensaje **con respecto a este objeto**. Luego haga un clic y se creará el objeto reflejado.

Modificar una simetría axial.

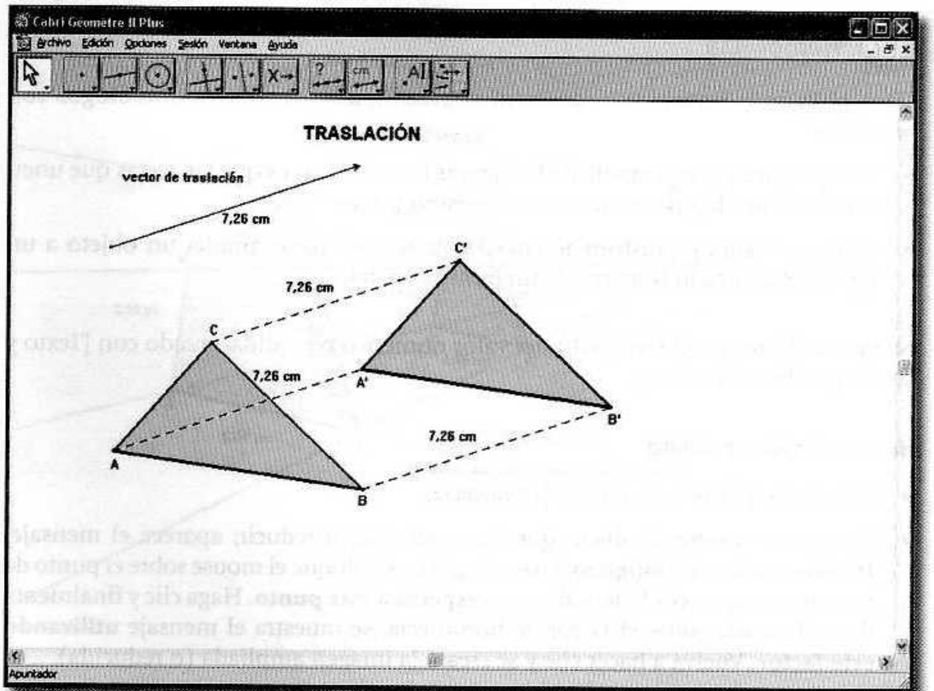
- Cambie la imagen reflejada modificando el objeto original o la recta de simetría. Puesto que se trata de un objeto dependiente, la imagen reflejada no puede modificarse directamente.

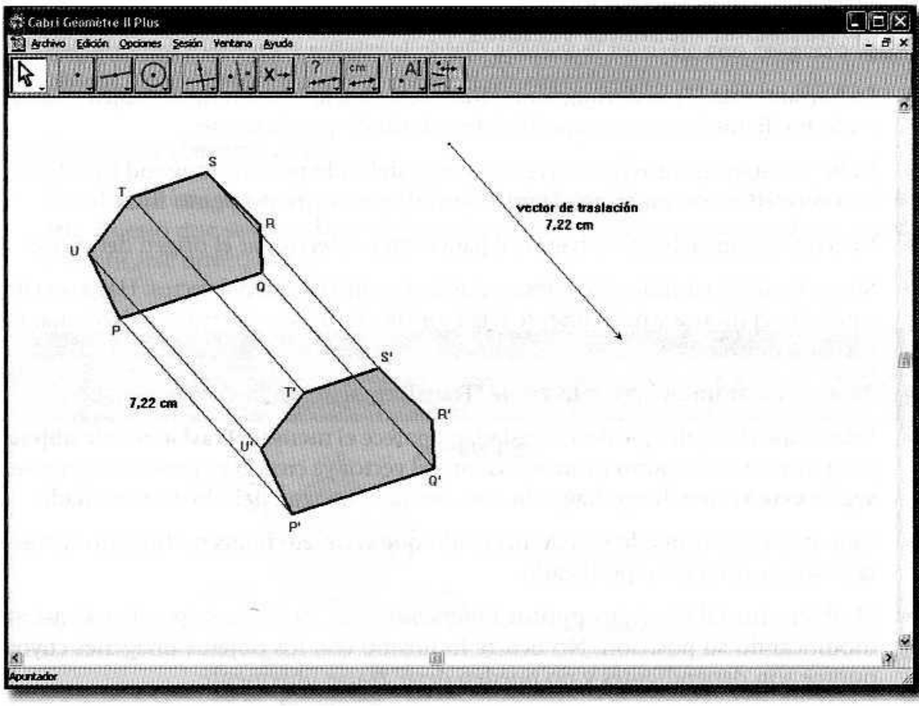




Traslación mediante vectores

- La herramienta [Transformaciones]*Traslación* crea la imagen de un objeto trasladado mediante un vector especificado y definido previamente.
- La herramienta [Líneas]*Vector* crea un vector definido por una longitud (módulo), una dirección con un origen (punto inicial) y un extremo punto final.
- Seleccione [Líneas]*Vector* y haga clic para crear o seleccionar el origen del vector.
- Sitúe el puntero donde usted desee ubicar el punto inicial del vector. Haga un clic y arrastre el mouse y nuevamente haga un clic donde desee crear o seleccionar el extremo del vector.
- Para trasladar un objeto, seleccione [Transformaciones]*Traslación*.
- Seleccione el objeto que desea trasladar; aparece el mensaje **Trasladar este objeto** y haga un clic. A continuación, seleccione el vector ya creado y aparece el mensaje: **según este vector**; luego haga clic y se creará la imagen del objeto trasladado.
- Esta operación la puede repetir, haciendo que el objeto imagen obtenido se traslade según el vector especificado.
- El objeto inicial tiene sus puntos *independientes*, es decir, se pueden arrastrar modificando su posición. No ocurre lo mismo con los objetos imágenes cuyos puntos son dependientes y no pueden desplazarse libremente.





Homotecia

"Dos polígonos semejantes son homotéticos cuando sus lados homólogos son paralelos".

- Una propiedad importante de las figuras homotéticas es que las rectas que unen vértices homólogos concurren a un mismo punto.
- La herramienta [Transformaciones]*Homotecia* reduce o amplía un objeto a un factor especificado respecto de un punto concreto.

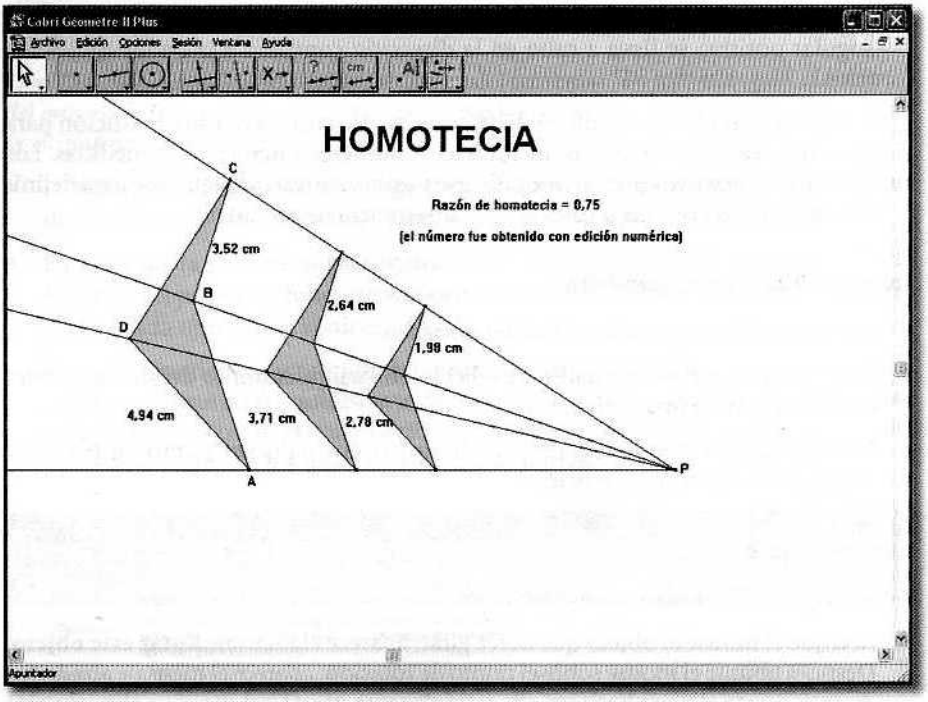
Nota: Este factor puede ser cualquier valor numérico o medida, creado con [Texto y símbolo]*Edición numérica.*

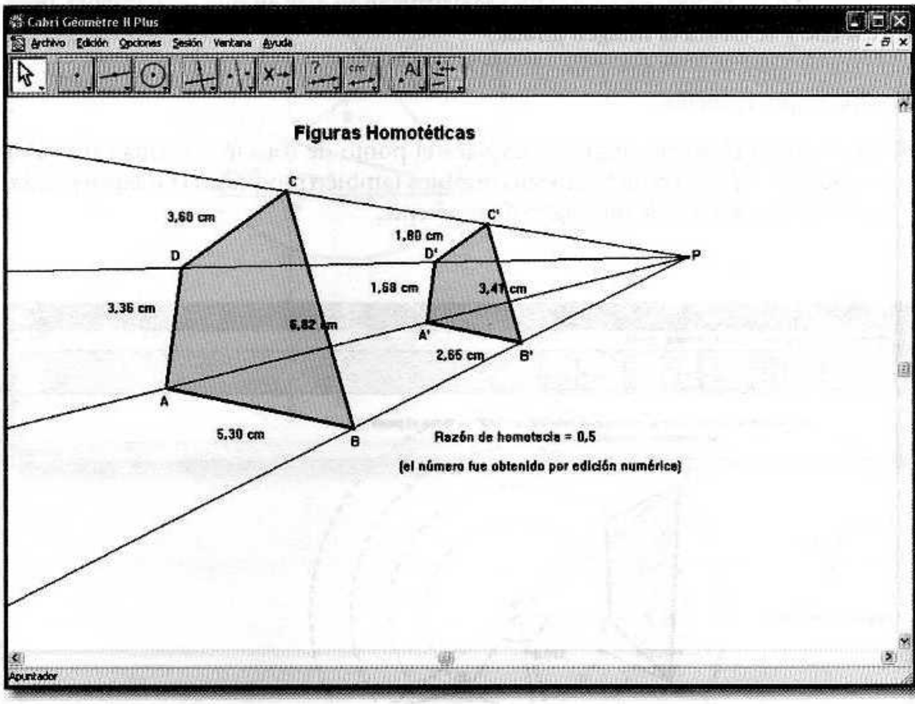
Homotecia de un objeto

- Seleccione [Transformaciones]*Homotecia.*
- Acerque el mouse al objeto que desee ampliar o reducir; aparece el mensaje: **Homotecia de este polígono**. Luego haga clic y coloque el mouse sobre el punto de homotecia; aparece el mensaje: **con respecto a este punto**. Haga clic y finalmente lleve el mouse sobre el factor de homotecia; se muestra el mensaje **utilizando este factor**. Vuelva a hacer clic y se creará la imagen ampliada (o reducida).
- El proceso anterior puede repetirse, tomando la imagen como objeto y utilizando el mismo punto de homotecia y el mismo factor.

Modificar una homotecia

- Cambie la imagen ampliada (o reducida) modificando la cifra que define el factor, desplazando el punto de homotecia o modificando el objeto original. Puesto que se trata de un objeto dependiente, la imagen no puede modificarse directamente.





Rotación a través de edición numérica

- La herramienta [Transformaciones]*Rotación* gira un objeto un cierto ángulo respecto de un punto.
- El ángulo de giro puede ser el valor de la medida de un ángulo previamente calculado o un valor introducido con la herramienta [Texto y símbolo]*Edición numérica*.

- *Cabri®* presupone que las unidades son grados sexagesimales. Un giro con valor angular positivo se lleva a cabo en la dirección contraria a la de las agujas del reloj.
- La herramienta [Texto y símbolo]*Edición numérica* crea un cuadro de edición para modificar valores numéricos, incluidos los números interactivos o medidas. Los números interactivos pueden modificarse y utilizarse interactivamente para definir rotaciones, homotecias o valores de transferencia de medidas.

Crear y editar valores numéricos

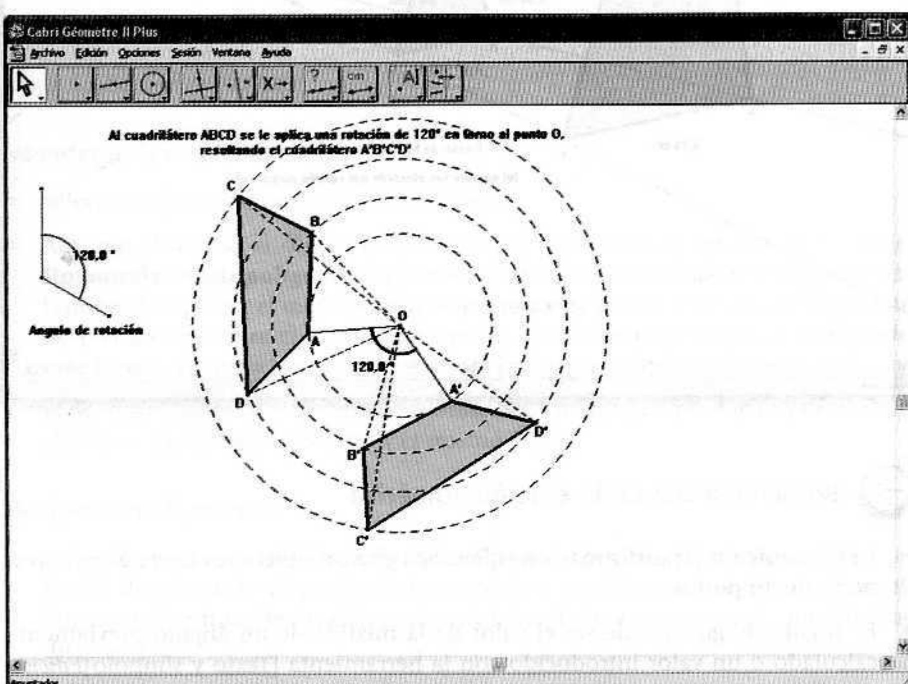
- Seleccione [Texto y símbolo]*Edición numérica.*
- Haga clic para situar un cuadro de edición en cualquier punto del dibujo y crear en él un número interactivo.
- Escriba un valor numérico, después haga clic en cualquier punto en blanco y desaparece el cuadro de edición.

Girar un objeto

- Seleccione [Transformaciones]*Rotación.*
- Acerque el mouse al objeto que desee girar; aparece el mensaje **Rotar este objeto**. Después ubique el mouse sobre el punto de rotación; aparece el mensaje **alrededor de este punto**. Luego haga un clic y finalmente ubique el mouse sobre el valor angular de rotación; aparece el mensaje **utilizando este ángulo**. Finalmente, haga un clic y se creará la imagen girada.

Modificar una rotación

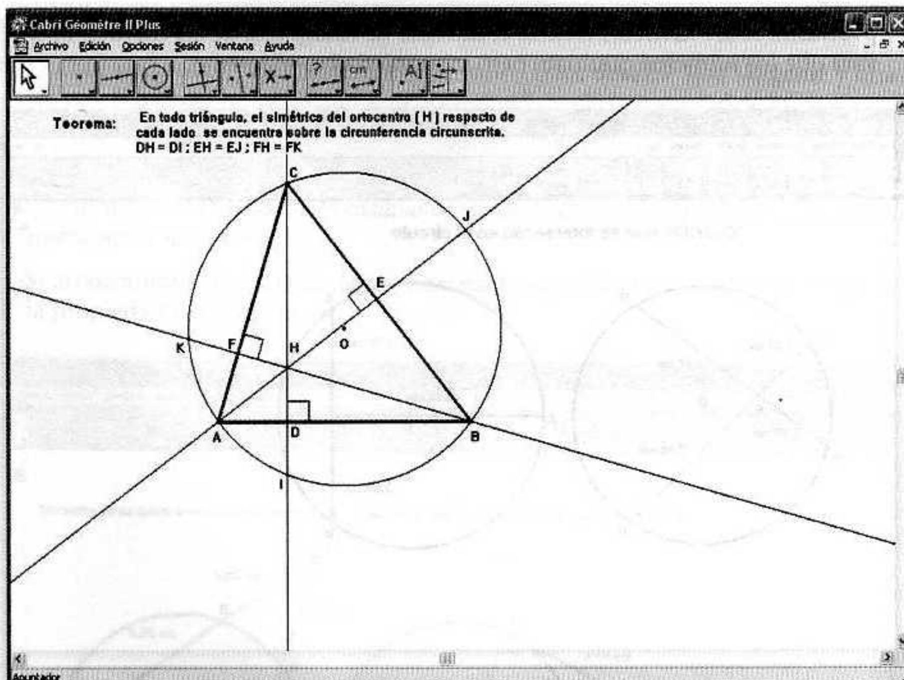
- Si modifica el objeto original, desplaza el punto de rotación o edita otro valor creado por edición numérica, estos cambios también modifican la imagen girada, puesto que se trata de un objeto dependiente.



Simétrico del ortocentro sobre la circunferencia circunscrita

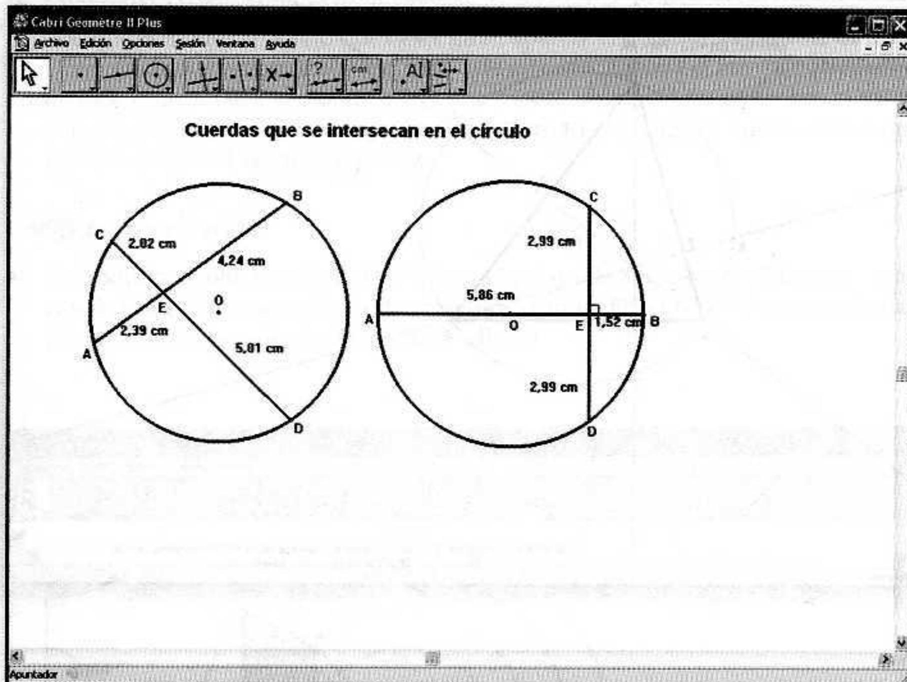
Con *Cabri*® se puede comprobar la validez del teorema: *"En todo triángulo, el simétrico del ortocentro (punto en que se cortan las alturas) respecto de cada lado se encuentra sobre la circunferencia circunscrita".*

- Dibujar un triángulo *ABC* y luego trazar cada una de las alturas (perpendicular de un vértice al lado opuesto). Éstas se cortan en un punto *H* (ortocentro).
- Para dibujar la circunferencia circunscrita se trazan las simetrales (mediatrices) de los lados, el punto de concurrencia es el circuncentro *O*, y el radio es la distancia de *O* a cada uno de los vértices.
- Con la herramienta para comprobar propiedades [Propiedades]*Equidistante* (comprueba si un punto es equidistante de otros dos), se marca primero el punto sobre cada lado y se compara con el ortocentro y el simétrico sobre la circunferencia, aparece el mensaje: **los puntos son equidistantes**.



Cuerdas que se intersecan en un círculo

- Dibuje una circunferencia con centro en *O* y un radio cualquiera.
- Con la herramienta [Líneas]*Segmento,* dibuje dos cuerdas que se corten. Con la herramienta [Puntos]*Punto(s) de intersección,* marque el punto en que se cortan las cuerdas; luego, mida cada uno de los segmentos que resultan.
- Compruebe la propiedad: *"El producto de los segmentos sobre cada una de las cuerdas es constante (son inversamente proporcionales)".*
- Con la herramienta [Medida]*Calculadora,* aparecera la calculadora en la parte inferior del área de trabajo. Haciendo clic sobre el número que mide un segmento; luego, multiplicándolo por el número que mide el otro segmento sobre una misma cuerda y haciendo clic sobre (=), se obtendrá el producto en cm^2. Arrastre este resultado fuera de la calculadora. Realice la misma operación con la otra cuerda, arrastre el resultado fuera y cierre la calculadora. Compare ambos resultados.
- Si arrastra sobre la circunferencia el extremo de cualquiera de las cuerdas, observará que los números cambian, pero la propiedad se mantiene.

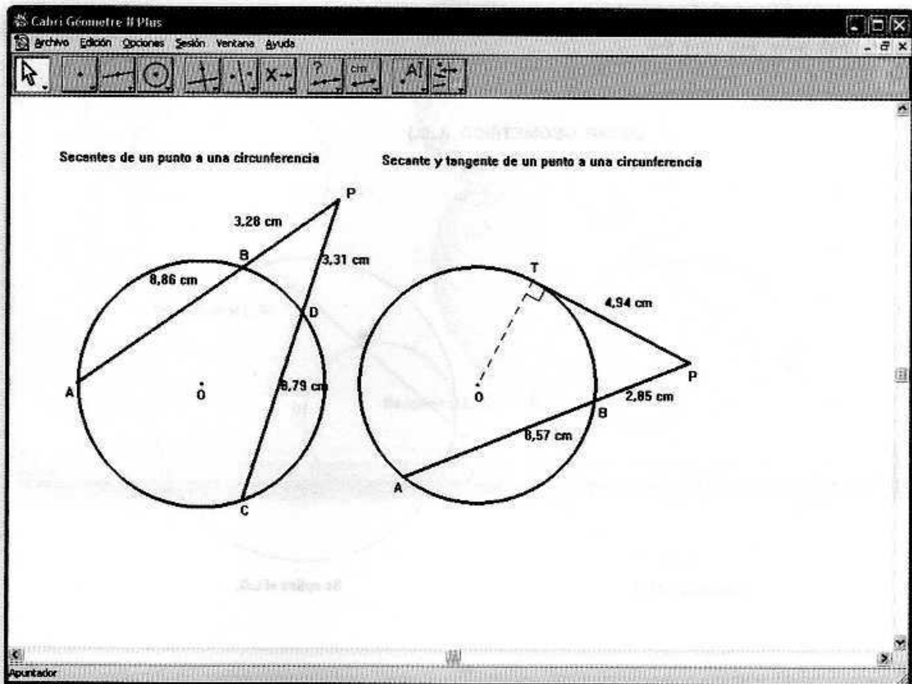


Desde un punto exterior, se trazan dos secantes a una circunferencia

- Dibuje una circunferencia con centro en O y un radio cualquiera.
- Ubique un punto P en el exterior del círculo. Trace un segmento desde P hasta un punto A sobre la circunferencia, la intersección de este segmento con la circunferencia es B, mida $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. Lo mismo para $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$.
- Compruebe la propiedad: *"El producto de la secante por su segmento externo es constante".*

Desde un punto exterior, se traza una secante y una tangente a una circunferencia

- Dibuje una circunferencia con centro en O y un radio cualquiera.
- Ubique un punto P en el exterior del círculo. Trace desde P una tangente y una secante (como se ha explicado anteriormente), mida la longitud de la tangente, la de la secante entera (desde P al punto más alejado sobre la circunferencia) y el segmento externo (desde P hasta el punto más cercano).
- Compruebe la propiedad: *"El cuadrado de la tangente es igual al producto de la secante entera por su segmento externo".*
- Si arrastramos el punto exterior P, observamos que los números cambian, pero la propiedad se mantiene.



Lugar Geométrico (L.G.)

Ejercicio N° 1

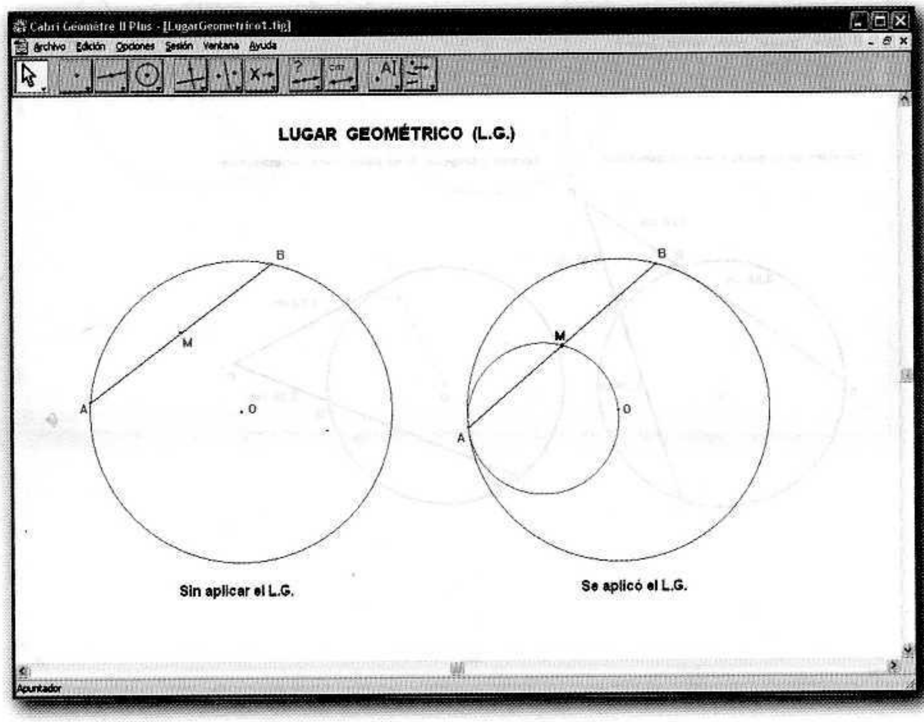
Se entiende por Lugar Geométrico (L.G.) a un conjunto de puntos que cumplen una determinada condición y sólo ellos la cumplen.

Por ejemplo: Una circunferencia, la bisectriz de un ángulo, la simetral de un trazo, la paralela media, etc.

Para dibujar un L.G. necesitaremos el objeto que lo describirá y un objeto que se desplazará sobre otro objeto.

Por ejemplo, para obtener el L.G. del punto medio de una cuerda de una circunferencia cuando un extremo recorre la circunferencia, realizaremos los pasos siguientes:

- Trazar la circunferencia [Curvas]*Círculo*.
- Dibujar una cuerda *AB* [Puntos]*Punto sobre un objeto*.
- Obtener el punto medio de la cuerda [Construcciones]*Punto medio*.
- Seleccionar la herramienta [Construcciones]*Lugar*.
- Señalar el punto medio *M* y, a continuación, el punto *B* extremo de la cuerda que se desplazará por la circunferencia para representar el lugar geométrico.
- En la figura de la izquierda, se han seguido todas las instrucciones, salvo la de aplicar el L.G.; en la figura de la derecha, se observa la circunferencia que contiene los infinitos puntos medios de las cuerdas, cuando un extremo se desplaza sobre la circunferencia de centro en *O*.
- Desplace el extremo *B* de la cuerda sobre la circunferencia y observe cómo actúa el L.G.



Ejercicio N°2

Para una curva *c* y un punto *P* se obtiene una *envolvente* al trazar las circunferencias que pasan por el punto *P* y tiene el centro en la curva *c*.

Se pide trazar la envolvente de circunferencias para una circunferencia *c* desde un punto *P* que pertenezca a ella.

Dibujamos una circunferencia *c* y un punto *P* en *c*.

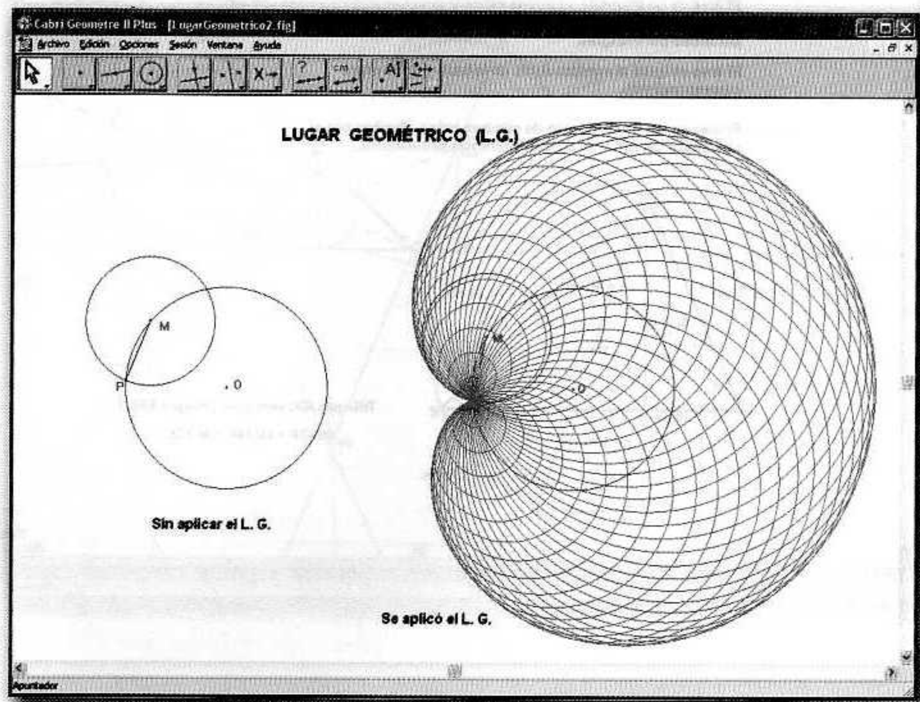
Marcamos un nuevo punto *M* en la circunferencia *c*.

Para trazar la envolvente necesitamos dibujar las circunferencias que pasan por *P* y tienen el centro en la circunferencia *c*.

Una de estas circunferencias será la que tiene el centro en el punto *M* y pasa por *P*, que definimos utilizando la herramienta [Curvas]*Círculo*.

Para obtener la envolvente seleccionamos [Construcciones]*Lugar*, hacemos clic sobre la circunferencia con centro en *M* y radio $\overline{MP}$ y luego sobre el punto *M*, que se desplazará por la circunferencia *c* a la cual pertenece.

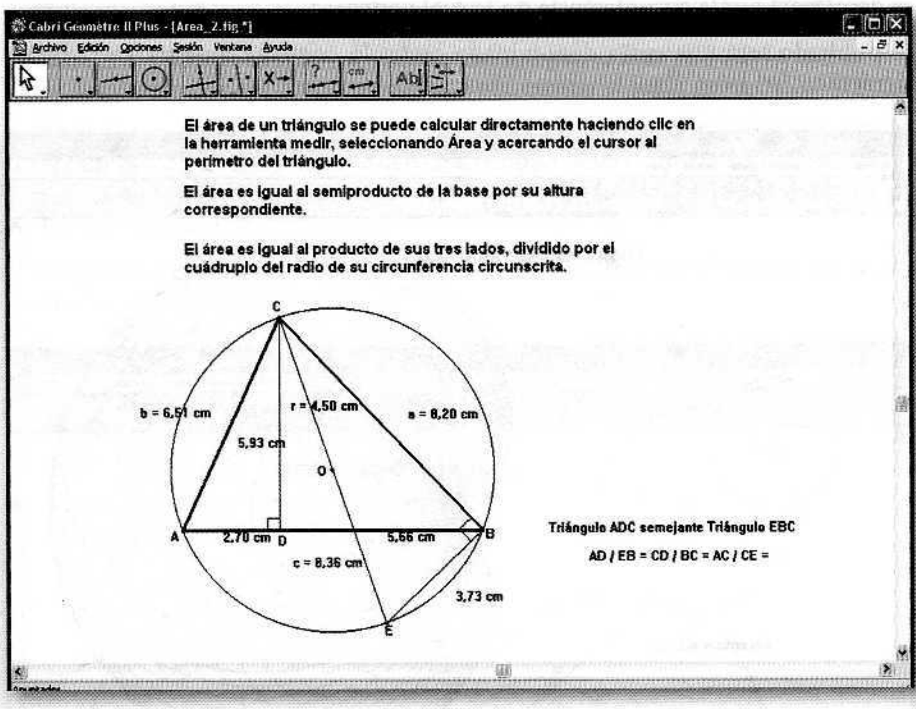
El resultado será una curva denominada *cardioide*, como se muestra en la figura siguiente.



Comprobación de varias fórmulas para calcular el área de un triángulo

- En un triángulo ABC dibujar su circunferencia circunscrita; desde un mismo vértice C dibujar la altura $\overline{CD}$ y el diámetro $\overline{CE}$ de la circunferencia circunscrita.
- Medir los lados del triángulo, medir las alturas y su radio y:
  a) Mida directamente el área del triángulo ABC.
  b) Usando la calculadora de *Cabri©*, mida la mitad del producto de un lado por su correspondiente altura.
  c) Usando la calculadora de *Cabri©*, mida el producto de los tres lados dividido por cuatro veces el radio de su circunferencia circunscrita.

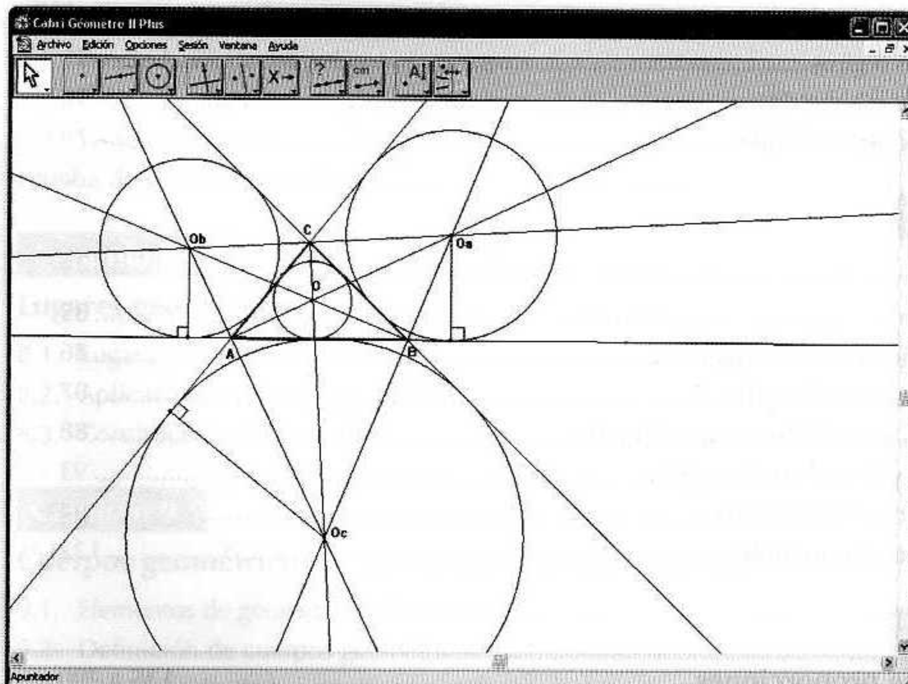
  Compruebe que los tres resultados son iguales.
- Si arrastra un vértice del triángulo ABC, verá como cambian los datos, pero se mantiene la igualdad de las áreas.



Circunferencia inscrita y exinscrita al triángulo ABC

En el triángulo ABC, trazar la circunferencia inscrita y las tres circunferencias exinscritas tangentes a un lado del triángulo y a la prolongación de los otros dos lados.

- Se recomienda dibujar el triángulo ABC, trazar las bisectrices de sus ángulos interiores y sobre cada lado dibujar las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. En cada vértice, dibujar una perpendicular a la bisectriz interior, las cuales se cortan en O_a, O_b y O_c, y sobre la bisectriz de un ángulo interior.
- Con centro en O_a, O_b y O_c; y con radios ρ_a, ρ_b y ρ_c se dibujan las tres circunferencias exteriores tangentes a los lados del triángulo.
- Compruebe que el triángulo $O_a O_b O_c$ formado por los tres centros de las circunferencia exinscritas tiene a las bisectrices de los ángulos interiores como altura.
- Si arrastra uno de los vértices del triángulo ABC observará cómo se mantienen las propiedades.



Índice

Capítulo 1

Elementos básicos de la geometría .... 7 a 44

1.1. Rectas y ángulos 7
1.2. Puntos y rectas en el plano 9
1.3. Ángulos 11
Prueba de selección múltiple 32

Capítulo 2

Transformaciones isométricas .... 45 a 84

2.1. Introducción 45
2.2. Traslaciones 46
2.3. Rotaciones o giros 51
2.4. Reflexiones o simetrías 56
Prueba de selección múltiple 79

Capítulo 3

Triángulos .... 85 a 134

3.1. Definiciones 85
3.2. Clasificación de los triángulos 86
3.3. Teoremas sobre triángulos 87
3.4. Elementos secundarios de un triángulo 88
3.5. Perímetro y área de un triángulo 93
3.6. Congruencia de triángulos 94
Prueba de selección múltiple 122

Capítulo 4

Geometría de proporciones .... 135 a 200

4.1. Segmentos proporcionales y Teorema de Thales 135
4.2. Semejanza de triángulos 155
4.3. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo 167
4.4. Elementos de trigonometría en el triángulo rectángulo 177
Prueba de selección múltiple 188

Capítulo 5

Cuadriláteros .... 201 a 238

5.1. Definición y clasificación 201
5.2. Propiedades y teoremas 203
5.3. Perímetro y áreas 204
Prueba de selección múltiple 227

Capítulo 6

Círculo y circunferencia .... 239 a 312
6.1. Elementos y propiedades 239
6.2. Ángulos en la circunferencia y sus medidas 246
6.3. Relaciones métricas en la circunferencia 273
6.4. Perímetro y área 286
Prueba de selección múltiple 301

Capítulo 7

Polígonos .... 313 a 352
7.1. Definición y elementos básicos 313
7.2. Propiedades de los polígonos convexos 315
7.3. Polígonos regulares 318
7.4. Polígonos inscritos y circunscritos 327
Prueba de selección múltiple 344

Capítulo 8

Lugares geométricos .... 353 a 376
8.1. Lugar geométrico (L.G.) 353
8.2. Aplicaciones de lugar geométrico 361
8.3. Construcción de triángulos 367

Capítulo 9

Cuerpos geométricos .... 377 a 414
9.1. Elementos de geometría del espacio 377
9.2. Definición de cuerpos geométricos 381
9.3. Clasificación de los cuerpos geométricos 383
9.4. Área y volumen de cuerpos geométricos 388
Prueba de selección múltiple 405

Anexo 1

Prueba de selección múltiple final .... 415 a 426

Anexo 2

Cabri Géomètre .... 427 a 463

Índice analítico

Altura 88
Ángulo:
- agudo 12
- central 246
- completo 11
- diedro 382
- exinscrito 247
- extendido 12
- exterior 249
- inscrito 246
- interior 248
- obtuso 12
- poliedro 382
- recto 12
- semiinscrito 247
- Medida de 11

Ángulos:
- adyacentes 13
- alternos externos 16
- alternos internos 16
- complementarios 13
- correspondientes 16
- opuestos por el vértice 13
- suplementarios 13

Anillo 245, 287
Apotema: 328
- basal 385
- lateral 385

Arco 240, 286
- capaz 146, 359, 360

Área 8
Arista 381, 384
Arquímedes, biografía de 388
Axioma 14
Bisectriz 15, 90, 353
Blaise Pascal, biografía de 200
Cara 9, 381, 384
Cateto 86
Centro:
- de gravedad 91
- de rotación 51, 55

Cilindro 383, 387
Círculo 286, 333
Circunferencia: 239, 286, 353
- circunscrita 91, 329
- de Apolonio 138, 374
- exinscrita 90
- inscrita 90, 329

Circunferencias:
- concéntricas 242
- tangentes 242

Circunscentro 91, 329
Congruencia 94
Cono 383, 387
Corolario 14
Corona 245
Cuadrado 201
Cuadrilátero 201, 304
Cubo 383
Cuerda 240
Cuerpo:
- geométrico 9, 381
- redondo 9, 381, 386

Curva 8
Cúspide 385
Decágono 304
Demostración 14
Diagonal 303, 306, 307, 381
Diámetro 240
Distancia:
- de un punto a una recta 14
- entre dos puntos 14
- entre dos rectas 15

Divina proporción 139
División armónica 137
Dodecaedro 383
Dodecágono 304
El número de oro 139
Endecágono 304
Eneágono 304
Eratóstenes, biografía de 300
Escher, M.C., biografía de 67
Esfera 383, 386
Espacio 9
Euclides, biografía de 31
Euclides, teorema de 88, 167, 170, 278
Euler, Leonhard, biografía de 382
Fibonnacci, Leonardo, biografía de 285
Figura geométrica 8
Generatriz 386
Grado sexagesimal 11
Heptágono 304
Herón de Alejandría, biografía de 121
Hexaedro 383
Hexágono 304
Hipatía, biografía de 205
Hipotenusa 86
Hipótesis 14
Homotecia 159
Icosaedro 383
Identidades trigonométricas 179
Inscentro 90, 329
Kuhn, Thomas, biografía de 226
Lados homólogos 330
Lema 14
Línea horizontal 9

Línea mixta	8
Línea vertical	9
Lobachevski, Nikolai, biografía de	340
Lugar geométrico	353, 361
Magnitud de rotación	51
Manto	9
Mediana	92
Menelao de Alejandría, biografía de	121
Octoedro	383
Octógono	304
Ortocentro	88
Paralelepípedo	384
Paralelogramo	201
Pentadecágono	304
Pentágono	304
Perímetro	8
Pierre de Fermat, biografía de	78
Pirámide	383
Plano	8
Poliedro	9, 381
Poligonal	8
Polígono:	
circunscrito	327
cóncavo	305
convexo	305
inscrito	327
regular	318
Ángulo exterior de un	85, 304, 306
Ángulo interior de un	85, 304, 305
Triángulo fundamental de	328
Postulado	14
Potencia de un punto	274
Prisma	383
Proyección ortogonal	380
Punto	7
Radián	11
Radio	239, 353
Rayo	8
Razones trigonométricas	177
Recta	7
Rectángulo	201
áureo	140
dorado	140
Rectas:	
alabeadas	378
coplanares	10
paralelas	10, 378
perpendiculares	13, 379
secantes	10, 378
Reflexión	45, 56
René Descartes, biografía de	343
Resolución de triángulos	180
Rombo	201
Romboide	201
Rotación	45
Punto de	51
Secante	241
Sección áurea	139
Sector circular	245, 286
Segmento	8
circular	245, 287
oblicuo	14
Pie de un	14, 379
Segmentos proporcionales	135
Semejanza de triángulos	155
Semiplano	8
Semirecta	8
Sentido de giro	51
Simetral	15, 91, 353, 354
Simetría:	
axial	56
central	61
Centro de	62
Superficie de revolución	9
Tangente	240
Teorema	14
de Pitágoras	87, 168, 169, 273
de Thales,	136
del coseno	181
del seno	180
Teselación	65
Tesis	14
Tetraedro	383
Thales de Mileto, biografía de	187
Transformaciones isométricas	45
Transversal de gravedad	91
Trapecio	204
circular	245, 287
Trapezoide	201
Traslación	45
Trazo	8
Triángulo	85, 304
acutángulo, equilátero, escaleno, isósceles, obtusángulo, rectángulo	86
Triángulos:	
congruentes	94
semejantes	155
Tronco:	
de cono	383
de pirámide	383
de prisma	383, 385
Vector de traslación	47
Vértice	11, 85, 304, 381
Volumen	9

CONTENIDOS

1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA
   1.1. Rectas y ángulos
   1.2. Puntos y rectas en el plano
   1.3. Ángulos
   Prueba de selección múltiple

2. TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS
   2.1. Introducción
   2.2. Traslaciones
   2.3. Rotaciones o giros
   2.4. Reflexiones o simetrías
   Prueba de selección múltiple

3. TRIÁNGULOS
   3.1. Definiciones
   3.2. Clasificación de los triángulos
   3.3. Teoremas sobre triángulos
   3.4. Elementos secundarios de un triángulo
   3.5. Perímetro y área de un triángulo
   3.6. Congruencia de triángulos
   Prueba de selección múltiple

4. GEOMETRÍA DE PROPORCIONES
   4.1. Segmentos proporcionales y Teorema de Thales
   4.2. Semejanza de triángulos
   4.3. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo
   4.4. Elementos de trigonometría en el triángulo rectángulo
   Prueba de selección múltiple

5. CUADRILÁTEROS
   5.1. Definición y clasificación
   5.2. Propiedades y teoremas
   5.3. Perímetro y áreas
   Prueba de selección múltiple

6. CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA
   6.1. Elementos y propiedades
   6.2. Ángulos en la circunferencia y sus medidas
   6.3. Relaciones métricas en la circunferencia
   6.4. Perímetro y área
   Prueba de selección múltiple

7. POLÍGONOS
   7.1. Definición y elementos básicos
   7.2. Propiedades de los polígonos convexos
   7.3. Polígonos regulares
   7.4. Polígonos inscritos y circunscritos
   Prueba de selección múltiple

8. LUGARES GEOMÉTRICOS
   8.1. Lugar geométrico (L.G.)
   8.2. Aplicaciones de lugar geométrico
   8.3. Construcción de triángulos

9. CUERPOS GEOMÉTRICOS
   9.1. Elementos de geometría del espacio
   9.2. Definición de cuerpos geométricos
   9.3. Clasificación de los cuerpos geométricos
   9.4. Área y volumen de cuerpos geométricos
   Prueba de selección múltiple

ANEXO 1
   Prueba de selección múltiple final

ANEXO 2
   Cabri Géomètre

GEOMETRÍA ARRAYAN

Geometría Arrayán es una obra que ofrece excelentes recursos de aprendizaje, de aplicación y de ejercitación a los estudiantes y profesores de enseñanza media y universitaria.

El libro está diseñado de modo que cada capítulo contiene un esquema básico de contenidos, una cantidad de ejercicios resueltos cuyo objetivo es mostrar las múltiples formas de abordar la solución de ellos, una cantidad de ejercicios propuestos con sus respectivas soluciones y un set de ejercicios de selección múltiple que ponemos a disposición del lector para enfrentar desde otro punto de vista su aprendizaje. Por último, agregamos una prueba de selección múltiple de 60 ejercicios, en la cual incorporamos, entremezclados, todos los contenidos trabajados. Además, se entrega un capítulo adicional con aplicaciones de software computacional para la resolución de problemas geométricos.

Ximena Carreño Campos y Ximena Cruz Schmidt, prestigiosas docentes especialistas en esta materia, autoras del libro **Geometría Arrayán**, han escrito una obra que, sin lugar a dudas, es un aporte significativo al estudio de la geometría.

Geometría Arrayán
ISBN 956-240-427-7
9 789562 404273 >

ARRAYAN EDITORES M.R.